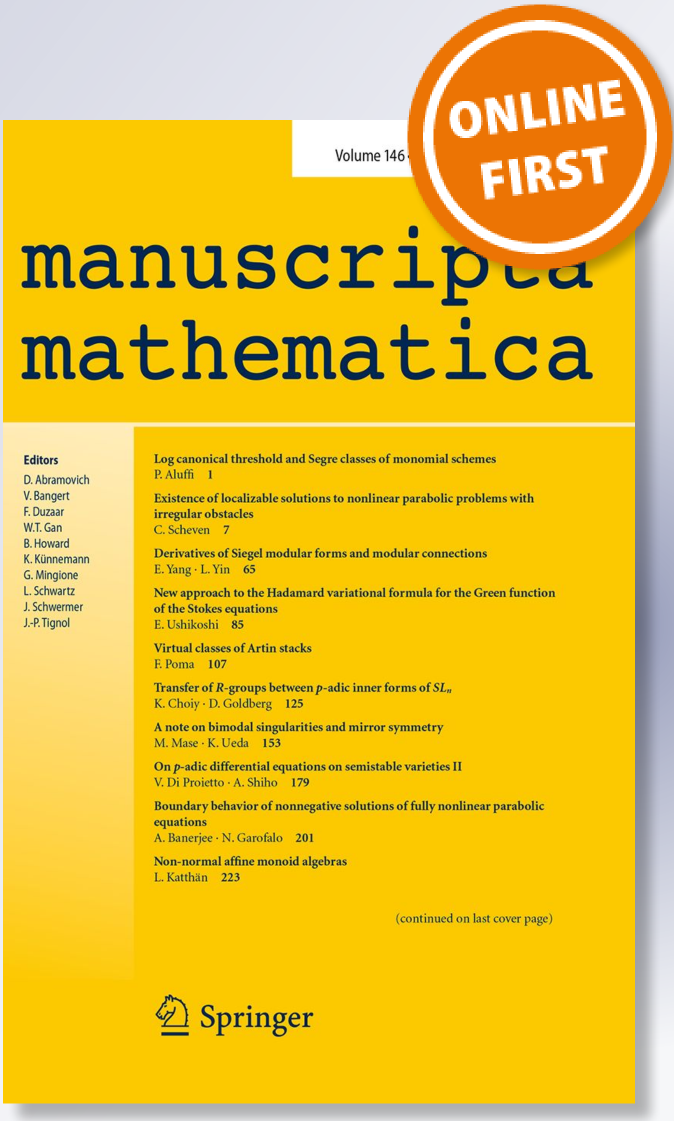
# *Cohomologie non ramifiée dans le produit avec une courbe elliptique*

J.-L. Colliot-Thélène

**manuscripta mathematica**

ISSN 0025-2611

manuscripta math.
DOI 10.1007/s00229-019-01106-z




Springer

manuscripta math. 

J.-L. Colliot-Thélène

# Cohomologie non ramifiée dans le produit avec une courbe elliptique

Received: 1 October 2018 / Accepted: 10 January 2019

**Résumé** Un théorème de Gabber (Enseign Math (2) 48(1–2):127–146, 2002) permet de construire des classes de cohomologie non ramifiée dans le produit de certaines variétés et d'une courbe elliptique. Le lien entre la cohomologie non ramifiée en degré 3 et la conjecture de Hodge entière pour les cycles de codimension deux (Colliot-Thélène et Voisin dans Duke Math J 161(5):735–801, 2012) permet alors de donner de nombreuses classes de variétés pour lesquelles la conjecture de Hodge entière pour les cycles de codimension deux est en défaut. Le cas particulier du produit avec une surface d'Enriques a été établi par Benoist et Ottem (Failure of the integral Hodge conjecture for threefolds of Kodaira dimension zero, 2018. arXiv:1802.01845v1).

**Abstract** A method of Gabber (Enseign Math (2) 48(1–2):127–146, 2002) produces unramified cohomology classes in the products of certain varieties with an elliptic curve. The connection between third unramified cohomology and integral Hodge conjecture for codimension 2 cycles (Colliot-Thélène et Voisin in Duke Math J 161(5):735–801, 2012) then gives many examples of such a product for which this conjecture fails. The special case of the product with an Enriques surface was established by Benoist and Ottem (Failure of the integral Hodge conjecture for threefolds of Kodaira dimension zero, 2018. arXiv:1802.01845v1).

