Ein Amer-Brumer Satz für Nullzyklen vom Grade eins; Anwendung zum Hasseprinzip

J.-L. Colliot-Thélène
CNRS, Mathématiques, Université Paris Sud

Pfister Tagung, Mainz
29. Oktober 2009

k ein Körper, X eine k-Varietät
$X(k)$ Menge der rationalen Punkte
$I(X/k)$= Index von X : grösster gemeinsamer Teiler der $[K : k]$
mit K/k endlich und $X(K) \neq \emptyset$.
$I(X/k) = 1$: X besitzt einen Nullzyklus vom Grade 1.

Für eine Quadrik X/k,

$$I(X/k) = 1 \Longrightarrow X(k) \neq \emptyset$$

(T. A. Springer)

Für eine kubische Fläche : offene Frage
Für eine Fläche, die eine Schaar rationaler Curven besitzen : falsch

Sei $X \subset \mathbb{P}^n_k$ ein Durchschnitt von zwei Quadriken

$$q_1(x_0, \ldots, x_n) = q_2(x_0, \ldots, x_n) = 0.$$

Sei $Z \subset \mathbb{P}^n_{k(t)}$ die Quadrik

$$q_1 + tq_2 = 0.$$

Satz (M. Amer, Mainz 1976; A. Brumer CRAS Paris 1978)

$$X(k) \neq \emptyset \iff Z(k(t)) \neq \emptyset$$

Korollar *Sei* $X \subset \mathbb{P}^n_k$ *ein Durchschnitt von zwei Quadriken*

$$q_1(x_0, \ldots, x_n) = q_2(x_0, \ldots, x_n) = 0.$$

Ist $I(X/k) = 1$, *dann ist* $X(k) \neq \emptyset$.

Es gibt Durchschnitte von drei Quadriken $X \subset \mathbb{P}^n_k$
mit $I(X/k) = 1$ und $X(k) = \emptyset$.

(Brumer 1978, Coray 1980, nach Fragen von Pfister und Cassels)

Seien k ein Körper und $X \subset \mathbb{P}^n_k$ ein vollständiger Durchschnitt von zwei Hyperflächen vom Grade d :

$$f(x_0, \ldots, x_n) = g(x_0, \ldots, x_n) = 0.$$

Sei $Z \subset \mathbb{P}^n_{k(t)}$ die Hyperfläche

$$f + tg = 0.$$

Satz (CT/Levine, 1991, unveröffentlicht)

$$I(X/k) = 1 \iff I(Z/k(t)) = 1.$$

BEWEIS : Elementare Durschschnittstheorie. Lokalisierungsfolge.

Dies kann man verallgemeinern :
Seien k ein Körper, $f_0(x_0, \dots, x_n), \dots, f_r(x_0, \dots, x_n)$ Formen vom Grade $d \geq 1$ mit Koeffizienten in k.
Seien $t_1, \dots, t_r$ unabhängige Variabeln. Sei $F = k(t_1, \dots, t_r)$.
Sei $X \subset \mathbb{P}^n_k$ der Durschschnitt $f_0 = \cdots = f_r = 0$. Nehmen wir an, X sei ein vollständiger Durschschnitt.
Sei $Z \subset \mathbb{P}^n_F$ die Hyperfläche $f_0 + t_1 f_1 + \cdots + t_r f_r = 0$.

Satz (CT/Levine 2009)

$$I(X/k) = 1 \iff I(Z/F) = 1.$$

Anwendung : Hasseprinzip

Sei k ein globaler Körper, entweder ein Zahlkörper oder der Funktionenkörper $\mathbb{F}(C)$ einer Kurve über einem endlichen Körper $\mathbb{F}$
Ω die Menge aller Stellen von k
X eine k-Varietät

Hasseprinzip für rationale Punkte

$$\prod_{v \in \Omega} X(k_v) \neq \emptyset \Longrightarrow X(k) \neq \emptyset$$

Beispiele (k Zahlkörper) :
– Quadriken (Minkowski, Hasse)
– Projektive homogene Räume von zusammenhängenden linearen algebraischen Gruppen (Eichler, Kneser, Harder, ...)
– Glatte projektive Hyperfläche mit vielen Variabeln (Zirkelmethode)
– Fläche $y^2 - az^2 = P(x)$ mit $P(x)$ *irreduzibel* vom Grad 4 (CT/Sansuc/Sw.-D. 1984/1987)

Hasseprinzip für Nullzyklen vom Grade eins

$$I(X_{k_v}/k_v) = 1 \ \forall v \in \Omega \Longrightarrow I(X/k) = 1$$

Beispiel (k Zahlkörper) :
Fläche $y^2 - az^2 = P(x)$ mit $P(x)$ *irreduzibel* (Salberger)

