Épijournal de Géométrie Algébrique
epiga.episciences.org
Volume 2 (2018), Article Nr. 13

Troisième groupe de cohomologie non ramifiée d'un solide cubique sur un corps de fonctions d'une variable

Jean-Louis Colliot-Thélène et Alena Pirutka

Résumé. En combinant une méthode de C. Voisin avec la descente galoisienne sur le groupe de Chow en codimension 2, nous montrons que le troisième groupe de cohomologie non ramifiée d'un solide cubique lisse défini sur le corps des fonctions d'une courbe complexe est nul. Ceci implique que la conjecture de Hodge entière pour les classes de degré 4 vaut pour les variétés projectives et lisses de dimension 4 fibrées en solides cubiques au-dessus d'une courbe, sans restriction sur les fibres singulières.

Mots-clés. Groupes de Chow ; cycles de codimension 2 ; cohomologie non ramifiée ; famille d'hypersurfaces cubiques ; jacobienne intermédiaire ; conjecture de Hodge entière.

Classification mathématique par matières (MSC 2010). 14C25 ; 14H40 ; 14C35 ; 14D06 ; 14Mxx ; 14C30

[English]

Title. Third unramified cohomology group of a cubic threefold over a function field in one variable

Abstract. We prove that the third unramified cohomology group of a smooth cubic threefold over the function field of a complex curve vanishes. For this, we combine a method of C. Voisin with Galois descent on the codimension 2 Chow group. As a corollary, we show that the integral Hodge conjecture holds for degree 4 classes on smooth projective fourfolds equipped with a fibration over a curve, the generic fibre of which is a smooth cubic threefold, with arbitrary singularities on the special fibres.

Keywords. Chow groups ; codimension 2 cycles ; unramified cohomology ; family of cubic hypersurfaces ; intermediate jacobian ; integral Hodge conjecture.

Received by the Editors on September 22, 2017, and in final form on September 11, 2018.
Accepted on November 9, 2018.

Jean-Louis Colliot-Thélène
Université Paris-Sud, CNRS, Paris-Saclay, Mathématiques, Bâtiment 307, 91405 Orsay Cedex, France
e-mail: jlct@math.u-psud.fr
Alena Pirutka
Courant Institute, New York University, 251 Mercer Street, New York, NY 10012, USA
National Research University Higher School of Economics, Russian Federation
e-mail: pirutka@cims.nyu.edu

Table des matières

1. Introduction

Soit W une variété projective et lisse sur $\mathbb{C}$, le corps des complexes. Pour tout entier $i \geq 1$, on dispose d'applications cycles

$$cl_i : CH^i(W) \to Hdg^{2i}(W, \mathbb{Z}(i)),$$

définies sur le groupe de Chow des cycles de codimension i modulo l'équivalence rationnelle, à valeurs dans le groupe

$$Hdg^{2i}(W, \mathbb{Z}(i)) \subset H^{2i}_{Betti}(W, \mathbb{Z}(i))$$

image réciproque du groupe des classes de Hodge dans $H^{2i}_{Betti}(W, \mathbb{Q}(i))$. L'application cl_1 est surjective. Pour $i \geq 2$, la conjecture de Hodge prédit que le conoyau $Z^{2i}(W)$ de cl_i est de torsion.

Dans [8], on a montré que si le groupe de Chow $CH_0(W)$ des zéro-cycles sur W est "supporté" sur une surface, alors le groupe $Z^4(W)$ est fini et isomorphe au groupe

$$H^3_{nr}(\mathbb{C}(W)/\mathbb{C}, \mathbb{Q}/\mathbb{Z}(2)) \subset H^3(\mathbb{C}(W), \mathbb{Q}/\mathbb{Z}(2))$$

formé des classes non ramifiées dans le troisième groupe de cohomologie galoisienne du corps des fonctions de W, à valeurs dans $\mathbb{Q}/\mathbb{Z}(2)$. Les groupes $Z^4(W)$ et $H^3_{nr}(\mathbb{C}(W)/\mathbb{C}, \mathbb{Q}/\mathbb{Z}(2))$ sont des invariants birationnels.

