CH_0-TRIVIALITÉ UNIVERSELLE D'HYPERSURFACES CUBIQUES PRESQUE DIAGONALES

par

J.-L. Colliot-Thélène

Résumé. — Toute hypersurface cubique lisse complexe de dimension au moins 2 dont l'équation est donnée par l'annulation d'une somme de formes cubiques à variables séparées, chaque forme impliquant au plus trois variables, est universellement CH_0-triviale.

Abstract. — If a smooth cubic hypersurface of dimension at least 2 is defined by the vanishing of a sum of cubic forms in independent variables and each of these forms involves at most 3 variables, then the cubic hypersurface is universally CH_0-trivial : there is an integral Chow decomposition of the diagonal.

AMS classification : 14M20, 14E08

Introduction

Pour X une variété propre sur un corps on note $CH_0(X)$ le groupe de Chow des zéro-cycles de X modulo l'équivalence rationnelle et on note $A_0(X) \subset CH_0(X)$ le sous-groupe des classes de zéro-cycles de degré zéro.

On dit [**1, 2**] qu'une $\mathbb{C}$-variété projective et lisse X est universellement CH_0-triviale si, pour tout corps F contenant $\mathbb{C}$ (et l'on ne considérera désormais que de tels corps), l'application $\deg_F : CH_0(X_F) \to \mathbb{Z}$ est un isomorphisme, soit encore $A_0(X_F) = 0$.

Si X est rationnelle, ou stablement rationnelle, ou rétracte rationnelle, alors X est universellement CH_0-triviale [**2**, Lemme 1.5]. Ceci a été utilisé dans divers travaux récents pour infirmer la rationalité stable (voir le rapport [**7**]).

La question de la rationalité (stable) des hypersurfaces cubiques lisses $X \subset \mathbf{P}^n_{\mathbb{C}}$ ($n \geq 3$) a fait et continue à faire l'objet de nombreux travaux. Pour tout $n \geq 3$ impair, on connaît depuis longtemps des familles de telles hypersurfaces dans $\mathbf{P}^n_{\mathbb{C}}$ qui sont rationnelles. Certaines sont classiques, d'autres, dans $\mathbf{P}^5_{\mathbb{C}}$, ont été obtenues par B. Hassett [**3**]. Pour $n \geq 4$ pair, on ne connaît aucune hypersurface cubique lisse dans $\mathbf{P}^n_{\mathbb{C}}$ qui soit rationnelle, ou même seulement rétracte rationnelle. On doute que toutes soient (stablement) rationnelles.

On dit qu'une variété irréductible X sur $\mathbb{C}$ de dimension m est unirationnelle de degré d s'il existe une application rationnelle, dominante, de degré d, de $\mathbf{P}^m_{\mathbb{C}}$ vers X. On sait que toute hypersurface cubique lisse $X \subset \mathbf{P}^n_{\mathbb{C}}$ $(n \geq 3)$ est unirationnelle de degré 2. Faute d'établir la rationalité d'une telle hypersurface X, on s'intéresse à la question de l'unirationalité de degré impair de X, qui entraîne que X est universellement CH_0-triviale. Ceci a été établi pour certaines familles d'hypersurfaces cubiques dans $\mathbf{P}^5_{\mathbb{C}}$ [**6**, §7] et [**5**].

C. Voisin [**9**] a récemment étudié la question de la CH_0-trivialité des hypersurfaces cubiques. Pour X de dimension 3, elle a donné un critère [**9**, Cor. 4.4] en termes de la classe minimale sur la jacobienne intermédiaire. Cela lui permet [**9**, Thm. 4.5] de montrer l'existence de telles hypersurfaces $X \subset \mathbf{P}^4_{\mathbb{C}}$, dont l'hypersurface de Fermat, qui sont universellement CH_0-triviales. Par alleurs, elle établit [**9**, Thm. 5.6] la CH_0-trivialité pour beaucoup d'hypersurfaces cubiques lisses $X \subset \mathbf{P}^5_{\mathbb{C}}$ qui sont spéciales au sens de Hassett [**4**].

Dans cet article, je montre de façon élémentaire : *Pour tout entier $n \geq 4$, toute hypersurface cubique X lisse dans $\mathbf{P}^n_{\mathbb{C}}$ dont l'équation s'écrit $\sum_i \Phi_i$, où les Φ_i sont des formes homogènes à variables séparées et chacune a au plus trois variables, est universellement CH_0-triviale.*

Il existe donc des hypersurfaces cubiques lisses de toute dimension ≥ 2 qui sont universellement CH_0-triviales, ce qui ne semblait pas connu pour X de dimension impaire au moins égale à 5.

