Géométrie arithmétique et motivique,
Luminy, 19-23 septembre 2011

Descente galoisienne sur le groupe de Brauer des variétés

(Travail avec A. N. Skorobogatov)

Jean-Louis Colliot-Thélène

C.N.R.S., Université Paris-Sud, France

(Traductions : voir `http://www.math.u-psud.fr/ colliot/`)

Pour tout schéma Y, on note $\mathrm{Pic}(Y) \simeq H^1_{ét}(Y, \mathbb{G}_m)$ son groupe de Picard et $\mathrm{Br}(Y) = H^2_{ét}(X, \mathbb{G}_m)$ son groupe de Brauer. Ce sont des groupes abéliens.

Soient k un corps, $\overline{k}$ une clôture séparable de k et $G = \mathrm{Gal}(\overline{k}/k)$. Pour X une k-variété, on note $\overline{X} = X \times_k \overline{k}$.

On a une application naturelle

$$\alpha : \mathrm{Br}(X) \to \mathrm{Br}(\overline{X})^G.$$

Le noyau de α, noté $\mathrm{Br}_1(X)$, est parfois appelé le “groupe de Brauer algébrique” de X.
L'image de α, c'est-à-dire le quotient $\mathrm{Br}(X)/\mathrm{Br}_1(X)$, est appelée le “groupe de Brauer transcendant” de X et est notée $\mathrm{Br}_{tr}(X)$.

Théorème principal. *Supposons car(k)=0 et X projective, lisse, géométriquement intègre sur k. Le conoyau de α, c'est-à-dire le quotient $\mathrm{Br}(\overline{X})^G/\mathrm{Br}_{tr}(X)$, est fini.*

Quelques rappels des articles de Grothendieck *Le groupe de Brauer, I,II,III*.

Le groupe de Brauer $\mathrm{Br}(Y)$ d'une k-variété *lisse* Y est un groupe de torsion.
Si k est algébriquement clos, pour tout premier $\ell \neq \mathrm{car}(k)$, la composante ℓ-pprimaire de $\mathrm{Br}(Y)$ est un groupe de cotype fini, extension d'un groupe fini par une somme directe finie de $\mathbb{Q}_\ell/\mathbb{Z}_\ell$.

Pour établir le théorème, il suffit donc d'établir que *l'exposant de Coker*(α) *est fini.*
Un argument de norme montre qu'il suffit de l'établir après extension finie de k. On peut donc supposer $X(k) \neq \emptyset$.

Soit X/k propre et géométriquement intègre.
De la suite spectrale de Hochschild-Serre

$$E_2^{pq} = H^p(G, H^q_{ét}(\overline{X}, \mathbb{G}_m)) \Longrightarrow H^n_{ét}(X, \mathbb{G}_m)$$

on tire une suite exacte à 7 termes bien connue, qui, si $X(k) \neq \emptyset$ ou si $H^2(k, \mathbb{G}_m) = 0$, donne des isomorphismes

$\mathrm{Pic}(X) \simeq \mathrm{Pic}(\overline{X})^G$ (descente galoisienne pour le groupe de Picard)

et

$\mathrm{Br}_1(X)/\mathrm{Br}(k) \simeq H^1(G, \mathrm{Pic}(\overline{X}))$.

Remarque simple :

En regardant plus loin dans la suite spectrale, on obtient un complexe

$$\mathrm{Br}(X) \xrightarrow{\alpha} \mathrm{Br}(\overline{X})^G \to H^2(G, \mathrm{Pic}(\overline{X}))$$

qui est une suite exacte si $X(k) \neq \emptyset$ ou si $H^3(k, \mathbb{G}_m) = 0$ (ce qui est toujours le cas si k est un corps de nombres.)

Cette suite, que nous appellerons dans cet exposé la suite exacte fondamentale, est fonctorielle en la k-variété X.

PREMIÈRE DÉMONSTRATION du théorème principal, via le théorème de Grothendieck-Tsen pour les courbes

L'idée est ici d'étudier la restriction de la suite exacte fondamentale à un ensemble fini bien choisi de courbes tracées sur X.