Ceci a permis de donner des exemples de W rationnellement connexes de toute dimension $d \geq 6$ avec $Z^4(W) \neq 0$. Pour $d = 4, 5$ et W rationnellement connexe, c'est une question ouverte si l'on a $Z^4(W) = 0$[1]. C'est connu pour W une hypersurface cubique lisse dans $\mathbb{P}^5_{\mathbb{C}}$ [31].

Plus généralement, C. Voisin [32] a montré que $Z^4(W) = 0$ pour toute W de dimension 4 munie d'un morphisme $f : W \to \Gamma$ vers une courbe complexe, projective et lisse Γ, de fibre générique $X/\mathbb{C}(\Gamma)$ une hypersurface cubique dans $\mathbb{P}^4_{\mathbb{C}(\Gamma)}$, sous l'hypothèse que les seules singularités des fibres de f sont des singularités quadratiques ordinaires.

Nous montrons ici que l'énoncé vaut sans cette restriction sur les fibres singulières.

Théorème 1.1. *Soit Γ une courbe complexe, projective, lisse, connexe, et soit $f : \mathcal{X} \to \Gamma$ un morphisme propre et surjectif, de dimension relative 3, avec $\mathcal{X}$ lisse connexe, à fibre générique un solide cubique lisse. Alors $H^3_{nr}(\mathbb{C}(\mathcal{X})/\mathbb{C}, \mathbb{Q}/\mathbb{Z}(2)) = 0$ et la conjecture de Hodge entière vaut pour les cycles de codimension 2 sur $\mathcal{X}$.*

Le groupe $H^3_{nr}(\mathbb{C}(\mathcal{X})/\mathbb{C}, \mathbb{Q}/\mathbb{Z}(2))$ est formé des éléments de $H^3(\mathbb{C}(\mathcal{X}), \mathbb{Q}/\mathbb{Z}(2))$ non ramifiés par rapport à toutes les valuations. C'est donc un sous-groupe du groupe $H^3_{nr}(\mathbb{C}(\mathcal{X})/\mathbb{C}(\Gamma), \mathbb{Q}/\mathbb{Z}(2))$ formé des classes non ramifiées par rapport aux valuations triviales sur $\mathbb{C}(\Gamma)$. Nous montrons que ce groupe est déjà nul. Plus précisément, soient X la fibre générique de f, $k = \mathbb{C}(\Gamma)$, $\bar{k}$ une clôture algébrique de k, $G = \mathrm{Gal}(\bar{k}/k)$ le groupe de Galois absolu et $\overline{X} = X \times_k \bar{k}$. Utilisant des résultats de K-théorie algébrique et de cohomologie motivique à coefficients $\mathbb{Z}(2)$ [10, 20] on se ramène (voir le §4) à établir que l'application

$$CH^2(X) \to CH^2(\overline{X})^G$$

1. ↑ Depuis la soumission de notre article, S. Schreieder a construit de telles variétés W en dimension $d = 4, 5$ avec $Z^4(W) \neq 0$.

est surjective. Autrement dit, il faut voir que toute classe dans $CH^2(\overline{X})^G$ est l'image de la classe d'une courbe (définie sur k) tracée sur X.

Théorème 1.2. *Soit k un corps de fonctions d'une variable sur $\mathbb{C}$ et soit $X \subset \mathbb{P}^4_k$ un solide cubique lisse. Soient $\bar{k}$ une clôture algébrique de k, $G = \mathrm{Gal}(\bar{k}/k)$ le groupe de Galois absolu et $\overline{X} = X \times_k \bar{k}$. Alors :*
(i) *L'application naturelle $CH^2(X) \to CH^2(\overline{X})^G$ est surjective;*
(ii) $H^3_{nr}(k(X)/k, \mathbb{Q}/\mathbb{Z}(2)) = 0$.

Le groupe abélien $CH^2(\overline{X})$ est bien compris. C'est une extension de $\mathbb{Z}$ par le groupe des $\bar{k}$-points de la jacobienne intermédiaire de $\overline{X}$. Plus précisément, puisque $\overline{X}$ est rationnellement connexe, l'application degré $CH^0(\overline{X}) \to \mathbb{Z}$ est un isomorphisme. Un argument de décomposition de la diagonale ([4] Thm. 1(ii), cela utilise aussi le théorème de Merkurjev-Suslin [25]) montre que équivalence algébrique et équivalence homologique sur les cycles de codimension 2 sur $\overline{X}$ coïncident. On a ainsi une suite exacte

