Sur la conjecture de Tate entière pour les 1-cycles

Travail avec Federico Scavia (UBC, Vancouver)

Jean-Louis Colliot-Thélène
(CNRS et Université Paris-Saclay)

Mardi 3 novembre 2020

Soient k un corps d'exposant caractéristique p et X une k-variété projective, lisse, géométriquement connexe. On utlise la cohomologie étale.

On a $CH^1(X) = \mathrm{Pic}(X) = H^1_{Zar}(X, \mathbb{G}_m) = H^1(X, \mathbb{G}_m)$.

Pour r premier à p, la suite de Kummer associée à $x \mapsto x^r$

$$1 \to \mu_r \to \mathbb{G}_m \to \mathbb{G}_m \to 1$$

donne une application $\mathrm{Pic}(X)/r = H^1(X, \mathbb{G}_m)/r \to H^2(X, \mu_r)$.

Soit $r = \ell^n$, avec $\ell \neq p$. En passant à la limite sur n, on obtient l'application cycle ℓ-adique

$$\mathrm{Pic}(X) \otimes \mathbb{Z}_\ell \to H^2(X, \mathbb{Z}_\ell(1)).$$

Vers 1960, Tate a conjecturé

(T^1) *Pour* $\mathbb{F}$ *un corps fini et* $X/\mathbb{F}$*, pour* $\ell \neq \mathrm{char}(\mathbb{F})$*, l'application*

$$\mathrm{Pic}(X) \otimes \mathbb{Z}_\ell \to H^2(X, \mathbb{Z}_\ell(1))$$

est surjective.

Via la suite de Kummer, ceci est équivalent à la finitude de la composante ℓ-primaire $\mathrm{Br}(X)\{\ell\}$ du groupe de Brauer $\mathrm{Br}(X) := H^2(X, \mathbb{G}_m)$ (finitude intimement liée à la finitude conjecturée des groupes de Tate–Shafarevich des variétés abéliennes sur un corps global $\mathbb{F}(C)$).
La conjecture est connue pour les variétés géométriquement séparablement unirationnelles, les variétés abéliennes (Tate) et presque toutes les surfaces $K3$.

Pour tout $i \geq 1$, on a une application cycle ℓ-adique

$$CH^i(X) \otimes \mathbb{Z}_\ell \to H^{2i}(X, \mathbb{Z}_\ell(i)),$$

où $CH^i(X)$ est le groupe de Chow des cycles de codimension i et $H^{2i}(X, \mathbb{Z}_\ell(i))$ est la limite projective des groupes finis $H^{2i}(X, \mu_{\ell^n}^{\otimes i})$. C'est un $\mathbb{Z}_\ell$-module de type fini.

Pour $i > 1$, Tate a aussi conjecturé que

$$CH^i(X) \otimes \mathbb{Q}_\ell \to H^{2i}(X, \mathbb{Q}_\ell(i)) := H^{2i}(X, \mathbb{Z}_\ell(i)) \otimes_{\mathbb{Z}_\ell} \mathbb{Q}_\ell$$

est surjectif.

Pour $i > 1$, il y a des exemples où l'énoncé analogue T^i avec les coefficients $\mathbb{Z}_\ell$ est en défaut. Cependant, pour X de dimension d, c'est une question ouverte si la *conjecture de Tate entière* $T_1 = T^{d-1}$ *pour les 1-cycles* vaut

Hypothèse (T_1) *L'application* $CH^{d-1}(X) \otimes \mathbb{Z}_\ell \to H^{2d-2}(X, \mathbb{Z}_\ell(d-1))$ *est surjective.*

Sous T^1 pour X, le conoyau de l'application ci-dessus est fini (Lefschetz).

Pour $d = 2$, $T_1 = T^1$, conjecture de Tate originelle.
Dans la suite on notera T^1_{surf} la conjecture T^1 pour la classe de toutes les surfaces.

La conjecture de Tate T_1 pour les 1-cycles vaut pour toute variété proj. lisse de dimension $d \geq 3$ si elle vaut pour toute variété proj. lisse de dimension 3 (utiliser Bertini, pureté, Lefschetz affine)

Pour X de dimension 3, T_1 a été établie dans certains cas non triviaux.
• X fibré en coniques sur une surface géométriquement réglée (Parimala et Suresh 2016).
• X produit d'une courbe de genre quelconque et d'une surface géométriquement rationnelle (Pirutka 2016).