Soit $C \to X$ un k-morphisme de source une courbe lisse géométriquement intègre. D'après Tsen et Grothendieck, on a $\mathrm{Br}(\overline{C}) = 0$.
L'image de *Coker*(α) dans $H^2(G, \mathrm{Pic}(\overline{X}))$ est donc dans le noyau de la restriction

$$H^2(G, \mathrm{Pic}(\overline{X})) \to H^2(G, \mathrm{Pic}(\overline{C})),$$

et donc aussi dans le noyau de l'application composée

$$H^2(G, \mathrm{Pic}(\overline{X})) \to H^2(G, \mathrm{Pic}(\overline{C})) \to H^2(G, \mathbb{Z}),$$

où la dernière application est induite par le degré $\mathrm{Pic}(\overline{C}) \to \mathbb{Z}$.

Si l'on remplace k par une extension finie, ce qui est loisible, on peut supposer
(a) $X(k) \neq \emptyset$, donc $Coker(\alpha) \hookrightarrow H^2(G, \mathrm{Pic}(\overline{X}))$.
(b) Le groupe de Galois G agit trivialement sur le groupe $NS(\overline{X})/\mathrm{tors} = Num^1(\overline{X})$, donc aussi sur le groupe $Num_1(\overline{X})$ (ces deux groupes sont abéliens de type fini).
(c) Il existe un ensemble fini de k-courbes lisses et géométriquement intègres $C_i, i = 1, \ldots, n$ équipées de k-morphismes $C_i \to X$ dont les images engendrent le groupe $Num_1(\overline{X})$.
(d) (Bertini) Il existe une courbe lisse géométriquement intègre $C_0 \subset X$ section linéaire de X, et d'après Lefschetz une telle courbe satisfait $H^1_{\acute{e}t}(\overline{X}, \mathbb{Q}/\mathbb{Z}) \hookrightarrow H^1_{\acute{e}t}(\overline{C}_0, \mathbb{Q}/\mathbb{Z})$.

Les applications $C_i \to X$ induisent une application surjective et (trivialement) G-scindée $\mathbb{Z}^n \to Num_1(\overline{X})$.
Chacune des deux applications

$$NS(\overline{X}) \to Num^1(\overline{X}) \to Hom(Num_1(\overline{X}), \mathbb{Z})) \to \bigoplus_{i=1}^{n} \mathbb{Z}$$

a son noyau annulé par un entier strictement positif.
Il existe donc un entier $n_0 > 0$ qui envoie le noyau de

$$H^2(G, \mathrm{Pic}(\overline{X})) \to \bigoplus_{i=1}^{n} H^2(G, \mathbb{Z}))$$

dans le noyau de

$$H^2(G, \mathrm{Pic}(\overline{X})) \to H^2(G, NS(\overline{X})).$$

En utilisant la suite exacte

$$0 \to \mathrm{Pic}^0(\overline{X}) \to \mathrm{Pic}(\overline{X}) \to NS(\overline{X}) \to 0$$

on est réduit à montrer que le noyau de

$$H^2(G, \mathrm{Pic}^0(\overline{X})) \to H^2(G, \mathrm{Pic}(\overline{C}_0))$$

est d'exposant fini.
Ceci résulte du fait que

$$\mathrm{Pic}^0(\overline{X}) \to \mathrm{Pic}^0(\overline{C}_0)$$

est injective (Lefschetz) et du théorème de complète réductibilité de Poincaré, qui donne une presque rétraction au niveau des variétés abéliennes.

Cette méthode fournit

une borne pour l'exposant de Coker(α).

Si $X(k) \neq \emptyset$, une borne est le produit des entiers suivants :
(a) L'exposant ν du sous-groupe de torsion de $NS(\overline{X})$.
(b) L'exposant δ du conoyau fini de l'application d'intersection

$$Num^1(\overline{X}) \to Hom(Num_1(\overline{X}), \mathbb{Z}).$$

(c) Le degré d'un "corps de scindage" de $Num_1(\overline{X})$.
(d) L'entier apparaissant dans une presque rétraction de $H^2(k, \mathrm{Pic}^0(\overline{X})) \to H^2(k, \mathrm{Pic}^0(\overline{C}_0))$. On peut ici prendre 1 si $H^2(k, \mathrm{Pic}^0(X)) = 0$, ce qui est le cas si $H^1(X, O_X) = 0$ ou si k est un corps de nombres totalement imaginaire.