$$0 \to CH^2(\overline{X})_{alg} \to CH^2(\overline{X}) \to \mathbb{Z} \to 0,$$

où le groupe $CH^2(\overline{X})_{alg}$ des classes de cycles algébriquement équivalents à zéro est une incarnation des $\bar{k}$-points de la jacobienne intermédiaire, qui est a priori définie sur $\bar{k}$, par exemple, après le choix d'une $\bar{k}$-droite sur $\overline{X}$, comme la variété de Prym attachée à la fibration en coniques déterminée par cette droite (voir [3, Théorème 2.1(iii), Théorème 3.1]). Pour comprendre l'action galoisienne, nous utilisons une autre incarnation : d'après Murre [28], le groupe $CH^2(\overline{X})_{alg}$ s'identifie au groupe des $\bar{k}$-points de la variété de Picard $\mathbf{Pic}^0_{S/k}$, notée ici J/k, de la surface de Fano S/k des droites tracées sur X.

Le groupe $CH^2(\overline{X})$ est la réunion disjointe des ensembles $CH^2(\overline{X})_d$ formés des classes de cycles dont l'intersection avec un hyperplan est de degré $d \in \mathbb{Z}$. On a $CH^2(\overline{X})_d = J_d(\bar{k})$, où J_d/k est un espace principal homogène de la k-variété abélienne J. La section 2 est consacrée à la construction de ces espaces.

Pour prouver que, pour tout entier d, l'application

$$CH^2(X)_d \to CH^2(\overline{X})_d^G \tag{1}$$

est surjective, par un argument simple [32, p. 164], il suffit de le faire pour $d = 5$ et $d = 6$.

Pour $d = 5$ et $d = 6$, sur le corps des complexes et $X \subset \mathbb{P}^4_{\mathbb{C}}$ une cubique *générale*, des arguments de géométrie projective élaborés (Iliev, Markushevich, Tikhomirov [19, 23] pour $d = 5$, Voisin [32] pour $d = 6$) ont montré l'existence de désingularisations projectives et lisses $\tilde{M}_{d,1}$ de certaines composantes du schéma de Hilbert de courbes de genre 1 et de degré d tracées sur X et de morphismes d'Abel-Jacobi $\tilde{M}_{d,1} \to J_d$ qui sont dominants et dont la fibre générique est une variété géométriquement rationnellement connexe. Dans la section 3 on étend cette construction à la famille universelle de toutes les hypersurfaces cubiques lisses dans $\mathbb{P}^4_{\mathbb{C}}$.

Pour *toute* hypersurface cubique lisse dans $\mathbb{P}^4_{\mathbb{C}(\Gamma)}$ la surjection voulue (1) pour $d = 5, 6$ s'établit par un argument de spécialisation (voir la Proposition 3.4) pour les familles non-nécessairement lisses de variétés rationnellement connexes ([14, 17]) combiné au théorème de Graber, Harris et Starr [13]. La démonstration des théorèmes 1.1 et 1.2 est faite dans la section 4.

Remerciements. Ce travail a commencé à Vienne pendant le programme “Advances in Birational Geometry 2017"; nous remercions l'Institut Schrödinger pour son hospitalité et Ludmil Katzarkov pour avoir lancé ce programme. Le deuxième auteur remercie le Laboratoire de Symétrie Miroir NRU HSE, RF Government grant, ag. 14.641.31.0001 et le NSF grant 1601680 pour leurs soutiens financiers. Le premier auteur remercie l'Institut Courant, NYU, pour son hospitalité.

2. Représentants algébriques pour CH^2_{alg}

2.A. Sur un corps algébriquement clos

Soit k un corps algébriquement clos et soit X une variété algébrique connexe, projective et lisse définie sur k. Soit A une variété abélienne sur k. Rappelons [26, 27, 28], [29, Def. 1.6.1], [3, Section 3.2], [2] qu'un homomorphisme de groupes abéliens $\phi : CH^2(X)_{alg} \to A(k)$ est dit ***régulier*** si pour toute donnée d'une variété lisse connexe T sur k avec un point $t_0 \in T(k)$ et un cycle $Z \in CH^2(X \times T)$ l'application composée