Soient $\overline{\mathbb{F}}$ la clôture algébrique de $\mathbb{F}$ et $G = \mathrm{Gal}(\overline{\mathbb{F}}/\mathbb{F})$.

Théorème (C. Schoen, 1998)
Supposons T^1_{surf}. Soit $X/\mathbb{F}$ projective, lisse, géom. connexe de dimension quelconque. Soit $\overline{X} = X \times_{\mathbb{F}} \overline{\mathbb{F}})$. L'application

$$CH^{d-1}(\overline{X}) \otimes \mathbb{Z}_\ell \to \bigcup_{U \subset G} H^{2d-2}(\overline{X}, \mathbb{Z}_\ell(d-1))^U,$$

où U parcourt les sous-groupes ouverts de G, est surjective.

Pour les variétés projectives et lisses X sur $\mathbb{C}$, il y a une question parallèle de surjectivité pour les applications cycle

$$CH^i(X) \to Hdg^{2i}(X, \mathbb{Z})$$

où $Hdg^{2i}(X, \mathbb{Z}) \subset H^{2i}_{Betti}(X, \mathbb{Z})$ est le sous-groupe des classes dont l'image est de Hodge dans $H^{2i}(X, \mathbb{Q})$.
La surjectivité après tensorisation avec $\mathbb{Q}$ est la conjecture de Hodge. Pour $i = 1$, elle vaut, aussi à coefficients entiers. Pour $i = \dim(X) - 1$, elle vaut à coefficients $\mathbb{Q}$.
Pour $i > 1$, on a donné de nombreux contre-exemples pour la version entière (à coefficients $\mathbb{Z}$), même pour $\dim(X) = 3$ et les 1-cycles (Kollár).

Pour S une surface d'Enriques et C une courbe de genre $g \geq 1$ "très générale", Benoist et Ottem (2018) ont montré que la conjecture de Hodge entière est en défaut pour les 1-cycles sur $X = C \times S$. La démonstration utilise $\mathrm{Pic}\,(S)[2] = \mathbb{Z}/2$. On a ici $H^2(X, \mathcal{O}_X) = 0$, $\rho = b_2$, et $\mathrm{Br}(X) = \mathbb{Z}/2$ est fini.

Supposons la conjecture de Tate T^1_{surf}. Soit X/k une variété projective et lisse sur la clôture algébrique k d'un corps fini. Si la variété X satisfait $\mathrm{Br}(X)\{\ell\}$ fini, soit encore $\rho = b_{2,\ell}$, le théorème de Schoen implique que l'application cycle

$$CH^{d-1}(X) \otimes \mathbb{Z}_\ell \to H^{2d-2}(X, \mathbb{Z}_\ell(d-1))$$

est surjective.
Sous T^1_{surf}, *on n'a donc pas d'exemple $X = C \times S$ analogue à celui de Benoist et Ottem sur la clôture algébrique d'un corps fini*. On avait la même observation pour l'exemple de Kollár.

Qu'en est-il sur un corps fini ?

Theorem (CT-Scavia 2020). *Soit* $\mathbb{F}$ *un corps fini,* $\overline{\mathbb{F}}$ *une clôture galoisienne,* $G = Gal(\overline{\mathbb{F}}/\mathbb{F})$. *Soit* $C/\mathbb{F}$ *une courbe proj. et lisse,* J *sa jacobienne, et* $S/\mathbb{F}$*une surface d'Enriques. Soit* $X = C \times_{\mathbb{F}} S$. *Soit* ℓ *un premier,* $\ell \neq p = \mathrm{char.}(\mathbb{F})$. *Supposons* T^1_{surf}.
Si $\ell \neq 2$*, ou si* $\ell = 2$ *mais* $J(\mathbb{F})$ *n'a pas de 2-torsion, alors l'application* $CH^2(X) \otimes \mathbb{Z}_\ell \to H^4(X, \mathbb{Z}_\ell(2))$ *est surjective.*

Nous établissons un théorème général (énoncé à la fin de l'exposé) pour le produit $X = C \times_{\mathbb{F}} S$ d'une courbe C proj. et lisse et d'une surface S proj. et lisse qui est *géométriquement CH_0-triviale*, c'est-à-dire qui satisfait :

Sur **tout** *corps algébriquement clos Ω contenant $\mathbb{F}$, l'application degré $CH_0(S_\Omega) \to \mathbb{Z}$ est isomorphisme.*

[Sous cette hypothèse, $\mathrm{Pic}(S_\Omega) = NS(S_\Omega)$ est un groupe abélien de type fini.]