Je remercie Claire Voisin pour diverses suggestions.

1. Rappels

Le lemme suivant est un cas facile de [**2**, Prop. 1.8], dont il résulte par considération de la projection $X \times_{\mathbb{C}} Y \to Y$.

Lemme 1.1. — *Soient X et Y deux variétés connexes projectives et lisses sur $\mathbb{C}$. Si X est universellement CH_0-triviale, alors, pour tout corps F, la projection $CH_0(X_F \times_F Y_F) \to CH_0(Y_F)$ est un isomorphisme, et, pour tout choix d'un point $P \in X(\mathbb{C})$, le morphisme $Y \to X \times Y$ donné par $M \mapsto (P, M)$ induit un isomorphisme $CH_0(Y_F) \to CH_0(X_F \times_F Y_F)$.*

Proposition 1.2. — *Soient $n \geq 2$ et $m \geq 2$ des entiers et $f(x_1, \ldots, x_n)$ et $g(y_1, \ldots, y_m)$ des formes homogènes de même degré d, à coefficients dans un* *corps k de caractéristique première à d, dont l'annulation définit des hypersurfaces lisses. Soit $X_f \subset \mathbf{P}^n_k$, resp. $X_g \subset \mathbf{P}^m_k$, l'hypersurface lisse définie par $f(x_1, \dots, x_n) + x_0^d = 0$, resp. par $g(y_1, \dots, y_m) + y_0^d = 0$. L'application rationnelle de $\mathbf{P}^n_k \times_k \mathbf{P}^m_k$ vers $\mathbf{P}^{n+m-1}_k$ envoyant le point de coordonnées bihomogènes $(x_0, \dots, x_n; y_0, \dots, y_m)$ sur le point de coordonnées homogènes $(x_1/x_0, \dots, x_n/x_0, y_1/y_0, \dots, y_m/y_0)$ induit une application rationnelle dominante de degré d de $X_f \times X_g$ sur l'hypersurface lisse dans $\mathbf{P}^{n+m-1}_k$ définie par l'équation*

$$f(z_1, \dots, z_n) - g(z_{n+1}, \dots, z_{n+m}) = 0.$$

Ce fait a été utilisé par Shioda et Katsura [**8**] dans l'étude des conjectures de Hodge et de Tate pour les hypersurfaces diagonales.

Proposition 1.3. — *Soit $X \subset \mathbf{P}^n_{\mathbb{C}}$, $n \geq 3$, une hypersurface cubique lisse.*
(i) X est unirationnelle de degré 2.
(ii) Pour tout corps F, on a $2A_0(X_F) = 0$.

C'est bien connu. Pour (i), voir [**1**, Thm. 2.2]. Pour (ii), voir [**1**, Cor. 2.3].

2. Hypersurfaces cubiques presque diagonales

Proposition 2.1. — *Soit $Y \subset \mathbf{P}^n_{\mathbb{C}}$, $n \geq 3$, une hypersurface cubique lisse d'équation $f(x_0, \dots, x_{n-1}) + x_n^3 = 0$. Supposons que Y est unirationnelle de degré d. Alors toute hypersurface cubique lisse $X \subset \mathbf{P}^{n+2}_{\mathbb{C}}$ d'équation*

$$f(x_0, \dots, x_{n-1}) - h(x_n, x_{n+1}, x_{n+2}) = 0$$

est unirationnelle de degré $3d$.

Démonstration. — Comme la surface cubique lisse de $\mathbf{P}^3_{\mathbb{C}}$ d'équation $h(y_0, y_1, y_2) + y_4^3 = 0$ est rationnelle, l'énoncé résulte de la proposition 1.2. □

Convenons qu'une forme non singulière en s variables est de type $(a_1, \dots, a_r)$ si elle est somme de r formes Φ_i à variables séparées, que a_i est le nombre de variables de Φ_i, et $s = \sum_i a_i$.

Théorème 2.2. — *Soit $m \geq 1$.*
(i) Toute hypersurface cubique lisse X dans $\mathbf{P}^{6m-1}_{\mathbb{C}}$ de type $(3, \dots, 3)$ est unirationnelle de degré une puissance de 3.
(ii) Toute hypersurface cubique lisse X dans $\mathbf{P}^{6m+1}_{\mathbb{C}}$ de type $(3, \dots, 3, 2)$ est unirationnelle de degré une puissance de 3.
(iii) Toute hypersurface cubique lisse X dans $\mathbf{P}^{6m+3}_{\mathbb{C}}$ de type $(3, \dots, 3, 1)$ est unirationnelle de degré une puissance de 3.
(iv) Dans chacun de ces cas, on a $A_0(X_F) = 0$ pour tout corps F.

