Zéro-cycles sur les surfaces de del Pezzo (Variations sur un thème de Daniel Coray)

Séminaire Variétés Rationnelles, Paris
5 Juin 2020

Jean-Louis Colliot-Thélène
(CNRS et Université Paris-Sud $\subset$ Paris-Saclay)

Une version améliorée du texte commencé le 15 avril et mis sur arXiv le 14 mai est disponible sur ma page personnelle.

“Les gens sérieux n’envoient pas un manuscrit écrit en deux mois, à peine relu. Les textes nés pendant ce temps libre du confinement arriveront en fin d’année.”
Parole d’éditrice confrontée au flot des textes issus du confinement, Le Monde, 4 juin 2020.

Nous connaissons tous le théorème de T. A. Springer :
Si une forme quadratique $q(x_0, \ldots, x_n)$ sur un corps k a un zéro non trivial sur une extension finie de corps K/k de degré impair, alors elle a un zéro non trivial.
Et nous savons le démontrer : on peut supposer la forme anisotrope. On se ramène à $K = k[t]/P(t)$. Une solution dans K donne une équation

$$q(R_0(t), \ldots, R_n(t)) = P(t)Q(t)$$

avec $R_i(t)$ et $Q(t)$ dans $k[t]$ et $deg(R_i) < deg(P)$. Alors $deg(Q) < deg(P)$, et on considère un facteur irréductible de Q de degré impair.

Un argument élémentaire du même acabit montre :

Soient $n \geq 1$ et $Q(x_0, \ldots, x_n)$ une forme quadratique non dégénérée sur le corps k. Soit $P(t) \in k[t]$ un polynôme pair non nul de degré $2r$.
Supposons que l'équation

$$P(t) - Q(x_0, \ldots, x_n) = 0 \qquad (*)$$

a une solution dans une extension de degré impair de k.
Alors :
– soit le coefficient dominant de P est représenté par la forme quadratique Q (ce qui correspond à un point rationnel à l'infini),
– soit l'équation (*) admet une solution dans une extension de degré impair $d \leq r$.

Rappelons aussi l'énoncé suivant
(Amer 1976, Brumer 1978 ; Leep)
Soient $\Phi(x_0, \ldots, x_n)$ et $\Psi(x_0, \ldots, x_n)$ deux formes quadratiques à coefficients dans le corps k.
Si le système

$$\Phi(x_0, \ldots, x_n) = 0 = \Psi(x_0, \ldots, x_n)$$

a une solution non triviale dans une extension de degré impair de k, alors il a une solution dans k.

De façon générale, on aimerait donner des classes de variétés algébriques pour lesquelles l'existence d'un zéro-cycle de degré 1 entraîne celle d'un point rationnel.

C'est une question ouverte pour les espaces homogènes principaux de groupes algébriques réductifs connexes.

C'est une question ouverte pour les hypersurfaces cubiques (question de Cassels et Swinnerton-Dyer).

ACTA ARITHMETICA
XXX (1976)

Algebraic points on cubic hypersurfaces

by

D. F. CORAY* (Cambridge, Mass.)

Introduction. The following conjecture was apparently first formulated by Cassels and Swinnerton-Dyer (in the case $n = 3$), and it is closely connected with some of the problems mentioned by B. Segre in [15], p. 2:

CONJECTURE (CS). *Let $f(x_0, \ldots, x_n)$ be a cubic form with coefficients in a field k. Suppose f has a non-trivial solution in an algebraic extension K/k, of degree d prime to 3. Then f also has a non-trivial solution in the ground field k.*

Of course the crucial condition in this statement is that d should be prime to 3. The case $n \leqslant 2$ was already known to Henri Poincaré [11]; his proof will be given in §2, since the geometrical ideas it involves are fundamental in the study of the case $n = 3$ and will be used throughout this paper. We begin with a few rather dry lemmas on the rationality of cycles on an algebraic variety (§1), which are necessary if we want to proceed on firm ground when using algebraic geometry over an arbitrary field. The use of these lemmas is exemplified in §2, which therefore gives not only Poincaré's proof, but also a few other applications of the same type of argument. In §3 we discuss some of the first attempts made at proving the conjecture when $n = 3$, including a very interesting descent argument due to Cassels (unpublished). This result implies in particular that (CS) holds when $n = 3$ and k is a local field. But the argument fails when the characteristic of the residue class field is equal to 2.