Cohomologie non ramifiée, cycles de codimension 2

Rappel de divers résultats, en particulier de CT-Kahn 2013.

Soit M un module galoisien fini sur un corps k, d'ordre premier à la car. de k. Soit X une k-variété projective, lisse, intègre, de corps des fonctions $k(X)$, et soit $i \geq 1$ un entier. On définit

$$H^i_{nr}(k(X), M) := \mathrm{Ker}[H^i(k(X), M) \to \oplus_{x \in X^{(1)}} H^{i-1}(k(x), M(-1))]$$

Ici $k(x)$ est le corps résiduel en un point $x \in X$ de codimension 1, la cohomologie est la cohomologie galoisienne, et les applications à droite sont les applications "résidus".

On s'intéresse au cas $M = \mu_{\ell^n}^{\otimes j} = \mathbb{Z}/\ell^n(j)$, donc $M(-1) = \mu_{\ell^n}^{\otimes (j-1)}$, et à $\mathbb{Q}_\ell/\mathbb{Z}_\ell(j) = \lim_j \mu_{\ell^n}^{\otimes j}$, pour laquelle les groupes de cohomologie sont les limites des groupes de cohomologie.

Le groupe $H^1_{nr}(k(X), \mathbb{Q}_\ell/\mathbb{Z}_\ell) \cong H^1_{et}(X, \mathbb{Q}_\ell/\mathbb{Z}_\ell)$ classifie les revêtements cycliques ℓ-primaires de X.

Le groupe

$$H^2_{nr}(k(X), \mathbb{Q}_\ell/\mathbb{Z}_\ell(1)) \cong \mathrm{Br}(X)\{\ell\}$$

apparaît dans l'étude de la conjecture de Tate sur les diviseurs. Sa finitude pour $X/\mathbb{F}$ donné est équivalente à la conjecture ℓ-adique de Tate pour les cycles de codimension 1 sur X.

Le groupe $H^3_{nr}(k(X), \mathbb{Q}_\ell/\mathbb{Z}_\ell(2))$ apparaît dans l'étude des cycles de codimension 2. Il est nul pour $\dim(X) \leq 2$ (théorie du corps de classes supérieur, années 1980).

Questions ouvertes :

$H^3_{nr}(\mathbb{F}(X), \mu_\ell^{\otimes 2})$ est-il fini ?
(Question équivalente : le quotient $CH^2(X)/\ell$ est-il fini ?)

$H^3_{nr}(\mathbb{F}(X), \mathbb{Q}_\ell/\mathbb{Z}_\ell(2))$ est-il de type cofini ?

$H^3_{nr}(\mathbb{F}(X), \mathbb{Q}_\ell/\mathbb{Z}_\ell(2))$ est-il fini ?

A-t-on $H^3_{nr}(\mathbb{F}(X), \mathbb{Q}_\ell/\mathbb{Z}_\ell(2)) = 0$ si $\dim(X) = 3$?
[Oui pour un fibré en coniques sur une surface, Parimala–Suresh 2016]

Pour $\dim(X) \geq 5$ on a des exemples avec $H^3_{nr}(\mathbb{F}(X), \mathbb{Q}_\ell/\mathbb{Z}_\ell(2)) \neq 0$ (Pirutka 2011).

Théorème (Kahn 2012, CT-Kahn 2013) *Pour $X/\mathbb{F}$ lisse, projective de dimension quelconque, le sous-groupe de torsion du groupe (conjecturalement fini)*

$$\mathrm{Coker}[CH^2(X) \otimes \mathbb{Z}_\ell \to H^4(X, \mathbb{Z}_\ell(2))]$$

est isomorphe au quotient de $H^3_{\mathrm{nr}}(\mathbb{F}(X), \mathbb{Q}_\ell/\mathbb{Z}_\ell(2))$ par son sous-groupe divisible maximal.

Il y a un analogue pour la conjecture de Hodge entière pour les cycles de codimension 2 (CT-Voisin 2012).

Une suite exacte fondamentale (CT-Kahn 2013). Soient $\overline{\mathbb{F}}$ une clôture algébrique de $\mathbb{F}$, $\overline{X} = X \times_{\mathbb{F}} \overline{\mathbb{F}}$ et $G = \mathrm{Gal}(\overline{\mathbb{F}}/\mathbb{F})$.