SECONDE DÉMONSTRATION du théorème principal, via une comparaison des équivalences numériques et homologiques, et avec un peu d'algèbre homologique

Un cas simple : Surfaces sans torsion dans leur groupe de Néron-Severi

Soit X/k une surface projective, lisse, géométriquement connexe telle que $NS(\overline{X})$ est sans torsion. Cette hypothèse implique $H^3(\overline{X}, \mathbb{Z})_{tors} = 0$, et donc $\mathrm{Br}(\overline{X})$ est divisible.
L'intersection sur $NS(\overline{X})$ donne une suite exacte de modules galoisiens

$$0 \to NS(\overline{X}) \to Hom(NS(\overline{X}), \mathbb{Z}) \to D \to 0.$$

Soit δ l'exposant de D. Pour un $\mathbb{Z}_\ell$–module M, notons $M^0 = Hom_{\mathbb{Z}_\ell}(M, \mathbb{Z}_\ell)$. On a le diagramme commutatif suivant de suites exactes :

$$
\begin{array}{ccccccccc}
 & & 0 & & 0 & & & & \\
 & & \downarrow & & \downarrow & & & & \\
0 & \to & NS(\overline{X}) \otimes \mathbb{Z}_\ell & \to & H^2(\overline{X}, \mathbb{Z}_\ell(1)) & \to & T_\ell(\mathrm{Br}(\overline{X})) & \to & 0 \\
 & & \downarrow & & \downarrow \simeq & & & & \\
0 & \to & [NS(\overline{X}) \otimes \mathbb{Z}_\ell]^0 & \leftarrow & [H^2(\overline{X}, \mathbb{Z}_\ell(1))]^0 & & & & \\
 & & \downarrow & & & & & & \\
 & & D\{\ell\} & & & & & & \\
 & & \downarrow & & & & & & \\
 & & 0 & & & & & &
\end{array}
\tag{1}
$$

où le module de Tate $T_\ell(\mathrm{Br}(\overline{X}))$ of $\mathrm{Br}(\overline{X})$ est un groupe sans torsion.

On en tire une application G-équivariante $\sigma : H^2(\overline{X}, \mathbb{Z}_\ell(1)) \to NS(\overline{X}) \otimes \mathbb{Z}_\ell$ telle que l'application $NS(\overline{X}) \otimes \mathbb{Z}_\ell \to H^2(\overline{X}, \mathbb{Z}_\ell(1))$ est la multiplication par δ.
Pour chaque ℓ, on tensorise la ligne supérieure de (1) par $\mathbb{Q}_\ell/\mathbb{Z}_\ell$ et on prend la somme directe sur les ℓ. Ceci donne une suite exacte

$$0 \to NS(\overline{X}) \otimes \mathbb{Q}/\mathbb{Z} \to H^2(\overline{X}, \mathbb{Q}/\mathbb{Z}(1)) \to \mathrm{Br}(\overline{X}) \to 0$$

puis une 2-extension

$$0 \to NS(\overline{X}) \to NS(\overline{X}) \otimes \mathbb{Q} \to H^2(\overline{X}, \mathbb{Q}/\mathbb{Z}(1)) \to \mathrm{Br}(\overline{X}) \to 0.$$

Par cohomologie galoisienne, cette 2-extension donne naissance à une flèche

$$\beta : \mathrm{Br}(\overline{X})^G \to H^2(G, NS(\overline{X}))$$

qui est annulée par multiplication par δ.
ASSERTION non triviale :

L'application β coïncide avec la composée de l'application $\mathrm{Br}(\overline{X})^G \to H^2(G, \mathrm{Pic}(\overline{X}))$ provenant de la suite spectrale de Hochschild-Serre) avec l'application naturelle $H^2(G, \mathrm{Pic}(\overline{X})) \to H^2(G, NS(\overline{X}))$.