Weder das eine noch das andere Prinzip gilt für eine beliebige glatte projektive Varietät X.
Im Wege steht das Brauer-Maninsche Hindernis, das mittels der Brauergruppe $Br(X)$ definiert ist.
Klassenköpertheorie liefert eine Paarung zwischen den Adelen $X(\mathbb{A}_k) = \prod_{v \in \Omega} X(k_v)$ und der Brauergruppe

$$X(\mathbb{A}_k) \times Br(X) \to \mathbb{Q}/\mathbb{Z}$$

$X(k) \subset X(\mathbb{A}_k)$ lieg im Kern dieser Paarung, also

$$X(k) \subset X(\mathbb{A}_k)^{Br} \subset X(\mathbb{A}_k)$$

Ähnliche notwendige Bedingung für $I(X/k) = 1$:

Existenz einer Familie $\{z_v\}_{v \in \Omega}$ von Lokalen Nullzyklen vom Grade Eins, so daß für alle A in der Brauergruppe $Br(X)$ der Varietät X,

$$\sum_{v \in \Omega} A(z_v) = 0 \in \mathbb{Q}/\mathbb{Z}.$$

$$X(\mathbb{A}_k)^{Br} \neq \emptyset \Longrightarrow X(k) \neq \emptyset \ ?$$

– Gilt für viele Typen von homogenen Räumen von algebraischen Gruppen
– Gilt fur Flächen $y^2 - az^2 = P(x)$ mit $P(x)$ vom Grade 4 CT/Coray/Sansuc 1981 (der Amer-Brumer Satz wird benutzt) und CT/Sansuc/Swinnerton-Dyer 1984-1987
– Offene Frage für glatte kubische Flächen

Gilt aber nicht allgemein

Beispiele (Skorobogatov 1999, Poonen 2008) von Varietäten X mit $X(\mathbb{A}_k)^{Br} \neq \emptyset$ aber $X(k) = \emptyset$.

Offene Frage (CT/Sansuc 1981, Kato/Saito 1986)

$$X(\mathbb{A}_k)^{Br} \neq \emptyset \Longrightarrow I(X) = 1 \ ?$$

Hauptvermutung : *Für eine beliebige projektive glatte Varietät X, das Brauer-Maninsche Hindernis ist das einzige Hindernis für $I(X) = 1$.*

Für k ein Zahlkörper, bekannt für Flächen, welche eine Schaar rationaler Curven besitzen (Salberger 1988)

Fall $k = \mathbb{F}(C)$ und X/k generische Faser von $\mathcal{X}/C/\mathbb{F}$, mit $\mathcal{X}/\mathbb{F}$ glatt und projektiv.

Integrale Tatesche Vermutung für 1-Zyklen auf einer glatten projektiven Varietät $\mathcal{X}/\mathbb{F}$ der dimension d :
Für alle Primzahle $l \neq char(\mathbb{F})$, die Zykelabbildung

$$CH_1(\mathcal{X}) \otimes \mathbb{Z}_l \to H^{2d-2}_{et}(\mathcal{X}, \mathbb{Z}_l(d-1))$$

ist surjektiv. (Übliche Tatesche Vermutung : $\otimes \mathbb{Q}_l$)
Satz (Shuji Saito 1989) : *Die integrale Version der Tateschen Vermutung für 1-Zyklen auf $\mathcal{X}$ impliziert obige Hauptvermutung für X/k.*

Seien $f(x_0, \ldots, x_3), g(x_0, \ldots, x_3)$ zwei Formen vom Grade $d \geq 1$ in 4 Variabeln über $\mathbb{F}$, derart, daß die Gleichung $f + tg = 0$ eine glatte $\mathbb{F}(t)$-Fläche $X \subset \mathbb{P}^3_{\mathbb{F}(t)}$ definiert. Der Funktionenkörper $\mathbb{F}(t)(X)$ is rein transzendant über $\mathbb{F}$.
Bekannterweise gibt es eine glatte projective Varietät $\mathcal{X}/\mathbb{F}$, und einen Morphismus $\mathcal{X} \to C$ mit generischem Faser $X/\mathbb{F}(C)$.
Aus $\mathcal{X}$ $\mathbb{F}$-rational folgt : die Zykelabbildung

$$CH_1(\mathcal{X}) \otimes \mathbb{Z}_l \to H^4_{et}(\mathcal{X}, \mathbb{Z}_l(d-1))$$

ist surjektiv.

Es folgt also den

Satz *Seien* $f(x_0, \dots, x_3), g(x_0, \dots, x_3)$ *zwei Formen vom Grade* $d \geq 1$ *in 4 Variabeln über* $\mathbb{F}$*, ohne gemeinsamen Teiler. Sei* $\Gamma \subset \mathbb{P}^3_{\mathbb{F}}$ *die Kurve* $f = g = 0$*. Es sei weiter angenommen, daß die Gleichung*

$$f + tg = 0$$

eine glatte $\mathbb{F}(t)$*-Fläche* $X \subset \mathbb{P}^3_{\mathbb{F}(t)}$ *definiert.*

Wenn es kein Brauer-Maninsche Hindernis zum Hassesche Prinzip für Nullzyklen vom Grade 1 auf X *gibt, dann hat man*

a) $I(X/\mathbb{F}(t)) = 1$

b) $I(\Gamma/\mathbb{F}) = 1$*.*

a) $\Longrightarrow$ b) : CT-Levine.

