# SURFACES DE DEL PEZZO DE DEGRÉ 4 SUR UN CORPS $C_1$

*par*

Jean-Louis Colliot-Thélène

***Résumé.*** — Sur toute surface de del Pezzo de degré 4 sur un corps $C_1$ de caractéristique zéro, tous les points rationnels sont $R$-équivalents. Plus généralement, ceci vaut sur tout corps parfait infini de caractéristique différente de 2.

***Abstract.*** — On a del Pezzo surface of degree 4 over an infinite $C_1$-field of characteristic zero, all rational points are $R$-equivalent. This more generally holds over any infinite perfect $C_1$-field of characteristic different from 2.

## 1. Introduction

Soient $k$ un corps, $X$ une $k$-variété algébrique et $X(k)$ l'ensemble de ses points rationnels. On dit que deux points $P$ et $Q$ de $X(k)$ sont directement $R$-liés s'il existe un ouvert $D$ de la droite projective $\mathbf{P}^1_k$ et un $k$-morphisme $D \to X$ tels que $P$ et $Q$ appartiennent à l'image de $D(k)$. La $R$-équivalence sur $X(k)$ est la relation d'équivalence engendrée par cette relation élémentaire. On note $X(k)/R$ l'ensemble des classes d'équivalence.

Pour $k = \mathbb{F}$ un corps fini et $X$ une hypersurface lisse de degré $d \leq n$ dans $\mathbf{P}^n_{\mathbb{F}}$, un cas particulier d'une conjecture de Kollár (voir [**9**]) affirme que l'ensemble $X(\mathbb{F})/R$ est réduit à un élément. Pour $d = 3$ et $F$ de cardinal au moins 8, ceci a été établi par Swinnerton-Dyer [**14**] et Kollár [**9**]. Un corps fini satisfait la propriété $C_1$.

Soit $k$ un corps $C_1$ de caractéristique zéro, et soit $X$ une $k$-variété projective, lisse, géométriquement connexe. Supposons $X$ géométriquement rationnellement connexe (voir [**8**]). Cette propriété est par exemple satisfaite si $X$ est une hypersurface de degré $d \leq n$ dans $\mathbf{P}^n_k$, ou si $X$ est géométriquement rationnelle, par exemple si c'est une surface fibrée en coniques sur la droite projective, ou si c'est une surface de del Pezzo.

Sans précision supplémentaire sur $X$ ou sur $k$, les deux questions suivantes sont ouvertes :

(1) (Serge Lang) L'ensemble $X(k)$ des points $k$-rationnels de $X$ est-il non vide ?

(2) [**4**, Question 10.11] Y a-t-il au plus une classe de $R$-équivalence sur $X(k)$ ?

Ces questions ont été plus particulièrement étudiées pour $k = \mathbb{C}(B)$ le corps des fonctions d'une courbe complexe et $k = \mathbb{C}((t))$ le corps des séries formelles en une variable. Dans ces deux cas, la question (1) a une réponse affirmative. Pour $k = \mathbb{C}(B)$, c'est le théorème de Graber, Harris et Starr [**6**]. Pour $k = \mathbb{C}((t))$, on sait établir le résultat comme conséquence dudit théorème [**4**, Thm. 7.5].

Pour $k = \mathbb{C}(B)$ et $k = \mathbb{C}((t))$, A. Pirutka [**12**] a donné une réponse affirmative à la question (2) lorsque l'on suppose de plus $X$ rationnellement simplement connexe.

Déjà en dimension 2, donc pour les surfaces géométriquement rationnelles, et même pour les corps $k = \mathbb{C}(B)$ et $k = \mathbb{C}((t))$, la question (2) est ouverte.