Démonstration. — (i), (ii) et (iii) : C'est une conséquence combinatoire de la proposition 2.1. L'hypersurface de type $(3,1)$ est rationnelle. De $(3,1)$ et $(3,1)$ on obtient $(3,3)$. On a donc $(3,2,1)$. De $(3,2,1)$ et $(3,1)$ on obtient $(3,3,2)$. On a donc $(3,3,1,1)$. De $(3,3,1,1)$ et $(3,1)$ on obtient $(3,3,3,1)$. Puis $(3,3,3,3)$, etc.

(iv) Compte tenu de la proposition 1.3, le pgcd des degrés d'unirationalité des hypersurfaces X dans (i), (ii) et (iii) est égal à 1. Ceci implique $A_0(X_F)=0$ pour tout corps F.

□

Remarque 2.3. — On confrontera les théorèmes 2.2 et 2.8 avec le fait classique que toute hypersurface cubique lisse $X \subset \mathbf{P}^{2n-1}_{\mathbb{C}}$ de type $(2,\dots,2)$ i.e. d'équation $\sum_{i=1}^{n} f_i(u_i,v_i)=0$, est rationnelle, car elle contient deux espaces linéaires $\mathbf{P}^{n-1}_{\mathbb{C}}$ sans point commun.

Remarque 2.4. — Le théorème 2.2 s'applique en particulier aux hypersurfaces cubiques lisses de dimension 4 données dans $\mathbf{P}^5_{\mathbb{C}}$ par une équation

$$f(x_0,x_1,x_2)+g(x_3,x_4,x_5)=0.$$

Suivant une suggestion de C. Voisin, montrons que toute telle hypersurface est en fait rationnelle.

Soit $S \subset \mathbf{P}^3_{\mathbb{C}}$ la surface cubique lisse d'équation

$$f(x_0,x_1,x_2)-t^3=0$$

et $T \subset \mathbf{P}^3_{\mathbb{C}}$ la surface cubique lisse d'équation

$$g(x_3,x_4,x_5)-t^3=0.$$

Le plan $t=0$ découpe une cubique lisse $C \subset S$, et de même $D \subset T$. Chacune des 27 droites de S peut être décrite par un morphisme de $\mathbf{P}^1_{\mathbb{C}}$ vers S donné par un système de formes linéaires $(a(u,t),b(u,t),c(u,t),t)$. Les 27 droites de S viennent ainsi par groupes de trois droites coplanaires ayant même point d'intersection avec $t=0$, qui est un point de Eckardt de la surface cubique S. Ceci détermine ainsi 9 points de la cubique C. De même chacune des 27 droites de T peut être décrite par un morphisme de $\mathbf{P}^1_{\mathbb{C}}$ vers T donné par un système de formes linéaires $(d(v,t),e(v,t),h(v,t),t)$. Le produit d'une droite l de S et d'une droite m de T s'envoie par l'application rationnelle de $S\times T$ vers X de la proposition 1.2 sur un 2-plan $\Pi_{l,m} \subset X \subset \mathbf{P}^5_{\mathbb{C}}$ donné par le morphisme de $\mathbf{P}^2_{\mathbb{C}}$ vers $\mathbf{P}^5_{\mathbb{C}}$ défini par

$$(a(u,t),b(u,t),c(u,t),d(v,t),e(v,t),h(v,t)).$$

Fixons les droites $l \subset S$ et $m \subset T$. Soit $l_1 \subset S$ une droite qui ne rencontre pas l. Soit $m_1 \subset T$ une droite qui rencontre m en un point non situé sur $t=0$. On vérifie alors que les deux plans $\Pi_{l,m} \subset X \subset \mathbf{P}^5_{\mathbb{C}}$ et $\Pi_{l_1,m_1} \subset X \subset \mathbf{P}^5_{\mathbb{C}}$

ne se rencontrent pas. Ceci implique que l'hypersurface cubique $X \subset \mathbf{P}^5_{\mathbb{C}}$ *est rationnelle.*

Établissons un énoncé d'intérêt général.