Supposons soit $X(k) \neq \emptyset$ soit $H^3(k, \mathbb{G}_m) = 0$.
On conclut alors que $\delta.Coker(\alpha) \subset H^2(G, \mathrm{Pic}(\overline{X}))$ est dans l'image de $H^2(G, \mathrm{Pic}^0(\overline{X}))$.
Donc *si* $H^1(X, O_X) = 0$ *ou si* k *est un corps de nombres totalement imaginaire, alors*

$$\delta.Coker(\alpha) = 0.$$

Dans la borne obtenue par cette deuxième démonstration n'apparaît plus le degré d'un corps de scindage de $Num_1(\overline{X})$.
Si l'on autorise de la torsion dans $NS(\overline{X})$, et qu'on note ν l'exposant du sous-groupe de torsion de $NS(\overline{X})$, la méthode donne

$$\delta.\nu^2.Coker(\alpha) = 0.$$

Dans la démonstration du théorème ci-dessus pour les surfaces, on utilise le théorème de Matsusaka qu'équivalence numérique et homologique coïncident sur les diviseurs.
Pour étendre cette démonstration en dimension supérieure, on doit utiliser non seulement le résultat de Matsusaka pour les diviseurs mais aussi l'énoncé
équivalence numérique = équivalence homologique
pour les 1-cycles.
Ce résultat est connu, c'est un théorème de Lieberman (1968) pour lequel une preuve algébrique a été donnée par Kleiman (1968).

Pour X/k de dimension d quelconque, il faut aussi tenir compte du fait que l'image de l'application cycle étale

$$CH_1(\overline{X}) \otimes \mathbb{Z}_\ell \to H^{2d-2}_{\acute{e}t}(\overline{X}, \mathbb{Z}_\ell(d-1))$$

n'est pas forcément saturée (exemples de Kollár).

Notons ν l'exposant de $NS(\overline{X})_{tors}$ et γ l'exposant de $H^3(\overline{X},\mathbb{Z})_{tors}$.
(Pour les surfaces, $\gamma = \nu$.)
Si $X(k) \neq \emptyset$ ou si $H^3(k,\mathbb{G}_m) = 0$, une version plus élaborée de l'argument ci-dessus pour les surfaces donne en dimension quelconque : Le sous-groupe $\delta.\nu.\gamma.Coker(\alpha) \subset H^2(G,\mathrm{Pic}(\overline{X}))$ est dans l'image de $H^2(G,\mathrm{Pic}^0(\overline{X}))$.
On en déduit :
Si de plus $H^1(X,O_X) = 0$ ou si k est un corps de nombres totalement imaginaire, alors $\delta.\nu.\gamma.Coker(\alpha) = 0$.

Surfaces $K3$

Pour une telle surface X, on a $H^1(X, O_X) = 0$ et $NS(\overline{X})_{tors} = 0$. Sur un corps de nombres on trouve donc $\delta.Coker(\alpha) = 0$. Un argument formel montre alors que l'ordre de $Coker(\alpha)$ divise $\delta^{b_2-\rho}$.

Pour une surface quartique diagonale dans $\mathbb{P}^3_k$, la deuxième démonstration du théorème principal montre que tout élément d'ordre impair dans $\mathrm{Br}(\overline{X})^G$ est dans l'image de $\mathrm{Br}(X)$.
On montre plus précisément que $Coker(\alpha)$ est un sous-groupe de $(\mathbb{Z}/8)^2$.

Produit de deux courbes

La première démonstration mène au résultat suivant :

Soit $X = C_1 \times C_2$ le produit de deux courbes avec un point rationnel. Si sur $\overline{k}$ il n'y a pas d'homomorphisme non trivial entre les jacobiennes des deux courbes, alors $\mathrm{Br}(X) \xrightarrow{\alpha} \mathrm{Br}(\overline{X})^G$ est surjectif.

Mais : il existe des courbes elliptiques $E/\mathbb{Q}$ telles que pour la surface $X = E \times E$ l'application $\mathrm{Br}(X) \xrightarrow{\alpha} \mathrm{Br}(\overline{X})^G$ n'est pas surjective (Skorobogatov et Zarhin).