$$T(k) \to CH^2(X)_{alg} \to A(k),\ t \mapsto \phi(Z_t - Z_{t_0})$$

est induite par un morphisme de variétés algébriques $T \to A$ (voir [12, Section 10.1] pour la définition du cycle Z_t). Un ***représentant*** algébrique pour $CH^2(X)_{alg}$ est une variété abélienne $\mathrm{Ab}^2(X)$ munie d'un homomorphisme régulier $\phi_{Ab} : CH^2(X)_{alg} \to \mathrm{Ab}^2(X)(k)$ qui vérifie la propriété universelle suivante : pour toute variété abélienne A et pour tout morphisme régulier $\phi : CH^2(X)_{alg} \to A(k)$ il existe un unique morphisme de variétés abéliennes $\psi : \mathrm{Ab}^2(X) \to A$ tel que le diagramme suivant

$$\begin{tikzcd} CH^2(X)_{alg} \arrow[rr, "\phi_{Ab}"] \arrow[dr, "\phi"'] & & \mathrm{Ab}^2(X)(k) \arrow[dl, "\psi"] \\ & A(k) & \end{tikzcd}$$

soit commutatif. Murre [29, Thm. 1.9], en utilisant des résultats de H. Saito, Bloch et Ogus, et Merkurjev et Suslin, a établi qu'un représentant algébrique pour $CH^2(X)_{alg}$ existe pour toute variété algébrique connexe, projective et lisse sur k (voir [28, Thm. 5] pour les solides cubiques). D'après la définition, il est donc unique à un unique isomorphisme près.

Dans le cas où X est un solide cubique lisse, on dispose d'une description explicite du représentant algébrique pour $CH^2(X)_{alg}$. Supposons que k est un corps algébriquement clos de caractéristique différente de 2 et soit $X \subset \mathbb{P}^4_k$ un solide cubique lisse. Murre [26, 27, 28] (voir aussi Beauville [3, Exemple 1.4.1 et Prop. 3.3]) exprime un représentant algébrique pour $CH^2(X)_{alg}$ en tant que variété de Prym. Plus précisément, soit $f : X' \to X$ l'éclatement de X le long d'une droite L suffisamment générale [26, Prop. (1.25)]. On a alors $CH^2(X)_{alg} \simeq CH^2(X')_{alg}$. En effet, si $E \subset X'$ est le diviseur exceptionnel, on a que $E \simeq \mathbb{P}^1_k \times \mathbb{P}^1_k$, car pour L générale $N_{L/X} \simeq \mathcal{O}_L \oplus \mathcal{O}_L$ [6, Prop. 6.19], et $CH^1(E) \simeq \mathbb{Z} \oplus \mathbb{Z}$. Soit F la fibre de la restriction $f : E \to L = \mathbb{P}^1_k$. La formule d'éclatement [12, Prop. 6.7(e)] donne alors un isomorphisme $CH^2(X) \oplus \mathbb{Z} \simeq CH^2(X')$ où l'inclusion du deuxième facteur est donnée par $n \mapsto n[F]$, d'où l'isomorphisme $CH^2(X)_{alg} \simeq CH^2(X')_{alg}$.

Le solide X' possède une structure de fibré en coniques $X' \to \mathbb{P}^2$ ordinaire : la courbe de ramification $C \subset \mathbb{P}^2$ est lisse (voir [26, Prop. 1.22 et Section 5.1]).

On a un revêtement double étale $C' \to C$ avec C' lisse connexe associé aux systèmes de génératrices des fibres dégénérées. On définit la variété de Prym $\mathrm{Prym}(C'/C)$ du revêtement connexe C'/C (voir [3]). C'est une variété abélienne principalement polarisée. On construit un isomorphisme de groupes abéliens [3, Thm. 3.1] :

$$\Phi : \mathrm{Prym}(C'/C)(k) \xrightarrow{\simeq} CH^2(X')_{alg}.$$

L'application inverse

$$\Phi^{-1} : CH^2(X')_{alg} \to \mathrm{Prym}(C'/C)(k)$$

fait de $\mathrm{Prym}(C'/C)$ un représentant algébrique de $CH^2(X')_{alg}$ [3, Prop. 3.3].