Sauf mention expresse du contraire, la cohomologie employée ici est la cohomologie étale de SGA4. On utilise librement les propriétés de cette dernière, comme on peut les trouver dans le livre [9]. Pour la cohomologie non ramifiée, on renvoie le lecteur à [6] et aux références de cet article.

Soient $k$ un corps de caractéristique zéro et $\overline{k}$ une clôture algébrique. Pour tout entier $n \geq 1$, on note $\mu_n \subset \overline{k}$ le module galoisien des racines $n$-ièmes de l'unité. On note $\mu_n^{\otimes 0} = \mathbb{Z}/n$ (action triviale) et pour $j \geq 1$, $\mu_n^{\otimes j}$ le produit tensoriel de $j$ exemplaires de $\mu_n$. Pour $n$ divisant $m$, on a des inclusions naturelles $\mu_n^{\otimes j} \subset \mu_m^{\otimes j}$ et l'on note $\mathbb{Q}/\mathbb{Z}(j)$ la réunion de ces modules. Le théorème de Voevodsky montre que pour tout entier $i \geq 0$, les flèches $H^{i+1}(k, \mu_n^{\otimes i}) \to H^{i+1}(k, \mathbb{Q}/\mathbb{Z}(i))$ sont injectives.

J.-L. Colliot-Thélène (✉): Laboratoire de Mathématiques d'Orsay, Bâtiment 307, Univ. Paris-Sud, CNRS, Université Paris-Saclay, 91405 Orsay, France.
e-mail: jlct@math.u-psud.fr

*Mathematics Subject Classification*: 14C30 · 14C25 · 14C35 · 19E15

https://doi.org/10.1007/s00229-019-01106-z
Published online: 22 January 2019

## 1. Cohomologie non ramifiée en tout degré

**Théorème 1.1.** *Soit $X/\mathbb{C}$ une variété connexe, projective et lisse et $\mathbb{C}(X)$ son corps des fonctions. Soit $\ell$ un nombre premier. Soit $\alpha \in H^i(X, \mathbb{Z}/\ell)$ une classe de cohomologie dont l'image dans $H^i(\mathbb{C}(X), \mathbb{Z}/\ell)$ est non nulle.*

(a) *Il existe une courbe elliptique $E/\mathbb{C}$ et $\beta \in H^1(E, \mathbb{Z}/\ell)$ tels que l'image de $\alpha \cup \beta \in H^{i+1}(X \times E, \mathbb{Z}/\ell)$ dans $H^{i+1}(\mathbb{C}(X \times E), \mathbb{Z}/\ell)$ soit non nulle. En particulier, les groupes de cohomologie non ramifiée $H^{i+1}_{nr}(\mathbb{C}(X \times E), \mathbb{Z}/\ell)$ et $H^{i+1}_{nr}(\mathbb{C}(X \times E), \mathbb{Q}/\mathbb{Z})$ sont non nuls.*

(b) *Si $X$ peut être définie sur un corps de nombres, pour toute courbe elliptique $E/\mathbb{C}$ d'invariant $j$ transcendant, les groupes de cohomologie non ramifiée $H^{i+1}_{nr}(\mathbb{C}(X \times E), \mathbb{Z}/\ell)$ et $H^{i+1}_{nr}(\mathbb{C}(X \times E), \mathbb{Q}/\mathbb{Z})$ sont non nuls.*