T. Szamuely nous a demandé si le théorème principal vaut pour les variétés lisses *ouvertes* :
Si X/k est une variété lisse, géométriquement intègre sur un corps k de car. zéro, le quotient $\mathrm{Br}(\overline{X})^G/Im(\mathrm{Br}(X))$ est-il fini ?

Nous pouvons le montrer si k est de type fini sur $\mathbb{Q}$.
Nous ne connaissons pas la réponse en général.

Motivation pour l'étude de $\mathrm{Br}(X)$
et de $\mathrm{Br}(X)/\mathrm{Br}_1(X) \subset \mathrm{Br}(\overline{X})^G$.

L'ensemble de Brauer-Manin

Soit X/k une variété sur un corps de nombres.
Soit $X(\mathbb{A}_k)$ l'espace des adèles de X avec sa topologie usuelle et soit $X(\mathbb{A}_k)_\bullet$ l'espace analogue on l'a contracté chaque composante connexe à l'infini en un point.
La théorie du corps de classes permet de définir un acouplement

$$X(\mathbb{A}_k)_\bullet \times \mathrm{Br}(X) \to \mathbb{Q}/\mathbb{Z}.$$

Le noyau $X(\mathbb{A}_k)_\bullet^{\mathrm{Br}}$ de cet accouplement est un sous-ensemble fermé de $X(\mathbb{A}_k)_\bullet$, appelé l'ensemble de Brauer-Manin de X.
La fermeture topologique de l'image diagonale de $X(k)$ dans $X(\mathbb{A}_k)$ est $X(\mathbb{A}_k)_\bullet^{\mathrm{Br}}$

(Manin, 1970)

Pour certaines classes de variétés lisses, géométriquement connexes, on essaye de montrer :

L'adhérence de $X(k)$ *dans* $X(\mathbb{A}_k)_\bullet$ *coïncide avec* $X(\mathbb{A}_k)_\bullet^{\mathrm{Br}}$*.*

Un tel énoncé a plusieurs aspects :
Une variante Brauer-Manin du principe de Hasse.
Pour les variétés propres une variante Brauer-Manin de l'approximation faible.
Pour les variétés ouvertes une variante Brauer-Manin de l'approximation forte.

Pour les variétés projectives et lisses, l'énoncé

L'adhérence de $X(k)$ dans $X(\mathbb{A}_k)_\bullet$ coïncide avec $X(\mathbb{A}_k)_\bullet^{\mathrm{Br}}$.

• vaut pour les hypersurfaces dans l'espace projectif lorsque la dimension est très grande par rapport au degré (méthode du cercle);
• vaut pour tout espace homogène d'une variété abélienne dont le groupe de Tate-Shafarevich est fini;
• est très vraisemblable pour les surfaces géométriquement rationnelles (conjecture de CT/Sansuc, 1980; raisons théoriques et calculs numériques).
• ne vaut pas en général (Skorobogatov 2000, Poonen 2010)

C'est une question ouverte pour

• les variétés rationnellement connexes

• les courbes de genre g quelconque (pour $g \geq 2$, études de Scharaschkin, Skorobogatov, Stoll, Bruin, ...)

• les surfaces $K3$, par exemple les quartiques dans $\mathbb{P}^3$; on dispose d'indices théoriques dans ce sens pour certaines $K3$ fibrées en courbes de genre 1, modulo d'autres conjectures (Schinzel, Tate-Shafarevich)
(CT, Skorobogatov, Swinnerton-Dyer; Wittenberg 2007)

Que ce soit pour établir ou infirmer l'énoncé

L'adhérence de $X(k)$ dans $X(\mathbb{A}_k)_\bullet$ coïncide avec $X(\mathbb{A}_k)_\bullet^{\mathrm{Br}}$

pour X dans une classe donnée de variétés, il est important de pouvoir calculer le groupe $\mathrm{Br}(X)$ ou plutôt le quotient $\mathrm{Br}(X)/\mathrm{Br}(k)$.