At this point, the exposition breaks into two parts: in §§4 and 5, we use a different method to prove the conjecture in full generality over any local field (i.e. for all n and without any restriction on the characteristic). This is done by purely arithmetic means, and the reader who is more interested in the geometrical aspect of the problem may proceed

* This paper forms the substance of a dissertation presented to the University of Cambridge [3]. I wish to express my gratitude to the Research Committee of the University of Geneva and to the Société Académique (Turettini Fund) for financial support.

Théorème A (Coray, thèse Cambridge UK 1974)
Soit $X \subset \mathbb{P}^3_k$ *une surface cubique lisse. Si* X *possède un point fermé de degré premier à 3, alors* X *possède un point fermé de degré 1, 4 ou 10.*

La démonstration de Coray (décrite ci-après) utilise la construction de courbes de petit genre sur la surface. On ne sait pas a priori si les courbes trouvées sont lisses et connexes, ce qui amène à la considération un peu ennuyeuse de cas dégénérés. Je vais expliquer plus loin comment on peut shunter le problème, et utiliser la méthode pour donner d'autres résultats.

Zéro-cycle sur une k-variété : combinaison linéaire finie à coefficients entiers de points fermés $\sum_P n_P P$

Degré du zéro-cycle : $\sum_P n_P[k(P) : k] \in \mathbb{Z}$

Équivalence rationnelle sur le groupe $Z_0(X)$ des zéro-cycles : on quotiente par les zéro-cycles de la forme $p_*(div_C(f))$ pour $p : C \to X$ morphisme propre depuis une k-courbe normale intègre C et $f \in k(C)^*$ fonction rationnelle.

Courbes

Riemann-Roch sur une courbe Γ projective, lisse, géom. connexe de genre g : tout zéro-cycle de degré au moins égal à g sur Γ est rationnellement équivalent à un zéro-cycle effectif.

Courbes sur les surfaces

Soit X une k-surface projective, lisse, géométriquement connexe. Soit K la classe du diviseur canonique. On dispose de la théorie de l'intersection sur X. Soit $D \subset X$ un diviseur effectif. On définit

$$p_a(D) := (D.(D+K))/2 + 1.$$

Si $D \subset X$ est une courbe projective, lisse, géom. connexe de genre g, alors $p_a(D) = g$.

Surfaces

Soit X une k-surface projective, lisse, géométriquement connexe.
Soit L (la classe d') un faisceau inversible dans $\mathrm{Pic}(X)$.
$\chi(X,L) := h^0(X,L) - h^1(X,L) + h^2(X,L)$
Riemann-Roch :

$$\chi(X,L) = (L.(L-K))/2 + \chi(X,O_X).$$

$h^i(X,L) = h^{2-i}(X,K-L)$ (Serre)
Si $car(k) = 0$ et L est ample $h^1(X,-L) = 0$ (Kodaira)
Si X est géométriquement birationnelle à $\mathbb{P}^2$, alors $\chi(X,O_X) = 1$.

Dans la suite de cet exposé, je suppose systématiquement $\mathrm{car}(k) = 0$.

La méthode de Coray pour une surface cubique lisse $X \subset \mathbb{P}^3_k$.

Si X a un point k-rationnel, on est content. Si X a un point quadratique, alors elle a un point k-rationnel. On suppose dorénavant que ce n'est pas le cas. La surface X possède un point fermé Q de degré 3, découpé par une droite de $\mathbb{P}^3_k$.

On suppose que X possède un point fermé P de degré d premier à 3. On détermine le plus petit entier n tel qu'il existe une surface $\Sigma \subset \mathbb{P}^3_k$ de degré n découpant sur X une courbe passant par P (de degré d premier à 3) et par Q (de degré 3).
On utilise ici Riemann-Roch pour la surface, $h^2(X, O_X(n)) = h^0(X, O_X(-1-n)) = 0$, et $h^1(X, O_X(n)) = 0$, ce qui donne

$$h^0(X, O_X(n) = 3n(n+1)/2 + 1.$$

On suppose que la surface Σ découpe une courbe $\Gamma = D \subset X$ lisse géométriquement connexe. Cette courbe possède un zéro-cycle de degré 1. On calcule le genre $g = p_a(D) = 3n(n-1)/2 + 1$.