Proposition 2.5. — *Soit $X/\mathbb{C}$ une variété projective et lisse telle que $A_0(X) = 0$. S'il existe une courbe Γ projective, lisse, connexe et un morphisme $\Gamma \to X$ tels que, pour tout corps F, l'application induite $CH_0(\Gamma_F) \to CH_0(X_F)$ soit surjective, alors, pour tout corps F, l'application $\deg_F : CH_0(X_F) \to \mathbb{Z}$ est un isomorphisme, en d'autres termes X est universellement CH_0-triviale.*

Démonstration. — Soit J la jacobienne de Γ. Pour tout corps F, on a $A_0(\Gamma_F) = J(F)$. Soit $K = \mathbb{C}(X)$ le corps des fonctions de X. L'hypothèse $A_0(X) = 0$ implique que la variété d'Albanese de X est triviale, comme on peut voir de diverses façons. Par exemple, la combinaison de [**1**, Lemma 1.7] et des résultats rassemblés dans [**1**, Prop. 1.8] donne $H^1(X, \mathcal{O}_X) = 0$. Un point de $J(\mathbb{C}(X))$ définit une application rationnelle de X dans J, donc un morphisme de X dans J car une application rationnelle d'une variété lisse dans une variété abélienne est partout définie. Mais comme la variété d'Albanese de X est triviale, tout tel morphisme est constant. On a donc $J(\mathbb{C}) = J(\mathbb{C}(X))$. Ainsi l'image de $A_0(\Gamma_K)$ dans $A_0(X_K)$ est dans l'image de l'application composée

$$J(\mathbb{C}) = A_0(\Gamma) \to A_0(X) \to A_0(X_K),$$

et donc est nulle car $A_0(X) = 0$. Par hypothèse, l'application $A_0(\Gamma_K) \to A_0(X_K)$ est surjective. On a donc $A_0(X_{\mathbb{C}(X)}) = A_0(X_K) = 0$. Ainsi ([**1**, Lemma 1.3]) la diagonale se décompose dans $X \times X$ et, pour tout corps F, on a $A_0(X_F) = 0$. □

Remarque 2.6. — Soit X une $\mathbb{C}$-variété projective et lisse, géométriquement connexe. Soit $\delta(X)$ le plus petit entier $\delta \leq \dim(X)$ pour lequel il existe une $\mathbb{C}$-variété projective lisse connexe Y de dimension δ et un morphisme $\phi : Y \to X$ tels que, pour tout corps F, l'application $\phi_{F,*} : CH_0(Y_F) \to CH_0(X_F)$ soit surjective. Pour X hypersurface cubique lisse de dimension ≥ 3 *très générale*, C. Voisin [**9**, Thm. 5.3] montre que $\delta(X) < \dim(X)$ implique $\delta(X) = 0$. La proposition 2.5 peut se reformuler ainsi : *Pour toute variété X projective et lisse telle que $A_0(X) = 0$, $\delta(X) \leq 1$ implique $\delta(X) = 0$.*

Proposition 2.7. — *Soit $Y \subset \mathbf{P}^n_{\mathbb{C}}$ avec $n \geq 3$ une hypersurface cubique lisse d'équation $f(x_0, \ldots, x_{n-1}) + x_n^3 = 0$. Supposons que Y est universellement CH_0-triviale. Alors :*

(i) Toute hypersurface cubique lisse $X \subset \mathbf{P}^{n+1}_{\mathbb{C}}$ d'équation

$$f(x_0, \ldots, x_{n-1}) - g(x_n, x_{n+1}) = 0$$

dans $\mathbf{P}^{n+1}_{\mathbb{C}}$ *est universellement* CH_0*-triviale.*

(ii) Toute hypersurface cubique lisse X *d'équation*

$$f(x_0, \dots, x_{n-1}) - h(x_n, x_{n+1}, x_{n+2}) = 0$$

dans $\mathbf{P}^{n+2}_{\mathbb{C}}$ *est universellement* CH_0*-triviale.*

Démonstration. — (i) Soit $\Gamma \subset \mathbf{P}^2_{\mathbb{C}}$ la courbe d'équation $g(u,v) + w^3 = 0$. La proposition 1.2 fournit une application rationnelle dominante, de degré 3, de $Y \times \Gamma$ vers X. Il existe une variété W projective et lisse, un morphisme birationnel $W \to Y \times \Gamma$ induisant un morphisme $f : W \to X$ dominant génériquement fini de degré 3. Il existe un point $P \in Y(\mathbb{C})$ tel que le morphisme $\Gamma \to Y \times \Gamma$ donné par $M \mapsto (P, M)$ se relève en un morphisme $\Gamma \to W$. Soit F un corps contenant $\mathbb{C}$. Considérons les applications induites sur les groupes de Chow des zéro-cycles au-dessus de F :

$$CH_0(\Gamma_F) \to CH_0(W_F) \to CH_0(Y_F \times_F \Gamma_F).$$

La seconde application est un isomorphisme par invariance birationnelle du groupe de Chow des zéro-cycles sur les variétés projectives et lisses. L'application composée est un isomorphisme par application du lemme 1.1. Ainsi l'application $CH_0(\Gamma_F) \to CH_0(W_F)$ est un isomorphisme. Comme le morphisme $W \to X$ est génériquement fini de degré 3, le sous-groupe $3A_0(X_F) \subset A_0(X_F)$ est dans l'image de $A_0(W_F)$, et donc dans l'image de $A_0(\Gamma_F) \to A_0(X_F)$ via l'application composée $\Gamma \to W \to X$. D'après la proposition 1.3, on a $2A_0(X_F) = 0$. Ainsi le groupe $A_0(X_F)$ est dans l'image de $A_0(\Gamma_F)$. La proposition 2.5 donne alors $A_0(X_F) = 0$.