Pour toute variété $X/\mathbb{F}$ proj., lisse, géom. connexe sur un corps fini $\mathbb{F}$ on a une longue suite exacte

$$0 \to \mathrm{Ker}[CH^2(X)\{\ell\} \to CH^2(\overline{X})\{\ell\}] \to H^1(\mathbb{F}, H^2(\overline{X}, \mathbb{Q}_\ell/\mathbb{Z}_\ell(2)))$$

$$\to \mathrm{Ker}[H^3_{\mathrm{nr}}(\mathbb{F}(X), \mathbb{Q}_\ell/\mathbb{Z}_\ell(2)) \to H^3_{\mathrm{nr}}(\overline{\mathbb{F}}(X), \mathbb{Q}_\ell/\mathbb{Z}_\ell(2))]$$

$$\to \mathrm{Coker}[CH^2(X) \to CH^2(\overline{X})^G]\{\ell\} \to 0.$$

La démonstration repose sur des travaux de S. Bloch et sur le théorème de Merkurjev-Suslin (1983). Via le théorème de Deligne sur les conjectures de Weil, on a

$$H^1(\mathbb{F}, H^2(\overline{X}, \mathbb{Q}_\ell/\mathbb{Z}_\ell(2))) = H^1(\mathbb{F}, H^3(\overline{X}, \mathbb{Z}_\ell(2))_{\mathrm{tors}})$$

et ce groupe est fini.

Pour X une courbe, tous les groupes dans la suite sont nuls.
Pour X une surface, $H^3(\overline{\mathbb{F}}(X), \mathbb{Q}_\ell/\mathbb{Z}_\ell(2)) = 0$.
Pour $X/\mathbb{F}$ une surface, on a l'énoncé non trivial

$$H^3_{\mathrm{nr}}(\mathbb{F}(X), \mathbb{Q}_\ell/\mathbb{Z}_\ell(2)) = 0.$$

(Corps de classes supérieur, CT-Sansuc-Soulé, K. Kato, 1983).

Supposons : (*) **Il existe une surface proj. lisse $Y/\mathbb{F}$, un $\mathbb{F}$-morphisme $Y \to X$ tel que tout corps algébriquement clos Ω contenant $\mathbb{F}$, l'application $CH_0(Y_\Omega) \to CH_0(X_\Omega)$ est surjective.** (Satisfait pour le produit d'une Enriques et d'une courbe.)

Alors $H^3_{\mathrm{nr}}(\mathbb{F}(X), \mathbb{Q}_\ell/\mathbb{Z}_\ell(2))$ et $H^3_{\mathrm{nr}}(\overline{\mathbb{F}}(X), \mathbb{Q}_\ell/\mathbb{Z}_\ell(2))$ sont finis, et on a un isomorphisme de groupes finis :

$$\mathrm{Coker}[CH^2(X) \otimes \mathbb{Z}_\ell \to H^4(X, \mathbb{Z}_\ell(2))] \simeq H^3_{\mathrm{nr}}(\mathbb{F}(X), \mathbb{Q}_\ell/\mathbb{Z}_\ell(2)).$$

De plus, sous T^1_{surf}, du théorème de Schoen on déduit $H^3_{\mathrm{nr}}(\overline{\mathbb{F}}(X), \mathbb{Q}_\ell/\mathbb{Z}_\ell(2)) = 0$, et on a une suite exacte de groupes finis

$$0 \to \mathrm{Ker}[CH^2(X)\{\ell\} \to CH^2(\overline{X})\{\ell\}] \to H^1(\mathbb{F}, H^3(\overline{X}, \mathbb{Z}_\ell(2))_{\mathrm{tors}})$$

$$\xrightarrow{\theta_X} H^3_{\mathrm{nr}}(\mathbb{F}(X), \mathbb{Q}_\ell/\mathbb{Z}_\ell(2)) \to \mathrm{Coker}[CH^2(X) \to CH^2(\overline{X})^G]\{\ell\} \to 0.$$

Conclusion : Pour X un solide satisfaisant (*), sous l'hypothèse T^1_{surf}, la surjectivité de $CH^2(X) \otimes \mathbb{Z}_\ell \to H^4(X, \mathbb{Z}_\ell(2))$ (conjecture de Tate entière pour les 1-cycles) est équivalente à la combinaison des deux hypothèses :