Si l'on a

$$3n(n+1)/2+1 \geq d+3+1$$

soit

$$3n(n+1)/2-3 \geq d$$

on trouve une surface de degré n découpant une courbe Γ passant par le point de degré d et le point de degré 3.
Si l'on a

$$d-3 \geq 3n(n-1)/2+1 = g$$

soit

$$d \geq 3n(n-1)/2+4,$$

alors sur la courbe lisse Γ on trouve un zéro-cycle effectif de degré $d-3<d$ premier à 3 sur la courbe, donc sur X.

Cet argument vaut pour tout entier d premier à 3 que l'on peut placer dans un intervalle

$$3n(n+1)/2 - 3 \geq d \geq 3n(n-1)/2 + 4.$$

Pour certaines valeurs de d, on doit discuter de façon plus fine. En particulier, pour les entiers de la forme $d = 3n(n-1)/2 + 1$, on est amené à utiliser un argument plus élaboré : on utilise une courbe Γ qui est la désingularisée d'une courbe $\Gamma_0 \subset X$ découpée par une surface de degré n passant par le point fermé P et possédant un point double en le point fermé Q de degré 3, ce qui fait baisser le genre de la courbe de 3, et aussi la dimension du système linéaire considéré de 9.

Pour $d = 3n(n-1)/2 + 1$ avec $n \geq 4$, il y a assez de place, mais pas pour $n = 2, d = 4$ ni pour $n = 3, d = 10$.

On montre ainsi que si une surface cubique lisse X possède un point fermé de degré d premier à 3, alors elle possède un tel point avec

$$d = 1 \text{ ou } d = 4 \text{ ou } d = 10.$$

Question (vieille de 45 ans) Peut-on faire mieux ?

Note : La possibilité d'une descente sur d tient au fait que le degré de la surface dans $\mathbb{P}^3$ est 3, si bien que l'on a
$3n(n+1)/2 >> 3n(n-1)/2$ pour n grand.
Si l'on avait essayé avec les surfaces de degré 4, on serait tombé sur la condition $2n^2 >> 2n^2$.

L'argument ci-dessus suppose que les courbes Γ obtenues sont lisses et géométriquement connexes. Dans son article, Coray considère ensuite toutes les dégénérescences possibles pour Γ, et arrive à faire encore la descente sur le degré jusqu'à 1, 4, 10.

Je décris maintenant une méthode évitant la considération de ces cas dégénérés.

Comment éviter la considération des cas dégénérés.

Idées :

• utiliser le théorème de Bertini (pas très original !)

• se donner du mou sur les points fermés par lesquels on veut faire passer des courbes

– c'est possible pour les variétés pour lesquelles on sait que l'existence d'un point rationnel implique que ces points sont Zariski denses (exemple : hypersurfaces cubiques lisses)

– une façon plus générale de se donner du mou est de passer de k au corps fertile $F = k((t))$ pour avoir beaucoup de L-points sur toute L-variété lisse connexe avec un L-point, où L est une extension finie de F.

• Remarquer que pour les problèmes considérés ici on peut passer de k à $k((t))$, puis spécialiser à k.

Théorème (variation de Bertini)

Soit X une k-variété projective, lisse, géométriquement connexe. Soit $f : X \to \mathbb{P}^n_k$ un k-morphisme d'image de dimension au moins 2, engendrant l'espace projectif $\mathbb{P}^n_k$. Soit $r \leq n$ un entier. Il existe un ouvert non vide $U \subset X^r$ tel que, pour tout corps L contenant k et pour tout L-point $(P_1, \ldots, P_r) \in U(L)$, il existe un hyperplan $h \subset \mathbb{P}^n_L$ tel que l'image réciproque $f^{-1}(h) \subset X_L$ soit une L-variété lisse et géométriquement intègre contenant les points $\{P_1, \ldots, P_r\}$.

Pour X une k-variété et $m > 0$ un entier, on considère l'ouvert de X^m complément des diagonales partielles. Le groupe symétrique $\mathfrak{S}_m$ agit sur cet ouvert, le quotient est noté $Sym^m_{sep}X$. Il paramétrise les cycles effectifs de degré m "séparables".