(ii) La démonstration est plus simple. La courbe Γ est remplacée par la surface cubique lisse S d'équation $g(u,v,t) + w^3 = 0$, qui est une variété rationnelle, et donc satisfait $A_0(S_F) = 0$ pour tout corps F. □

Théorème 2.8. — *Toute hypersurface cubique lisse* $X \subset \mathbf{P}^n_{\mathbb{C}}$ *de dimension au moins 2 dont l'équation est donnée par une forme* $\sum_i \Phi_i$*, où les* Φ_i *sont à variables séparées et chacune a au plus 3 variables, est universellement* CH_0*-triviale.*

Démonstration. — Toute forme de type $(1,1,1,1)$ définit une surface cubique lisse, donc rationnelle, donc universellement CH_0-triviale. En appliquant de façon répétée le théorème 2.7(i), on obtient que toute forme non singulière diagonale, i.e. de type $(1, \dots, 1)$ en au moins 4 variables, définit une hypersurface lisse universellement CH_0-triviale. En appliquant le théorème 2.7 de façon répétée, on peut ensuite remplacer chacun des 1 dans $(1, \dots, 1)$ par 2 ou par 3. □

Remarque 2.9. — C'est une question ouverte s'il existe une hypersurface cubique lisse $X \subset \mathbf{P}^4_{\mathbb{C}}$ avec une application rationnelle $\mathbf{P}^3_{\mathbb{C}} \cdots \to X$ de degré impair. La démonstration de la proposition 2.7(i), via la proposition 2.5, mène à la question a priori plus facile : Pour $X \subset \mathbf{P}^4_{\mathbb{C}}$ hypersurface cubique lisse quelconque, existe-t-il une application rationnelle de degré impair $\Gamma \times_{\mathbb{C}} \mathbf{P}^2 \cdots \to X$, avec Γ courbe convenable ?

Références

[1] A. Auel, J.-L. Colliot-Thélène et R. Parimala, Universal unramified cohomology of cubic fourfolds containing a plane, à paraître dans *Brauer groups and obstruction problems : moduli spaces and arithmetic* (Palo Alto, 2013), A. Auel, B. Hassett, T. Várilly-Alvarado, and B. Viray, eds., Progress in Mathematics, Birkhäuser.

[2] J.-L. Colliot-Thélène et A. Pirutka, Hypersurfaces quartiques de dimension 3 : non rationalité stable, Ann. Sci. École Norm. Sup. (2) 49 (2016) 373–399.

[3] B. Hassett, Some rational cubic fourfolds, J. Algebraic Geom. **8** (1999), no. 1, 103–114.

[4] B. Hassett, Special cubic fourfolds, Compositio Math. **120** (2000), no. 1, 1–23.

[5] B. Hassett, Cubic fourfolds, $K3$-surfaces and rationality questions, lecture notes for a 2015 CIME-CIRM summer school, https ://arxiv.org/abs/1601.05501v2

[6] B. Hassett et Yu. Tschinkel, Rational curves on holomorphic symplectic fourfolds, Geometric and Functional Analysis **11** (2001), no. 6, 1201–1228.

[7] A. Pirutka, Varieties that are not stably rational, zero-cycles and unramified cohomology, Proceedings of the 2015 Utah AMS Algebraic Geometry Conference.

[8] T. Shioda et T. Katsura, On Fermat varieties. Tôhoku Math. J. (2) 31 (1979), no. 1, 97–115.

[9] C. Voisin, On the universal CH_0-group of cubic hypersurfaces, à paraître dans JEMS. http ://arxiv.org/abs/1407.7261v2

---

soumis le 8 août 2016 ; version révisée acceptée le 12 novembre 2016, à paraître dans Algebraic Geometry

J.-L. Colliot-Thélène, Laboratoire de Mathématiques d'Orsay, Univ. Paris-Sud, CNRS, Université Paris-Saclay, 91405 Orsay, France • *E-mail :* `jlct@math.u-psud.fr`