Soit $k$ un corps infini. Soit $X$ une $k$-surface projective, lisse, géométriquement connexe, munie d'un $k$-morphisme $f : X \to \mathbf{P}^1_k$ dont la fibre générique est une conique lisse. Si $k$ est un corps $C_1$, toutes les fibres lisses possèdent des $k$-points. Si $X(k)/R$ est réduit à un élément, ou même simplement est de cardinal plus petit que le corps $k$, alors il existe un $k$-morphisme $g : \mathbf{P}^1_k \to X$ qui composé avec $f : X \to \mathbf{P}^1_k$ est un $k$-morphisme dominant $h : \mathbf{P}^1_k \to \mathbf{P}^1_k$. Le produit fibré $Y$ de $f : X \to \mathbf{P}^1_k$ et $h : \mathbf{P}^1_k \to \mathbf{P}^1_k$ est une $k$-surface fibrée en coniques $Y \to \mathbf{P}^1_k$ qui admet une section : c'est donc une $k$-surface $k$-rationnelle, et elle domine $X$. On conclut que $X$ est $k$-unirationnelle. Soit $Z$ une variété complexe de dimension 3 fibrée en coniques au-dessus du plan projectif $\mathbf{P}^2_{\mathbb{C}}$. Soit $k = \mathbb{C}(t)$. En considérant un pinceau de droites dans $\mathbf{P}^2_{\mathbb{C}}$, on voit que le corps des fonctions de $Z$ s'identifie au corps des fonctions d'une $k$-surface projective et lisse $X$ fibrée en coniques sur $\mathbf{P}^1_k$. Si $X(k)/R$ est dénombrable, l'argument précédent montre que $X$

est $k$-unirationnelle. Comme $k = \mathbb{C}(t)$, on conclut que la variété $Z$ est $\mathbb{C}$-unirationnelle. Or on ne s'attend pas à ce que toute variété complexe fibrée en coniques sur $\mathbf{P}^2_{\mathbb{C}}$ soit $\mathbb{C}$-unirationnelle. On ne s'attend donc pas à une réponse affirmative à la question (2) en général.

Dans un récent article, Zhiyu Tian [**15**] établit $X(k)/R = 1$ pour les surfaces de del Pezzo de degré 4 sur le corps $k = \mathbb{C}((t))$. Dans cette note, j'observe qu'un théorème de Salberger et Skorobogatov [**13**] sur les surfaces de del Pezzo sur un corps parfait permet d'établir cet énoncé pour beaucoup de corps $C_1$, en particulier pour $k = C(B)$ le corps des fonctions d'une courbe sur un corps $C$ algébriquement clos de caractéristique zéro.

***Théorème 1.1***. — *Soit $k$ un corps $C_1$ parfait, infini, de caractéristique différente de 2. Soit $X$ une $k$-surface projective et lisse de l'un des types suivants :*

*(a) Surface de del Pezzo de degré 4, c'est-à-dire intersection lisse de deux quadriques dans $\mathbf{P}^4_k$.*

*(b) Surface cubique lisse dans $\mathbf{P}^3_k$ possédant une droite définie sur $k$.*

*(c) Surface $X$ munie d'une fibration en coniques $X \to \mathbf{P}^1_k$ possédant exactement 5 fibres géométriques réductibles.*

*Alors tous les $k$-points de $X$ sont $R$-équivalents.*

Sur tout corps $k$, on sait que les classes de surfaces considérées en (b) et (c) sont identiques. On sait que la contraction d'une $k$-droite sur une surface cubique lisse est une surface de del Pezzo de degré 4, et que l'éclatement sur une surface de del Pezzo de degré 4 d'un $k$-point non situé sur une courbe exceptionnelle est une surface cubique lisse possédant une $k$-droite. Pour ces énoncés classiques, on consultera [**7**] et [**10**]. On sait aussi (B. Segre, Manin [**10**, Theorem 29.4 and 30.1], [**3**, Prop. 2.3], Kollár [**9**], Pieropan [**11**]) que les $k$-surfaces considérées sont $k$-unirationnelles dès qu'elles contiennent un $k$-point.

Sur $k$ un corps $C_1$ toutes les $k$-variétés considérées dans l'énoncé ont des $k$-points, et si $k$ est infini ces $k$-points sont denses pour la topologie de Zariski. Une surface de type (a) est donc $k$-birationnelle à une surface de type (b), et inversement. L'ensemble $X(k)/R$ est invariant par éclatement d'un $k$-point. Il suffira donc d'établir l'énoncé pour les surfaces de del Pezzo de degré 4.

La trivialité de $X(k)/R$ pour $k$ un corps $C_1$ de caractéristique zéro était connue pour les surfaces rationnelles fibrées en coniques avec au plus 4 fibres géométriques réductibles [**5**], donc aussi pour les surfaces $X$ de del Pezzo de degré 4 avec $\mathrm{Pic}(X)$ de rang au moins 2.