Théorème (version zéro-cycles du théorème précédent)

Soit X une k-variété projective, lisse, géométriquement connexe. Soit $f : X \to \mathbb{P}^n_k$ un k-morphisme d'image de dimension au moins 2, engendrant l'espace projectif $\mathbb{P}^n_k$. Soient $s_1, \ldots, s_t$ des entiers naturels tels que $\sum_i s_i \leq n$. Il existe un ouvert lisse non vide U du produit $\mathrm{Sym}^{s_1}_{sep} X \times \cdots \times \mathrm{Sym}^{s_t}_{sep} X$ tel que, pour tout corps L contenant k et tout L-point de U, correspondant à une famille de zéro-cycles effectifs séparables z_i sur X_L, avec z_i de degré s_i, il existe un hyperplan $h \subset \mathbb{P}^n_L$ tel que l'image réciproque $X_h = f^{-1}(h) \subset X_L$ soit une L-variété lisse et géométriquement intègre contenant les points du support du zéro-cycle $\sum_i z_i$.

Un corps F est fertile si, pour toute F-variété lisse connexe X avec $X(F) \neq \emptyset$, les points F-rationnels sont Zariski denses. Exemple : $F = k((t))$.

Théorème (Bertini sur un corps fertile)

Soit F un corps fertile de caractéristique zéro et X une F-variété projective, lisse, géométriquement connexe. Soit $f : X \to \mathbb{P}^n_F$ un k-morphisme d'image de dimension au moins 2, engendrant l'espace projectif $\mathbb{P}^n_F$. Soient $P_1, \ldots, P_t$ des points fermés de X de degrés respectifs s_i sur k, tels que la somme des s_i soit au plus égale à n.

(a) Il existe un hyperplan $h \subset \mathbb{P}^n_F$ défini sur F tel que $X_h = f^{-1}(h) \subset X$ soit lisse, géométriquement intègre, et contienne des zéro-cycles effectifs $z_1, \ldots, z_t$ de degrés respectifs $s_1, \ldots, s_t$.

(b) Si X est géométriquement rationnellement connexe, on peut en outre assurer que les zéro-cycles z_i et P_i sont rationnellement équivalents sur X.

(b) utilise Kollár, Variétés RC sur corps locaux, 1999, méthode de déformation.

Proposition (facile)

Soient k un corps et $F = k((t))$ le corps des séries formelles sur k. Soit X une k-variété propre.

(a) Le pgcd des degrés des points fermés a la même valeur sur X et sur X_F.

(b) Pour tout entier $r \geq 1$, le plus petit degré d'un point fermé de degré premier à r, qui est aussi le plus petit degré d'un zéro-cycle effectif de degré premier à r, a la même valeur sur X et sur X_F.

(c) Soit I un ensemble d'entiers naturels. Si le groupe de Chow des zéro-cycles sur X_F est engendré par les classes de cycles de degré $d \in I$, alors il en est de même sur X.

(d) Soit $d \geq 0$ un entier. Si tout zéro-cycle sur X_F de degré au moins d est rationnellement équivalent à un zéro-cycle effectif, alors il en de même sur X.

Cette proposition permet de réduire la démonstration du théorème de Coray au cas où le corps k est fertile. Le théorème "Bertini sur un corps fertile" (a) permet alors, dans la démonstration de Coray, de supposer partout que les courbes Γ trouvées sont lisses et géométriquement connexes et contiennent des zéro-cycles effectifs des degrés voulus.

Avec la flexibilité obtenue, on démontre sans trop de difficulté les deux théorèmes suivants.

Le théorème "Bertini sur un corps fertile (a)" suffit pour montrer :

Théorème B

Soit X une surface de del Pezzo de degré 2 sur un corps k de caractéristique zéro. C'est donc un revêment double du plan (ramifié le long d'une quartique lisse). Si X possède un point fermé de degré impair, alors X possède un point fermé de degré 1, 3 ou 7.

Dans la démonstration, comme dans le cas des surfaces cubiques, on est amené à considérer des éclatés de X. Pour appliquer l'énoncé dérivé de Bertini, il est utile de savoir que certains faisceaux inversibles sur ces éclatés sont très amples. Un critère dû à Reider (1988) est ici utile.