*Démonstration.* D'après Gabber [7, Prop. A.4], dont on garde les notations, il existe une courbe lisse géométriquement connexe $U/\mathbb{Q}$, un point $P \in U(\mathbb{Q})$, et une suite exacte de $U$-schémas en groupes commutatifs lisses connexes

$$1 \to \mu_{\ell,U} \to \mathcal{E} \to \mathcal{E}' \to 1$$

dont la fibre au-dessus de $P$ s'identifie à la suite exacte de Kummer

$$1 \to \mu_{\ell,\mathbb{Q}} \to \mathbb{G}_{m,\mathbb{Q}} \to \mathbb{G}_{m,\mathbb{Q}} \to 1$$

associée à $x \mapsto x^\ell$, et dont la restriction au-dessus de $V = U \setminus P$ est une isogénie de $V$-schémas abéliens de dimension relative 1. En outre toute $\ell$-isogénie de courbes elliptiques sur $\mathbb{C}$ munie d'un isomorphisme de son noyau avec $\mu_\ell$ est donnée par l'évaluation de la suite exacte ci-dessus en un point de $U(\mathbb{C})$. L'invariant $j$ des fibres de $\mathcal{E}' \to U$ hors du point $P$ n'est en particulier pas constant, et prend une valeur transcendante sur $\mathbb{Q}$ en $M \in U(\mathbb{C})$ si et seulement si $M$ n'est pas algébrique sur $\mathbb{Q}$. Notons pour simplifier $Y = \mathcal{E}'$. La suite exacte ci-dessus définit un torseur sur $Y$ sous $\mu_\ell$, donc une classe $\beta \in H^1(Y, \mu_\ell)$. La restriction de cette classe au-dessus du point générique de $Y$ est la classe d'une fonction rationnelle $g \in \mathbb{Q}(Y)^*/\mathbb{Q}(Y)^{*\ell} = H^1(\mathbb{Q}(Y), \mu_\ell)$. L'extension $\mathbb{Q}(Y)(g^{1/\ell})/\mathbb{Q}(Y)$ se spécialise au-dessus du point $P$ en l'extension $\mathbb{Q}(t^{1/\ell})/\mathbb{Q}(t)$, où $\mathbb{G}_{m,\mathbb{Q}} = \mathrm{Spec}\ \mathbb{Q}[t, 1/t]$.

Commençons par étendre la situation ci-dessus de $\mathbb{Q}$ à $\mathbb{C}$. On note $Y_\mathbb{C} = Y \times_\mathbb{Q} \mathbb{C}$ et $U_\mathbb{C} = U \times_\mathbb{Q} \mathbb{C}$. On a la projection $X \times_\mathbb{C} Y_\mathbb{C} \to U_\mathbb{C}$. On considère le produit externe $\alpha \cup \beta \in H^{i+1}(X \times_\mathbb{C} Y_\mathbb{C}, \mu_\ell)$. Il se spécialise au-dessus du point $P \in U(\mathbb{C})$ en une classe dans $H^{i+1}(X \times_\mathbb{C} \mathbb{G}_{m,\mathbb{C}}, \mu_\ell)$. La restriction de cette classe au point générique de $X \times_\mathbb{C} \mathbb{G}_{m,\mathbb{C}}$ est non nulle, car son résidu le long du diviseur défini par $t = 0$ dans $X \times \mathbb{A}^1$ est la classe de $\alpha$ dans $H^i(\mathbb{C}(X), \mathbb{Z}/\ell)$. D'après Gabber [7, Prop. A7], l'ensemble des points $s$ de $U(\mathbb{C})$ tels que la restriction de $\alpha \cup \beta$ au point générique de la fibre géométrique de $X \times_\mathbb{C} Y_\mathbb{C} \to U_\mathbb{C}$ en $s$ est nulle est une union dénombrable de fermés de $U_\mathbb{C}$. On a vu ci-dessus que $P$ n'est pas dans cet ensemble. Cet ensemble est donc une union dénombrable de points de $U(\mathbb{C})$. Ceci établit le point (a).