Pour une variété X projective, lisse, géométriquement intègre sur un corps de nombres k, avec $X(\mathbb{A}_k) \neq \emptyset$, on a une suite exacte

$$0 \to H^1(G, \mathrm{Pic}(\overline{X})) \to \mathrm{Br}(X)/\mathrm{Br}(k) \to \mathrm{Br}_{tr}(X) \to 0,$$

où $\mathrm{Br}_{tr}(X) \subset \mathrm{Br}(\overline{X})^G$ est le groupe

$$\mathrm{Br}(X)/\mathrm{Br}_1(X) = Im[\mathrm{Br}(X) \to \mathrm{Br}(\overline{X})] = Im[\mathrm{Br}(X) \xrightarrow{\alpha} \mathrm{Br}(\overline{X})^G].$$

Le groupe $H^1(G, \mathrm{Pic}(\overline{X}))$ peut être infini.
Mais si $\mathrm{Pic}(\overline{X})$ est libre de type fini, comme c'est le cas pour une variété rationnellement connexe ou une surface $K3$, alors $H^1(G, \mathrm{Pic}(\overline{X}))$ est fini.

On a deux questions fondamentales :
Pour toute variété projective, lisse, géométriquement connexe sur un corps k de type fini sur le corps premier,
(i) Le groupe $\mathrm{Br}_{tr}(X) \subset \mathrm{Br}(\overline{X})^G$ *est-il fini ?*
(ii) Le groupe $\mathrm{Br}(\overline{X})^G$ *est-il fini ?*
La seconde question est très proche de la conjecture de Tate pour les diviseurs.

Le théorème principal de cet exposé implique qu'en caractéristique zéro *les deux questions sont équivalentes*.

Un cas où la réponse aux deux questions est connue.

Théorème (Skorobogatov et Zarhin, 2008)
Pour X une surface $K3$ sur un corps k de type fini sur $\mathbb{Q}$, le quotient $\mathrm{Br}(X)/\mathrm{Br}(k)$ est fini.

Skorobogatov et Zarhin montrent en fait que $\mathrm{Br}(\overline{X})^G$ est fini. La démonstration repose sur des variantes subtiles car entières de la conjecture de Tate pour les variétés abéliennes (Faltings, Zarhin) et sur la méthode de Deligne (variétés de Kuga-Satake) pour réduire certains problèmes sur les surfaces $K3$ à des problèmes sur les variétés abéliennes.

Peut-on tester numériquement l'assertion (question)

L'adhérence de $X(k)$ dans $X(\mathbb{A}_k)_\bullet$ coïncide avec $X(\mathbb{A}_k)_\bullet^{\mathrm{Br}}$.

pour des familles de surfaces $K3$?

Pour de telles surfaces :
Le calcul de $\mathrm{Br}_1(X)/\mathrm{Br}(k) = H^1(k, \mathrm{Pic}(\overline{X}))$ est en principe algorithmique.
Kresch et Tschinkel travaillent pour établir l'existence d'une méthode effective (mais pas a priori efficace) pour calculer les groupes finis $\mathrm{Br}_{tr}(X)$.

Pour les surfaces diagonales dans $\mathbb{P}^3_{\mathbb{Q}}$,

$$a_0X_0^4 + a_1X_1^4 + a_2X_2^4 + a_3X_3^4 = 0,$$

quelques tests sur

> *?? L'adhérence de $X(\mathbb{Q})$ in $X(\mathbb{A}_{\mathbb{Q}})_\bullet$ coïncide avec $X(\mathbb{A}_{\mathbb{Q}})^{\mathrm{Br}}_\bullet$*

ont été faits (Swinnerton-Dyer; Martin Bright; Ieronymou, Skorobogatov, Zarhin).

Il y a l'aspect principe de Hasse.

Si le produit des a_i est un carré, et si par ailleurs les a_i/a_j sont assez généraux (dans $\mathbb{Q}^\times/\mathbb{Q}^{\times 4}$) alors de deux conjectures standard (Bouniakowsky-Dickson-Schinzel et finitude de Ш des courbes elliptiques) on déduit :
$X(\mathbb{A}_\mathbb{Q})_\bullet^{\mathrm{Br}} \neq \emptyset$ implique $X(\mathbb{Q}) \neq \emptyset$ (Swinnerton-Dyer, 2004)

Comme dans CT/Skorobogatov/Swinnerton-Dyer 1998, l'hypothèse que les " a_i/a_j sont assez généraux" implique que $\mathrm{Br}_{tr}(X)$ n'a pas de partie 2-primaire.