Falls die Kurve Γ *absolut irreduzibel* ist, dann liegt der Schluß $I(X/\mathbb{F}(t)) = 1$ nahe. Tatsächlich ist dann $I(\Gamma/\mathbb{F}) = 1$ (Weil), also $I(X/\mathbb{F}(t)) = 1$.

Der Satz wird erst dann sinnvoll, wenn Γ nicht absolut irreduzibel ist.

Satz (CT/Swinnerton-Dyer 2009)

Sei $\mathbb{F}$ *ein endlicher Körper,* $char(\mathbb{F}) \neq 3$. *Seien* $f(x_0, \ldots, x_3), g(x_0, \ldots, x_3)$ *zwei Formen vom Grade* 3 *in* 4 *Variabeln über* $\mathbb{F}$, *ohne gemeinsamen Teiler. Sei* $k = \mathbb{F}(t)$. *Nehmen wir an, die Fläche* X *über* $k = \mathbb{F}(t)$ *mit Gleichung* $f + tg = 0$ *ist glatt. Sei* $\Gamma \subset \mathbb{P}^3_{\mathbb{F}}$ *die Kurve* $f = g = 0$.
Dann sind die folgende Sätze äquivalent.

(i) $X(k) \neq \emptyset$.
(ii) $I(X/k) = 1$.
(iii) $I(\Gamma/\mathbb{F}) = 1$.
(iv) Auf der $\mathbb{F}$*-Kurve* Γ *(vom Grade 9) liegt ein geschlossener Punkt* P *mit* $[\mathbb{F}(P) : \mathbb{F}]$ *prim zu 3.*
(v) Auf der $\mathbb{F}$*-Kurve* Γ *liegt ein geschlossener Punkt* P *mit* $[\mathbb{F}(P) : \mathbb{F}] = 2^m$.

Hauptpunkte :
$X(k) \neq \emptyset \Longrightarrow I(\Gamma/\mathbb{F}) = 1$ (CT-Levine).
(v) $\Longrightarrow X(k) \neq \emptyset$: X ist eine kubische Fläche
$I(\Gamma/\mathbb{F}) = 1 \Longrightarrow$ (v). Hier muß man die verschiedene Möglichkeiten für das Zerfallen von Γ analysieren. Man kann $\mathbb{F}$ duch die maximale multiquadratische Erweiterung F von $\mathbb{F}$ ersetzen.

Fall Γ/F keine absolute irreduzible Komponenten besitzt, dann kann Γ folgendermaßen zerfallen
$9 = 3(1 + 1 + 1)$
$9 = 2(1 + 1 + 1) + (1 + 1 + 1)$
$9 = (3 + 3 + 3)$
$9 = (1 + \cdots + 1)$ (9mal)
$9 = (2 + 2 + 2) + (1 + 1 + 1)$
$9 = (1 + 1 + 1) + (1 + 1 + 1) + (1 + 1 + 1)$

Hier $(a + a + a)$ heißt Summe von drei konjugierten Kurven vom Grade a.

Zusammenfassend :

Satz (CT+Swinnerton-Dyer 2009)

Sei $\mathbb{F}$ *ein endlicher Körper, char*$(\mathbb{F}) \neq 3$. *Seien* $f(x_0, \ldots, x_3), g(x_0, \ldots, x_3)$ *zwei Formen vom Grade* 3 *in 4 Variabeln über* $\mathbb{F}$, *ohne gemeinsamen Teiler. Nehmen wir an, die Fläche* X *über* $k = \mathbb{F}(t)$ *mit Gleichung* $f + tg = 0$ *ist glatt. Dann :*

$$X(\mathbb{A}_k)^{Br} \neq \emptyset \Longrightarrow X(k) \neq \emptyset.$$

In den Fällen
$(2+2+2)+(1+1+1)$
und
$(3+3+3)$
kann $Br(X)/Br(k) \neq 0$ vorkommen.
In den anderen Fällen, entweder $X(k) \neq \emptyset$ oder es gibt eine Stelle v von k mit $X(k_v) = \emptyset$.

Satz (Swinnerton-Dyer im Zahlkörperfall)
Sei $k = \mathbb{F}(C)$ *mit* $\mathbb{F} = \mathbb{F}_q$ *und* q *ungerade,* $q \equiv 2$ *mod. 3.*
Seien $a, b, c, d \in k^*$.
Wir sagen, v *kommt in* $z \in k^*$ *vor, wenn* $v(z) \neq 0 \bmod 3$
Wenn es zwei Stellen v *und* w *gibt, die nur in* a*, resp. in* b *vorkommen, dann gilt das Hasseprinzip für rationale Punkte auf der kubischen Fläche*

$$ax^3 + by^3 + cz^3 + dt^3 = 0.$$

Im Zahlkörperfall : weitere Annahme, Endlichkeit von Tate-Shafarevich Gruppen
Im Funktionenkörperfall : Keine Annahme nötig, bekannter Fall der Tateschen Vermutung