Supposons maintenant $X = X_0 \times_k \mathbb{C}$, où $k \subset \mathbb{C}$ désigne la clôture algébrique de $\mathbb{Q}$ dans $\mathbb{C}$. La cohomologie étale d'une variété sur un corps algébriquement clos, à coefficients de torsion premiers à la caractéristique, ne change pas par extension de corps de base algébriquement clos [9, VI.4.3]. On dispose donc d'une classe $\alpha_0 \in H^i(X_0, \mathbb{Z}/\ell)$ d'image non nulle dans le groupe $H^i(k(X_0), \mathbb{Z}/\ell)$. D'après Gabber [7, Prop. A7], l'ensemble des points $s \in U_k$ tels que la restriction de $\alpha_0 \cup \beta_k$ au point générique de la fibre géométrique de $X_0 \times_k Y_k \to U_k$ en $s$ est nulle est une union dénombrable de fermés de $U_k$, et donc, puisque $P$ n'est pas dans cet ensemble, une union dénombrable de points de $U(k)$. Pour tout point $M$ de $U(\mathbb{C}) \setminus U(k)$, la restriction de $\alpha_0 \cup \beta_k$ dans $H^i(\mathbb{C}(X \times_{\mathbb{C}} Y_M), \mu_\ell)$ est donc non nulle, ce qui établit (b). □

*Remarque 1.2.* Comme le fait remarquer le rapporteur, un argument général [11, Lemme 2.1] utilisant un isomorphisme (non canonique) entre $\mathbb{C}$ et une clôture algébrique de $\mathbb{C}(U)$, permet aussi de déduire le résultat (b) de (a).

## 2. Cohomologie non ramifiée en degré 3 et conjecture de Hodge entière

**Proposition 2.1.** *Soit $X/\mathbb{C}$ une variété connexe, projective et lisse, telle que* $\mathrm{Br}(X) \neq 0$.

(a) *Il existe une courbe elliptique $E/\mathbb{C}$ telle que* $H^3_{nr}(\mathbb{C}(X \times E), \mathbb{Q}/\mathbb{Z}) \neq 0$.
(b) *Si $X$ peut être définie sur un corps de nombres, pour toute courbe elliptique $E/\mathbb{C}$ d'invariant $j$ transcendant,* $H^3_{nr}(\mathbb{C}(X \times E), \mathbb{Q}/\mathbb{Z}) \neq 0$.
(c) *Si le groupe de Chow des zéro-cycles de la variété complexe $X$ est supporté sur une courbe, alors il existe une courbe elliptique $E/\mathbb{C}$ telle que la conjecture de Hodge entière pour les cycles de codimension 2 sur $X \times E$ soit en défaut.*
(d) *Si le groupe de Chow des zéro-cycles de la variété complexe $X$ est supporté sur une courbe, et $X$ peut être définie sur un corps de nombres, alors pour, toute courbe elliptique $E/\mathbb{C}$ d'invariant $j$ transcendant, la conjecture de Hodge entière pour les cycles de codimension 2 sur $X \times E$ est en défaut.*

*Démonstration.* Supposons $\mathrm{Br}(X) \neq 0$. Soit $\ell$ un nombre premier avec $\mathrm{Br}(X)(\ell) \neq 0$. De la suite de Kummer pour la cohomologie étale sur $X$ et sur le corps des fonctions $\mathbb{C}(X)$, et de l'injectivité bien connue $\mathrm{Br}(X) \hookrightarrow \mathrm{Br}(\mathbb{C}(X))$ [8, II, Cor. 1.10], on conclut qu'il existe $\alpha \in H^2(X, \mu_\ell)$ d'image non nulle dans $H^2(\mathbb{C}(X), \mu_\ell) = \mathrm{Br}(\mathbb{C}(X))[\ell]$. Après choix d'un isomorphisme $\mathbb{Z}/\ell \simeq \mu_\ell$, le théorème 1.1 donne alors les points (a) et (b).

Dans un travail avec C. Voisin, en utilisant des résultats profonds de $K$-théorie algébrique, on a établi le résultat suivant [6, Thm. 1.1, Thm. 3.9]: pour toute variété $W$ projective et lisse sur $\mathbb{C}$ dont le groupe de Chow des zéro-cycles $CH_0(W)$ est supporté sur une surface, ce qui signifie qu'il existe une surface projective lisse $U$ sur $\mathbb{C}$ et un morphisme $U \to W$ tels que l'application induite $CH_0(U) \to CH_0(W)$ soit surjective, on a un isomorphisme de groupes *finis*

$$H^3_{nr}(W, \mathbb{Q}/\mathbb{Z}) \simeq Z^4(W),$$

où $H^3_{nr}(W, \mathbb{Q}/\mathbb{Z})$ est la réunion des groupes $H^3_{nr}(W, \mathbb{Z}/n)$ et où $Z^4(W)$ est le quotient du groupe des cycles de Hodge dans $H^4(W, \mathbb{Z})$ par l'image des classes de cycles algébriques de codimension 2. Si le groupe de Chow des zéro-cycles de $X$ est supporté sur une courbe $C$, alors le groupe de Chow des zéro-cycles de $X \times_{\mathbb{C}} E$ est supporté sur la surface $C \times_{\mathbb{C}} E$. On obtient ainsi (c) et (d). □