Hypothèse 1
L'application composée

$$\rho_X : H^1(\mathbb{F}, H^2(\overline{X}, \mathbb{Q}_\ell/\mathbb{Z}_\ell(2))) \to H^3(\mathbb{F}(X), \mathbb{Q}_\ell/\mathbb{Z}_\ell(2))$$

of θ_X *and* $H^3_{\mathrm{nr}}(\mathbb{F}(X), \mathbb{Q}_\ell/\mathbb{Z}_\ell(2)) \subset H^3(\mathbb{F}(X), \mathbb{Q}_\ell/\mathbb{Z}_\ell(2))$ *est nulle.*

Hypothèse 2 $\mathrm{Coker}[CH^2(X) \to CH^2(\overline{X})^G]\{\ell\} = 0.$

Nos résultats

Sur l'Hypothèse 1

Hypothèse 1 *L'application* $\rho_X : H^1(\mathbb{F}, H^2(\overline{X}, \mathbb{Q}_\ell/\mathbb{Z}_\ell(2))) \to H^3(\mathbb{F}(X), \mathbb{Q}_\ell/\mathbb{Z}_\ell(2))$ *est nulle.*

Cette application est la composée de l'application de Hochschild-Serre

$$H^1(\mathbb{F}, H^2(\overline{X}, \mathbb{Q}_\ell/\mathbb{Z}_\ell(2))) \to H^3(X, \mathbb{Q}_\ell/\mathbb{Z}_\ell(2)))$$

avec la restriction au point générique de X.

L'hypothèse 1 est équivalente à chacune des hypothèses :

Hypothèse 1a. L'application (injective) de $\mathrm{Ker}[CH^2(X)\{\ell\} \to CH^2(\overline{X})\{\ell\}]$ dans le groupe fini

$$H^1(\mathbb{F}, H^2(\overline{X}, \mathbb{Q}_\ell/\mathbb{Z}_\ell(2))) \simeq H^1(\mathbb{F}, H^3(\overline{X}, \mathbb{Z}_\ell(2))_{tors})$$

est un isomorphisme.

Hypothèse 1b. Pour tout $n \geq 1$, si une classe $\xi \in H^3(X, \mu_{\ell^n}^{\otimes 2})$ s'annule dans $H^3(\overline{X}, \mu_{\ell^n}^{\otimes 2})$, alors elle s'annule après restriction à un ouvert non vide convenable $U \subset X$.

Autant que nous sachions, les hypothèses 1,1a,1b pourraient valoir pour toute variété projective et lisse sur un corps fini.

Pour X de dimension > 2, on ne voit pas comment établir ces énoncés directement – sauf bien sûr quand on a $H^3(\overline{X}, \mathbb{Z}_\ell(2))_{tors} = 0$.
Le groupe $H^3(\overline{X}, \mathbb{Z}_\ell(1))_{tors}$ est le quotient de $\mathrm{Br}(\overline{X})\{\ell\}$ par son sous-groupe divisible maximal.
Le groupe fini $H^1(\mathbb{F}, H^3(\overline{X}, \mathbb{Z}_\ell(2))_{tors})$ est la partie la plus calculable de la suite exacte à 4 termes.
Par exemple, pour $\mathrm{char}(\mathbb{F}) \neq 2$, $\ell = 2$, $X = E \times_F S$ produit d'une courbe elliptique E et d'une surface d'Enriques S, ce groupe est isomorphe à $E(\mathbb{F})[2] \oplus \mathbb{Z}/2$. Comment trouver des relevés dans $\mathrm{Ker}[CH^2(X)\{2\} \to CH^2(\overline{X})\{2\}]$?

Nous montrons :

Théorème. *Soient Y et Z deux variétés projectives, lisses, géom. connexes sur un corps fini $\mathbb{F}$. Soit $X = Y \times_{\mathbb{F}} Z$. Supposons que le groupe de Néron-Severi de $\overline{Z}$ est libre, avec action triviale du groupe de Galois. Si les applications ρ_Y et ρ_Z sont nulles, alors il en est de même de ρ_X.*

On étudie le comportement de $H^1(\mathbb{F}, H^2(\overline{X}, \mu_{\ell^n}^{\otimes 2}))$ par restriction au point générique de X.
La démonstration utilise une formule de Künneth et des propriétés standard de la cohomologie galoisienne d'un corps fini.
C'est une formule de Künneth inhabituelle, avec coefficients $\mathbb{Z}/\ell^n$, $n > 1$.
Qu'elle vaille pour H^2 d'un produit de deux variétés sur un corps algébriquement clos est un résultat de Skorobogatov et Zarhin (2014), étendu par Y. Cao (2020). (C'est utilisé dans un autre contexte – description de l'ensemble de Brauer-Manin pour un produit.)