2.B. Sur un corps de caractéristique zéro

Soit k un corps quelconque de caractéristique zéro, $\bar{k}$ une clôture algébrique de k et $G = \mathrm{Gal}(\bar{k}/k)$. Soient $X \subset \mathbb{P}^4_k$ un solide cubique lisse et $\overline{X} = X \times_k \bar{k}$. Dans la suite de ce texte nous avons besoin d'une autre description du représentant algébrique pour $CH^2(\overline{X})_{alg}$.

Soit S le k-schéma qui paramètre les droites contenues dans X. C'est une k-surface projective lisse géométriquement connexe, appelée *surface de Fano* du solide cubique lisse X [1, 1.12]. On note $\bar{S} = S \times_k \bar{k}$. Soient $V \subset S \times X$

$$V = \{(L, x), x \in L\} \tag{2}$$

la variété d'incidence associée et $p : V \to S, q : V \to X$ les deux projections. Soit $\mathbf{Pic}_{S/k}$ le k-schéma de Picard de S : ce schéma représente le faisceau $\mathrm{Pic}_{S/k,(ét)}$ associé au foncteur $\mathrm{Pic}_{S/k}$ défini par

$$\mathrm{Pic}_{S/k}(T) = \mathrm{Pic}(S \times_k T)/\mathrm{Pic}(T).$$

Pour tout corps $K \supset k$ on dispose de l'application

$$p_* q^* : CH^2(X_K) \to \mathbf{Pic}_{S/k}(K) \tag{3}$$

induite par la correspondance d'incidence, où l'application q^* est définie dans [12, 6.6] pour tout morphisme localement d'intersection complète, en particulier, pour tout morphisme entre des schémas lisses (voir [22, Ex. 6.3.18]).

L'application (3) induit un homomorphisme G-équivariant

$$p_* q^* : CH^2(\overline{X}) \to \mathbf{Pic}_{S/k}(\bar{k})$$

Soit $J := \mathbf{Pic}^0_{S/k}$ la composante connexe de l'identité du schéma $\mathbf{Pic}_{S/k}$. Par restriction, on obtient l'application G-équivariante

$$p_* q^* : CH^2(\overline{X})_{alg} \to J(\bar{k}) = \mathbf{Pic}^0_{S/k}(\bar{k}).$$

On dispose aussi de l'accouplement d'intersection

$$CH^2(\overline{X}) \times CH^1(\overline{X}) \to \mathbb{Z}$$

qui est G-équivariant. Le groupe $CH^1(\overline{X}) = \mathrm{Pic}(\overline{X})$ est égal à $\mathbb{Z}$, engendré par la classe d'une section hyperplane [15, Corollaire XII.3.7].

Théorème 2.1. (i) *(Murre) L'homomorphisme induit*

$$CH^2(\overline{X})_{alg} \to \mathbf{Pic}^0_{S/k}(\bar{k}) \tag{4}$$

est un isomorphisme de modules galoisiens. Il fait de la $\bar{k}$-variété abélienne $\mathbf{Pic}^0_{S/k} \times_k \bar{k}$ un représentant algébrique de $CH^2(\overline{X})_{alg}$.

(ii) *L'équivalence algébrique et l'équivalence numérique coïncident sur $CH^2(\overline{X})$; elles coïncident aussi avec l'équivalence homologique entière si $k = \mathbb{C}$. On a une suite exacte de modules galoisiens*

$$0 \to CH^2(\overline{X})_{alg} \to CH^2(\overline{X}) \to \mathbb{Z} \to 0, \tag{5}$$

où la flèche $CH^2(\overline{X}) \to \mathbb{Z}$ est donnée par l'intersection avec un hyperplan dans $\mathbb{P}^4_{\bar{k}}$.

(iii) *Pour tout nombre entier d il existe une k-variété $J_d = J_d(X)$ qui est un espace principal homogène sous $J = J_0 = \mathbf{Pic}^0_{S/k}$ tel que $J_d(\bar{k})$ s'identifie à l'image réciproque de $d \in \mathbb{Z}$ via l'application $CH^2(\overline{X}) \to \mathbb{Z}$ dans la suite (5) ci-dessus.*

(iv) *Soit T une k-variété lisse connexe et $Z \subset X \times_k T$ un fermé plat sur T dont les fibres sont des courbes de degré d sur X. L'application induite $T(\bar{k}) \to CH^2(\overline{X})$ est elle-même induite par un k-morphisme $T \to J_d$.*