Outre les surfaces d'Enriques, de nombreuses variétés dont le groupe de Chow des zéro-cycles est supporté sur une courbe satisfont $\mathrm{Br}(X) \neq 0$.

Rappelons ici que pour toute variété $X/\mathbb{C}$ projective, lisse, connexe, on dispose d'une suite exacte

$$0 \to (\mathbb{Q}/\mathbb{Z})^{b_2-\rho} \to \mathrm{Br}(X) \to H^3_{\mathrm{Betti}}(X, \mathbb{Z})_{tors} \to 0,$$

où $\rho$ est le rang du groupe de Néron-Severi $\mathrm{NS}(X)$ et $b_2$ le second nombre de Betti de $X$ (voir [8, III. (8.7) et (8.9)]), et que l'on a $b_2 - \rho = 0$ si et seulement si $H^2(X, \mathcal{O}_X) = 0$. Bloch [4] a montré que l'hypothèse que le groupe de Chow des zéro-cycles sur $X$ est supporté sur une courbe implique $H^2(X, \mathcal{O}_X) = 0$ et que le groupe $\mathrm{Br}(X)$ est fini, et égal au groupe $H^3_{\mathrm{Betti}}(X, \mathbb{Z})_{tors}$.

Pour $X/\mathbb{C}$ une surface projective, lisse, connexe, de groupe de Néron-Severi $\mathrm{NS}(X)$, notant $\mathrm{Br}(X)^0$ le sous-groupe divisible maximal de $\mathrm{Br}(X)$, on a un isomorphisme naturel [8, III (8.12)]:

$$\mathrm{Br}(X)/\mathrm{Br}(X)^0 \simeq \mathrm{Hom}(\mathrm{NS}(X)_{tors}, \mathbb{Q}/\mathbb{Z}).$$

Dans le cas particulier où $H^2(X, \mathcal{O}_X) = 0$, en particulier si le groupe de Chow des zéro-cycles de la surface $X$ est supporté sur une courbe, on a donc

$$\mathrm{Br}(X) \simeq \mathrm{Hom}(\mathrm{NS}(X)_{tors}, \mathbb{Q}/\mathbb{Z}).$$

Pour les surfaces, c'est une conjecture célèbre de Spencer Bloch que l'hypothèse $H^2(X, \mathcal{O}_X) = 0$ implique que le groupe de Chow des zéro-cycles sur $X$ est supporté sur une courbe. Cette conjecture est connue dans le cas des surfaces non de type général [5], en particulier pour les surfaces d'Enriques, et dans quelques autres cas [12]. De nombreuses surfaces avec $H^i(X, \mathcal{O}_X) = 0$ pour $i = 1, 2$, et $\mathrm{NS}(X)_{tors} \neq 0$ ont été décrites (voir [1, Chap. VII, 11] et [2]).

La proposition 2.1 et les rappels ci-dessus donnent:

**Corollaire 2.2.** *Soit $X$ une surface connexe, projective et lisse sur $\mathbb{C}$ dont le groupe de Néron-Severi* $\mathrm{NS}(X)$ *possède de la torsion, et dont le groupe de Chow des zéro-cycles est supporté sur une courbe, donc qui satisfait $H^2(X, \mathcal{O}_X) = 0$. Il existe une courbe elliptique $E/\mathbb{C}$ telle que la conjecture de Hodge entière pour les cycles de codimension 2 sur $X \times E$ soit en défaut. Si $X$ peut être définie sur un corps de nombres, cette défaillance a lieu pour toute courbe elliptique $E$ d'invariant $j$ transcendant.* □

*Remarque 2.3.* Dans le cas particulier des surfaces d'Enriques, on retrouve donc ainsi [3, Prop. 2.1], dont la démonstration repose, dans le cas $\ell = 2$, sur une construction du même type que celle de [7] rappelée au début du théorème 1.1. La démonstration de [3, Prop. 2.1] pour les surfaces d'Enriques est plus "classique" que celle présentée ici: elle n'utilise pas de résultat de $K$-théorie algébrique. Pour ces surfaces, elle donne quelques autres informations.