Corollaire. *Pour le produit d'une surface X et d'un nombre quelconque de courbes, l'application ρ_X est nulle.*

Sur l'Hypothèse 2

Hypothèse 2 *Pour X de dimension 3, on a*
$\mathrm{Coker}[CH^2(X) \to CH^2(\overline{X})^G]\{\ell\} = 0.$

[Pour X de dimension au moins 5, A. Pirutka (2011) a donné des contre-exemples (fibré en quadriques sur $\mathbb{P}^2_{\mathbb{F}}$).]

On se restreint ici à la situation particulière : C est une courbe, S est une surface géométriquement CH_0-triviale, et $X = C \times_{\mathbb{F}} S$.
Notons $K = \mathbb{F}(C)$ et $L = \overline{\mathbb{F}}(C)$.
On considère la projection $X = C \times S \to C$, de fibre générique la K-surface S_K. La restriction à la fibre générique définit une application naturelle de

$$\mathrm{Coker}[CH^2(X) \to CH^2(\overline{X})^G]\{\ell\}$$

vers

$$\mathrm{Coker}[CH^2(S_K) \to CH^2(S_L)^G]\{\ell\}.$$

En utilisant l'hypothèse que S est géométriquement CH_0-triviale, ce qui implique $b_1 = 0$ and $b_2 - \rho = 0$ ($b_i(S)$ nombre de Betti, ρ rang du groupe de Néron-Severi géométrique), on montre :

Théorème. *La suite exacte naturelle de localisation*

$$\mathrm{Pic}(\overline{C}) \otimes \mathrm{Pic}(\overline{S}) \to CH^2(\overline{X}) \to CH^2(S_L) \to 0.$$

peut être complété à gauche par un p-groupe fini.

Pour le voir, on utilise diverses correspondances sur $\overline{X} = \mathbb{C} \times \overline{S}$, over $\overline{\mathbb{F}}$. Images réciproques, images directes, intersections :

$$\mathrm{Pic}(\overline{C}) \otimes \mathrm{Pic}(\overline{S}) \to \mathrm{Pic}(\overline{X}) \otimes \mathrm{Pic}(\overline{X}) \to CH^2(\overline{X})$$

$$CH^2(\overline{X}) \otimes \mathrm{Pic}(\overline{S}) \to CH^2(\overline{X}) \otimes \mathrm{Pic}(\overline{X}) \to CH^3(\overline{X}) = CH_0(\overline{X}) \to CH_0(\overline{C})$$

$$\mathrm{Pic}(\overline{C}) \otimes \mathrm{Pic}(\overline{S}) \to CH^2(\overline{X}) = CH_1(\overline{X}) \to CH_1(\overline{S}) = \mathrm{Pic}(\overline{S})$$

L'hypothèse sur $\overline{S}$ garantit que $Pic(\overline{S}) = NS(\overline{S})$ et que la forme d'intersection sur $NS(\overline{S})$ a son déterminant qui est $\pm$ une puissance de p.

Des propriétés non complètement standard des G-réseaux pour $G = \mathrm{Gal}(\overline{\mathbb{F}}/\mathbb{F})$ appliquées à la suite exacte (à la p-torsion près) de G-modules $0 \to \mathrm{Pic}(\overline{C}) \otimes \mathrm{Pic}(\overline{S}) \to CH^2(\overline{X}) \to CH^2(S_L) \to 0$ donnent :

Théorème. *L'application naturelle*

$$\mathrm{Coker}[CH^2(X) \to CH^2(\overline{X})^G]\{\ell\} \to \mathrm{Coker}[CH^2(S_K) \to CH^2(S_L)^G]\{\ell\}$$

est un isomorphisme.

(Rappel : $K = \mathbb{F}(C)$ et $L = \overline{\mathbb{F}}(C)$.)