Remarque (Kollár-Mella 2017). Il existe des exemples de surfaces de del Pezzo de degré 2 avec un point de degré 3 et pas de point rationnel.

Soit k un corps possédant une extension quadratique de corps $k(\sqrt{a})$ et des extensions de corps de degré 3 et 5.
Soit $C \subset \mathbb{P}^2_k$ une conique possédant un point fermé A de degré 3 et un point fermé B de degré 5, puis $Q \subset \mathbb{P}^2_k$ une quartique lisse contenant les points A et B. Ainsi $Q \cap C = \{A, B\}$.
La surface de del Pezzo de degré 2 sur le corps $F = k(t)$ définie par

$$z^2 - aC(u,v,w)^2 + tQ(u,v,w) = 0$$

possède un point de degré 3 et un point de degré 5, mais pas de point rationnel. Ce dernier point résulte de congruences modulo t.

Le théorème “Bertini sur un corps fertile (b)” permet de montrer :

Théorème C

Soient k un corps de caractéristique zéro et $X \subset \mathbb{P}^3_k$ une surface cubique lisse avec un point rationnel.

(a) Soit $Q \in X(k)$. Tout zéro-cycle effectif de degré au moins 4 sur X est rationnellement équivalent à un zéro-cycle effectif $z_1 + rQ$ avec $r \geq 0$ et z_1 effectif de degré ≤ 3.

(b) Tout zéro-cycle de degré zéro est rationnellement équivalent à la différence de deux cycles effectifs de degré 3.

(c) Le groupe de Chow des zéro-cycles sur X est engendré par les classes des points rationnels et des points fermés de degré 3.

(d) Tout zéro-cycle sur X de degré au moins égal à 10 est rationnellement équivalent à un zéro-cycle effectif.

Conclusion

Les théorèmes A,B,C suggèrent les questions générales suivantes.

Soient k un corps de car. zéro, $\overline{k}$ une clôture algébrique et X une k-variété projective, lisse, géom. connexe, géométriquement rationnellement connexe. Notons $\overline{X} = X \times_k \overline{k}$.

1. Existe-t-il un entier $n(\overline{X})$ tel que, si X possède un zéro-cycle de degré 1, alors X possède des points fermés de degrés premiers entre eux et au plus égaux à $n(\overline{X})$?
[Kollár (2004) a des exemples montrant que pour les hypersurfaces quartiques projectives lisses dans $\mathbb{P}^N$, $N \geq 4$, il n'existe pas une borne indépendante de N.]

2. Existe-t-il un entier $m(\overline{X})$ tel que le groupe de Chow $CH_0(X)$ soit engendré par les points fermés de degré au plus $m(\overline{X})$?

Appendice

La démonstration du théorème suivant est indépendante de ce qui précède.

Théorème D

Soient k un corps de caractéristique zéro et $X \subset \mathbb{P}^3_k$ une surface cubique lisse sans point rationnel. Si tout point fermé de degré 3 sur X est découpé par une droite de $\mathbb{P}^3_k$, alors il existe une surface de del Pezzo de degré 1 sur k dont les points rationnels ne sont pas denses pour la topologie de Zariski.

La question de l'existence de telles surfaces cubiques a été posée récemment par Qixiao Ma.

La question de la densité des points rationnels sur toute surface de del Pezzo de degré 1 est une question ouverte bien connue.

Idée de la démonstration

On part d'un point P de degré 3 découpé sur X par une droite L générale. On éclate le point P, ce qui donne $Y \to \mathbb{P}^1_k$. Les fibres lisses sont les sections planes de X par les plans contenant L.
Si X ne contient pas de point fermé de degré 3 non aligné, alors le groupe de Picard de toute Y_t lisse, $t \in \mathbb{P}^1(k)$, satisfait $\mathrm{Pic}(X_t) = \mathbb{Z}P$ et donc $\mathrm{Pic}^0(X_t) = 0$.
Le modèle propre régulier relativement minimal $W \to \mathbb{P}^1_k$ associé à la jacobienne de la fibre générique de $Y \to \mathbb{P}^1_k$ est la surface de del Pezzo de degré 1 annoncée. Pour $t \in \mathbb{P}^1(k)$ avec Y_t lisse, tout k-point de la courbe elliptique Y_t est de 3-torsion.

FIN