M. Bright (2002) a considéré les surfaces quartiques X sur $\mathbb{Q}$ données par une équation diagonale à coefficients entiers

$$a_0X_0^4 + a_1X_1^4 + a_2X_2^4 + a_3X_3^4 = 0.$$

Il a fait des listes de telles surfaces pour lesquelles

- Il y a des points dans tous les complétés
- $X(\mathbb{A}_{\mathbb{Q}})^{\mathrm{Br}_1(X)} \neq \emptyset$.

Il y a certaines surfaces, comme $(7, 15, -2, -6)$, pour lesquelles il n'a pas trouvé de point rationnel de petite hauteur.
On soupçonne que dans ces cas il y a des éléments dans $\mathrm{Br}_{tr}(X)$ qui empêchent l'existence d'un point rationnel.

Théorème (Bright 2010) *Soit H le sous-groupe de $\mathbb{Q}^\times/\mathbb{Q}^{\times 4}$ engendré par $-1, 4$, et les quotients a_i/a_j.*
Supposons :
(1) $X(\mathbb{A}_\mathbb{Q}) \neq \emptyset$.
(2) $H \cap \{2, 3, 5\} = \emptyset$ (Ieronymou, Skorobogatov, Zarhin : ceci implique $\mathrm{Br}(X) = \mathrm{Br}_1(X)$)
(3) H est maximal, i.e. $|H| = 256$.
(4) il existe un premier p qui divise précisément un des coefficients a_i, et ceci à une puissance impaire; de plus, si $p \in \{7, 11, 17, 41\}$, alors la réduction de X modulo p n'est pas équivalente à $x^4 + y^4 + z^4 = 0$.
Alors $\mathrm{Br}X/\mathrm{Br}\mathbb{Q} = \mathbb{Z}/2$, et $X(\mathbb{A}_\mathbb{Q})^{\mathrm{Br}} \neq \emptyset$.

Il y a l'aspect approximation faible.

Supposons $X(k) \neq \emptyset$. Puisque $\mathrm{Br}(X)/\mathrm{Br}(k)$ est fini, il y a un ensemble fini S_0 de places de k tel que $X(\mathbb{A}_k)_\bullet^{\mathrm{Br}}$ se projette sur $\prod_{v \notin S_0} X(k_v)$. Donc si *l'adhérence de* $X(k)$ *dans* $X(\mathbb{A}_k)_\bullet$ *coïncide avec* $X(\mathbb{A}_k)_\bullet^{\mathrm{Br}}$, alors l'approximation faible devrait valoir pour X en dehors de S_0 (donc $X(k)$ serait Zariski dense dans X, une question ouverte bien connue !).

Skorobogatov et CT (2010) ont donné une description précise d'un ensemble S_0 aussi petit que possible. Voici un exemple concret, qui utilise encore les résultats de Ieronymou, Skorobogatov, Zarhin sur $\mathrm{Br}_{tr}(X)$ pour les surfaces quartiques diagonales.

Soit X une surface quartique diagonale sur $\mathbb{Q}$ donnée par

$$a_0X_0^4 + a_1X_1^4 + a_2X_2^4 + a_3X_3^4 = 0,$$

avec les $a_i \in \mathbb{Z}$.
Soit S_0 l'ensemble formé de 2 et des premiers divisant l'un des a_i.
Soit Z l'image de la projection

$$X(\mathbb{A}_{\mathbb{Q}})^{\mathrm{Br}} \to X(\mathbb{R}) \times \prod_{p \in S_0} X(\mathbb{Q}_p).$$

Alors $X(\mathbb{A}_{\mathbb{Q}})^{\mathrm{Br}} = Z \times \prod_{p \notin S_0} X(\mathbb{Q}_p)$.
Si $X(\mathbb{Q}) \neq \emptyset$ on "devrait" avoir approximation faible en dehors de S_0. A tester !