La trivialité de $X(k)/R$ pour $k$ un corps $C_1$ n'est pas connue pour une surface cubique lisse $X$ $k$-minimale, i.e. avec $\mathrm{Pic}(X)$ de rang 1. Sur $k = \mathbb{C}((t))$, c'est établi pour certaines surfaces cubiques dans [**15**].

## 2. Démonstration du théorème

Soit $k$ un corps de caractéristique différente de 2.

***Lemme 2.1***. — *Soit $Q \subset \mathbf{P}^n_k$, $n \geq 2$ une quadrique lisse. Soit $U \subset Q$ un ouvert de Zariski. On a $U(k)/R \leq 1$. Plus précisément, deux $k$-points $P$ et $Q$ de $U$ sont directement $R$-liés sur $U$.*

*Démonstration.* — [**3**, Lemma 3.22 (ii)]. □

***Lemme 2.2***. — *Soit $U \subset \mathbf{P}^m_k$ un ouvert non vide. Soit $n \geq 4$. Soit $X \subset \mathbf{P}^n_U$ une famille lisse de quadriques. Si $k$ est un corps $C_1$, pour tout ouvert Zariski non vide $W \subset X$, on a $W(k)/R = 1$. Plus précisément, deux $k$-points $P$ et $Q$ de $W$ sont directement $R$-liés sur $W$.*

*Démonstration.* — Notons $p : X \to U$ la projection naturelle. Quitte à remplacer $U$ par l'ouvert $p(W)$, on peut supposer $U = p(W)$. Soient $P, Q \in W(k)$, et soient $A = p(P)$ et $B = p(Q)$. Si $A = B$, alors $P$ et $Q$ sont deux $k$-points de la quadrique lisse $X_A \subset \mathbf{P}^n_k$, et $P$ et $Q$ sont directement $R$-liés dans l'ouvert $W \cap X_A \subset X_A$ d'après le lemme 2.1, donc aussi sur $W$. Supposons $A \neq B$. Soit $L \subset \mathbf{P}^m_k$ la droite joignant $A$ et $B$. La restriction de $p : X \to U$ au-dessus de $L \cap U$ est une famille lisse de quadriques $Y \to L \cap U$ qui possède une section rationnelle car le corps $k(L)$ est un corps $C_2$ et toute forme quadratique en au moins 5 variables sur un tel corps a un point rationnel. Comme $L \cap U$ est régulier de dimension 1, toute telle section est morphique. La fibre générique $Y_\eta$ de la famille $Y \to L \cap U$ est une quadrique lisse qui possède un point rationnel sur $k(\eta) = k(L)$, donc est $k(L)$-birationnelle à un espace projectif sur le corps $k(L)$. On sait que la propriété d'approximation faible est invariante par de tels isomorphismes. On peut donc trouver un $k(L)$-point de $Y_\eta$ qui se spécialise en $P$ au-dessus de $A$ et en $Q$ au-dessus de $B$. Le $k$-morphisme $\theta : L \cap U \to Y \subset X$ ainsi défini est une $R$-équivalence directe entre $P$ et $Q$. Comme $P$ et $Q$ appartiennent à $W$, le $k$-morphisme $\theta^{-1}(W) \subset L$ est non vide et $\theta^{-1}(W) \to W$ est une $R$-équivalence directe entre $P$ et $Q$ dans $W$. □

***Lemme 2.3***. — *Soient $X$ une $k$-variété intègre, $S$ un $k$-groupe réductif connexe, et $p : \mathcal{T} \to X$ un torseur sur $X$ sous $S$. Soit $W \subset \mathcal{T}$ un ouvert, et soit $U = p(W) \subset X$ l'ouvert qui est son image par $p$. Si $k$ est un corps infini de dimension cohomologique au plus 1, l'application $W(k) \to U(k)$ est surjective.*

*Démonstration.* — Soit $P \in U(k)$. La fibre $U_P$ de $W \to U$ est un ouvert non vide de la $k$-variété $\mathcal{T}_P$, qui est un espace principal homogène sous le $k$-groupe réductif connexe $S$. Comme la dimension cohomologique de $k$ est au plus 1, cet espace principal homogène est trivial, donc la $k$-variété $\mathcal{T}_P$ est $k$-isomorphe à $S$. Tout $k$-groupe réductif connexe sur un corps infini est $k$-unirationnel (Chevalley, Rosenlicht, Grothendieck [**1**, Thm. 18.2]), les $k$-points sont donc Zariski denses. Ainsi $U_P(k) \neq \emptyset$. □

Rappelons le théorème [**13**, Thm. 3.8].