Il faut donc contrôler ce groupe. En utilisant l'hypothèse de CH_0-trivialité pour S, on voit qu'il coïncide avec

$$\mathrm{Coker}[CH^2(S_K)\{\ell\} \to CH^2(S_L)\{\ell\}^G].$$

Pour une surface géométriquement CH_0-triviale sur $L = \overline{\mathbb{F}}(C)$, qui est un corps de dimension cohomologique 1, comme $\mathbb{F}$, en utilisant le mécanisme de K-théorie, on établit une suite exacte similaire à la suite à 4 termes produite plus haut pour une variété sur le corps $\mathbb{F}$. Dans le cas particulier de la surface constante $S_L = S \times_{\mathbb{F}} L$, la partie gauche de cette suite donne une injection

$$0 \to A_0(S_L)\{\ell\} \to H^1_{Galois}(L, H^3(\overline{S}, \mathbb{Z}_\ell(2)\{\ell\})$$

où $A_0(S_L) \subset CH^2(S_L)$est le sous-groupe des classes de zéro-cycles de degr é zéro sur la L-surface S_L.

L'étude de cette situation sur les complétions de $\overline{\mathbb{F}}(C)$ (Raskind 1989) et un argument de bonne réduction dans le style de la démonstration du théorème de Mordell–Weil faible, et une identification des sous-groupes de torsion dans la cohomologie d'une surface sur un corps algébriquement clos donne alors un plongement galoisien

$$A_0(S_L)\{\ell\} \hookrightarrow \mathrm{Hom}_{\mathbb{Z}}(\mathrm{Pic}(\overline{S})\{\ell\}, J(C)(\overline{\mathbb{F}})),$$

donc un plongement

$$A_0(S_L)\{\ell\}^G \hookrightarrow \mathrm{Hom}_G(\mathrm{Pic}(\overline{S})\{\ell\}, J(C)(\overline{\mathbb{F}})).$$

Si ce groupe $\mathrm{Hom}_G(\mathrm{Pic}(\overline{S})\{\ell\}, J(C)(\overline{\mathbb{F}}))$ est nul, alors

$$\mathrm{Coker}[CH^2(S_K)\{\ell\} \to CH^2(S_L)\{\ell\}^G] = 0$$

et donc

$$\mathrm{Coker}[CH^2(X) \to CH^2(\overline{X})^G]\{\ell\} = 0,$$

ce qui est l'Hypothèse 2, et termine la démonstration du théorème :

Théorème (CT/Scavia) *Soit* $\mathbb{F}$ *un corps fini,* $G = \mathrm{Gal}(\overline{\mathbb{F}}/\mathbb{F})$. *Soit* ℓ *un premier,* $\ell \neq \mathrm{char.}(\mathbb{F})$. *Soit* C *une courbe projective lisse géom. connexe sur* $\mathbb{F}$, *soit* $J/\mathbb{F}$ *sa jacobienne, et soit* $S/\mathbb{F}$ *une surface proj. lisse, géom. connexe, géométriquement* CH_0*-triviale. Soit* $X = C \times_{\mathbb{F}} S$.
Supposons la conjecture de Tate usuelle pour les cycles de codimension 1 sur toute surface sur un corps fini.
Sous l'hypothèse

$$(**) \qquad \mathrm{Hom}_G(\mathrm{Pic}(S_{\overline{\mathbb{F}}})\{\ell\}, J(\overline{\mathbb{F}})) = 0,$$

l'application cycle $CH^2(X) \otimes \mathbb{Z}_\ell \to H^4_{et}(X, \mathbb{Z}_\ell(2))$ *est surjective.*

Question : La restriction $(**)$ est-elle nécessaire ?

Cas concret

Soit $p \neq 2$ et soit E une courbe elliptique définie par une équation $y^2 = P(x)$ avec $P \in \mathbb{F}[x]$ un polynôme séparable de degré 3.
Soit $S/\mathbb{F}$ une surface d'Enriques. Alors $\mathrm{Pic}(S_{\overline{\mathbb{F}}})_{tors} = \mathbb{Z}/2$, – avec action triviale du groupe de Galois.
L'hypothèse $(**)$ est ici : $E(\mathbb{F})[2] = 0$, ce qui se traduit par : $P \in \mathbb{F}[x]$ est un polynôme irréductible. .

Ainsi, pour $p \neq 2$ et $P(x) \in \mathbb{F}[x]$ *réductible*, la conjecture de Tate entière $T_1(X, \mathbb{Z}_2)$ pour $X = E \times_{\mathbb{F}} S$ reste ouverte.