*Remarque 2.4.* Dès la dimension 3, il existe des variétés projectives et lisses $X$ sur $\mathbb{C}$, rationnellement connexes, telles que $\mathrm{Br}(X) \neq 0$, comme les exemples d'Artin et Mumford de solides fibrés en coniques sur le plan projectif $\mathbf{P}^2_{\mathbb{C}}$. On peut facilement donner de tels exemples qui sont définis sur un corps de nombres. Pour les variétés rationnellement connexes, le groupe de Chow des zéro-cycles est supporté sur un point. Il est donc facile d'exhiber *des variétés $W = X \times_{\mathbb{C}} E$ de dimension 4 explicites, produits d'une variété rationnellement connexe de dimension 3 et d'une courbe elliptique, pour lesquelles la conjecture de Hodge entière pour les cycles de codimension deux est en défaut*: on prend la variété produit d'un exemple d'Artin-Mumford défini sur un corps de nombres et d'une courbe elliptique d'invariant $j$ transcendant. Notons que Schreieder [10, Cor. 1.6] a récemment construit des variétés rationnellement connexes de dimension 4 pour lesquelles la conjecture de Hodge entière pour les cycles de codimension deux est en défaut. Ces variétés sont des fibrés en coniques (non plats) au-dessus de $\mathbf{P}^3$.

## References


[1] Barth, W., Peters, C., Van de Ven, A.: Compact Complex Surfaces. Springer, Berlin (1984)

[2] Bauer, I., Catanese, F., Grunewald, F., Pignatelli, R.: Quotients of products of curves, new surfaces with $p_g = 0$ and their fundamental groups. Am. J. Math. **134**(4), 993–1049 (2012)

[3] Benoist, O., Ottem, J. Ch.: Failure of the integral Hodge conjecture for threefolds of Kodaira dimension zero. arXiv:1802.01845v1, à paraître dans Commentarii Mathematici Helvetici

[4] Bloch, S.: On an argument of Mumford in the theory of algebraic cycles. In: Journées de Géométrie Algébrique d'Angers, Juillet 1979, Sijthoff & Noordhoff, Alphen aan den Rijn–Germantown, Md., pp. 217–221 (1980)

[5] Bloch, S., Kas, A., Lieberman, D.: Zero cycles on surfaces with $p_g = 0$. Compos. Math. **33**(2), 135–145 (1976)

[6] Colliot-Thélène, J.-L., Voisin, C.: Cohomologie non ramifiée et conjecture de Hodge entière. Duke Math. J. **161**(5), 735–801 (2012)

[7] Gabber, O.: Appendice à l'article Exposant et indice d'algèbres simples centrales. Enseign. Math. (2) **48**(1–2), 127–146 (2002)

[8] Grothendieck, A.: Le groupe de Brauer, I, II, III, dans *Dix exposés sur la cohomologie des schémas*, Masson, Paris, et North-Holland, Amsterdam, 46–66 (I), 67–87 (II), 88–188 (III) (1968)

[9] Milne, J.S.: Étale Cohomology. Princeton University Press, Princeton (1980)

[10] Schreieder, S.: Stably irrational hypersurfaces of small slopes. arXiv:1801.05397v3

[11] Vial, C.: Algebraic cycles and fibrations. Doc. Math. **18**, 1521–1553 (2013)

[12] Voisin, C.: Bloch's conjecture for Catanese and Barlow surfaces. J. Differ. Geom. **97**, 149–175 (2014)


**Publisher's Note** Springer Nature remains neutral with regard to jurisdictional claims in published maps and institutional affiliations.