***Théorème 2.4*** **(Salberger et Skorobogatov)**. — *Soit $k$ un corps parfait infini de caractéristique différente de 2. Soit $X$ une surface de del Pezzo de degré 4 et $p : \mathcal{T} \to X$ un torseur universel sur $X$ tel que $\mathcal{T}(k) \neq \emptyset$. Alors il existe un ouvert $\Omega$ du plan projectif $\mathbf{P}^2_k$ et une $k$-variété géométriquement intègre $Y$ avec les propriétés suivantes :*

*(i) La $k$-variété $Y \times_k \mathbf{P}^3_k$ est $k$-birationnelle à $\mathcal{T} \times_k \mathbf{P}^1_k$.*

*(ii) La $k$-variété $Y$ est un ouvert dans une famille lisse de quadriques dans $\mathbf{P}^5_\Omega$.*

***Théorème 2.5***. — *Soit $k$ un corps $C_1$, parfait, infini, de caractéristique différente de 2. Soit $X$ une $k$-surface de del Pezzo de degré 4. L'ensemble $X(k)/R$ est réduit à un élément.*

*Démonstration.* — Comme le corps $k$ est $C_1$ et que $X$ est définie par l'annulation simultanée de deux formes quadratiques en 5 variables, on a $X(k) \neq \emptyset$. Soit $p : \mathcal{T} \to X$ le torseur universel [**2**, (2.0.4)] de fibre triviale en un $k$-point de $X$. Ce torseur a une évaluation triviale en tout $k$-point de $X$. En effet le corps $k$ étant $C_1$ est de dimension cohomologique au plus 1, et donc $H^1(k, S) = 0$ pour tout $k$-tore $S$. L'application induite $\mathcal{T}(k) \to X(k)$ est donc surjective [**2**, Lemme 2.7.1].

Gardons les notations du théorème 2.4. Notons $U \subset \mathcal{T} \times_k \mathbf{P}^1_k$ et $V \subset Y \times_k \mathbf{P}^3_k$ des $k$-ouverts non vides isomorphes.

Soit $p_1 : U \to X$ le morphisme lisse composé de l'inclusion $U \subset \mathcal{T} \times_k \mathbf{P}^1_k$, de la projection sur $\mathcal{T} \times_k \mathbf{P}^1_k \to \mathcal{T}$ et de $\mathcal{T} \to X$. Soit $X_0 \subset X$

l'ouvert image de $p_1$. Il résulte du lemme 2.3 que l'application induite $U(k) \to X_0(k)$ est surjective.

Soient $P, Q$ deux $k$-points de $V$. Soit $V_1 \subset Y$ l'ouvert image de $V$ par la projection $Y \times_k \mathbf{P}^3_k \to Y$, et soient $A$ et $B$ dans $V_1(k)$ les $k$-points images de $P$ et $Q$. D'après le lemme 2.2, les points $A$ et $B$ sont directement $R$-liés sur $V_1$. Il existe donc un $k$-morphisme $D \to V_1$ d'un ouvert $D \subset \mathbf{P}^1_k$ tel que $A$ et $B$ soient dans l'image de $D(k)$. La restriction de $V \to V_1$ à $D$ est une famille d'ouverts de $\mathbf{P}^3$. L'argument d'approximation faible au-dessus du corps $k(D)$ utilisé dans la démonstration du lemme 2.2 établit l'existence d'un $k$-morphisme $D' \to V$, avec $D'$ ouvert de $D$ relevant $D \to V_1$, tel que $P$ et $Q$ soient dans l'image de $D'(k)$. Ainsi $P$ et $Q$ sont directement $R$-liés sur $V$.

Combiné avec la surjectivité de $U(k) \to X_0(k)$, cela établit que deux $k$-points quelconques de l'ouvert non vide $X_0$ sont directement $R$-liés.

Pour établir $X(k)/R = 1$, on utilise la proposition 3.24 de [**3**, §3, Appendice B], qui garantit que l'application $X_0(k) \to X(k)/R$ est surjective. Cette proposition est énoncée sur un corps de caractéristique zéro. Dans le cas considéré ici d'une $k$-surface de del Pezzo de degré 4, $k$-unirationnelle, on vérifie que l'argument donné là, qui utilise la $k$-unirationalité de $X$, mentionnée dans l'introduction, et [**3**, §3, Appendice B, Prop. 3.23], vaut sur tout corps $k$ infini de caractéristique différente de 2. $\square$

***Remarque 2.6***. — Dans la démonstration du théorème, l'hypothèse que le corps $k$ est parfait vient de cette même hypothèse dans le théorème 2.4.

## Références

[1] A. Borel, Linear algebraic groups, Second enlarged edition, Graduate Texts in Mathematics **126** Springer Verlag (1991).

[2] J.-L. Colliot-Thélène et J.-J. Sansuc, La descente sur les variétés rationnelles, II. Duke Math. J. **54** (1987) 375–492.

[3] J.-L. Colliot-Thélène et J.-J. Sansuc et P. Swinnerton-Dyer, Intersections of two quadrics and Châtelet surfaces, I. Journal für die reine und angewandte Mathematik **373** (1987) 37–107.

[4] J.-L. Colliot-Thélène, Variétés presque rationnelles, leurs points rationnels et leurs dégénérescences, in *Arithmetic Geometry* (CIME 2007), ed. P. Corvaja et C. Gasbarri, Springer LNM **2009** (2011), p. 1–44.

[5] J.-L. Colliot-Thélène et A. N. Skorobogatov, $R$-equivalence on conic bundles of degree 4, Duke Math. J. **54** (1987) 671–677.

[6] T. Graber, J. Harris, J. Starr, Families of rationally connected varieties, J. Amer. Math. Soc. **16** (2002) 57–67.

[7] V. A. Iskovkikh, Modèles minimaux des surfaces rationnelles sur les corps arbitraires (en russe), Izv. Akad. Nauk SSSR Ser. Mat. **43** (1979), no. 1, 19–43, 237. Trad. anglaise, Math. USSR Sbornik **14** (1980) 17–39.

[8] J. Kollár, Rational curves on algebraic varieties, Ergebnisse der Mathematik und ihrer Grenzgebiete, 3. Folge, Band **32**. Springer, Heidelberg 1996.

[9] J. Kollár, Looking for rational curves on cubic hypersurfaces, notes by Ulrich Derenthal, NATO Sci. Peace Secur. Ser. D Inf. Commun. Secur., Vol. **16**, Higher-dimensional geometry over finite fields, 92–122, IOS, Amsterdam, 2008.

[10] Yu. I. Manin, Cubic forms, Algebra, geometry, arithmetic, North-Holland Mathematical Library Vol. **4**. North-Holland Publishing Co., Amsterdam, second edition, 1986. Translated from the Russian by M. Hazewinkel.

[11] M. Pieropan, On the unirationality of del Pezzo surfaces over an arbitrary field. Master thesis, available at http ://www.algant.eu/documents/theses/pieropan.pdf, 2012.

[12] A. Pirutka, $R$-equivalence on low degree complete intersections, J. Algebraic Geom. **21** (2012), 707–719.

[13] P. Salberger et A. Skorobogatov, Weak approximation for surfaces defined by two quadratic forms, Duke Math. J. **63** (1991) 517–536.

[14] H. P. F. Swinnerton-Dyer, Universal equivalence for cubic surfaces over finite and local fields. Symposia Mathematica, Vol. XXIV (Sympos., INDAM, Rome, 1979), pp. 111–143, Academic Press, London-New York, 1981.

[15] Zhiyu Tian, $R$-equivalence on del Pezzo surfaces of degree 4 and cubic surfaces, `http://arxiv.org/abs/1307.1801v3`

*soumis le 5 avril 2014, révisé le 2 août 2015*

Jean-Louis Colliot-Thélène, C.N.R.S., Université Paris Sud, Mathématiques, Bâtiment 425, 91405 Orsay Cedex, France • *E-mail :* `jlct@math.u-psud.fr`