Démonstration. Pour (i) commençons par noter que l'homomorphisme (4) est régulier : pour toute variété lisse connexe T sur $\bar{k}$, tout point $t_0 \in T(\bar{k})$ et tout $Z \in CH^2(\overline{X} \times T)$, on dispose d'une famille de diviseurs $p_*q^*Z \in CH^1(\bar{S} \times T)$. On a donc que l'application

$$T(\bar{k}) \to \mathbf{Pic}^0_{S/k}(\bar{k}),\ t \mapsto p_*q^*(Z_t - Z_{t_0}) \tag{6}$$

est induite par un morphisme de variétés algébriques $T \to \mathbf{Pic}^0_{S/k}$, car le schéma $\mathbf{Pic}_{S/k}$ représente le faisceau $\mathrm{Pic}_{S/k,(ét)}$ associé au foncteur $\mathrm{Pic}_{S/k}$ [21].

Soit $\mathrm{Prym}(C'/C)$ la variété de Prym associée à $\overline{X}$ comme dans la section 2.A (après avoir choisi une droite générale contenue dans $\overline{X}$). Par la propriété universelle, on a donc un homomorphisme de variétés abéliennes $\mathrm{Prym}(C'/C) \to \mathbf{Pic}^0_{S/k} \times_k \bar{k}$, qui induit un diagramme commutatif

$$\begin{tikzcd} CH^2(\overline{X})_{alg} \arrow[rr] \arrow[dr, "p_*q^*"'] & & \mathrm{Prym}(C'/C)(\bar{k}) \arrow[dl] \\ & \mathbf{Pic}^0_{S/k}(\bar{k}) & \end{tikzcd}$$

D'après Murre [28, Thm. 8], l'application $\mathrm{Prym}(C'/C) \to \mathbf{Pic}^0_{S/k} \times_k \bar{k}$ est un isomorphisme.

Pour (ii), supposons d'abord $k = \mathbb{C}$. La variété X satisfait $CH_0(X_\Omega) = \mathbb{Z}$ pour tout surcorps algébriquement clos Ω de k. D'après le théorème de Bloch et Srinivas [4, Thm 1.2], qui utilise le théorème de Merkurjev-Suslin, ceci implique que l'équivalence algébrique et l'équivalence homologique entière coïncident sur $CH^2(X)$. L'équivalence homologique rationnelle et l'équivalence numérique coïncident pour les 1-cycles sur toute variété complexe connexe, projective et lisse (voir [9, Prop. 1.1]). Pour le solide cubique X, la conjecture de Hodge entière vaut car $H^4(X,\mathbb{Z}) \simeq \mathbb{Z}$, engendré par la classe d'une droite. En conclusion, les équivalences algébrique, numérique et homologique (entière et rationnelle) coïncident sur $CH^2(X)$ et on a donc bien une suite exacte

$$0 \to CH^2(\overline{X})_{alg} \to CH^2(\overline{X}) \to \mathbb{Z} \to 0$$

comme dans l'énoncé. Dans le cas général, fixons un plongement $\bar{k} \subset \mathbb{C}$. Soit $\alpha \in CH^2(\overline{X})$ une classe numériquement équivalente à zéro. On a le diagramme commutatif suivant

$$\begin{tikzcd} CH^2(\overline{X}) \times CH^1(\overline{X}) \arrow[r] \arrow[d] & \mathbb{Z} \arrow[d, equal] \\ CH^2(X_{\mathbb{C}}) \times CH^1(X_{\mathbb{C}}) \arrow[r] & \mathbb{Z} \end{tikzcd}$$

où les flèches horizontales sont induites par le produit d'intersection. Puisque $CH^1(\overline{X}) \simeq CH^1(X_{\mathbb{C}}) \simeq \mathbb{Z}$, on déduit que l'image $\alpha_{\mathbb{C}}$ de α dans $CH^2(X_{\mathbb{C}})$ est numériquement, donc algébriquement, équivalente à 0. Ainsi la classe $p_*q^*\alpha_{\mathbb{C}} \in \mathbf{Pic}_{S/k}(\mathbb{C})$ est dans $\mathbf{Pic}^0_{S/k}(\mathbb{C})$. Or cette classe provient de $\mathbf{Pic}_{S/k}(\bar{k})$. On a donc $p_*q^*\alpha \in \mathbf{Pic}^0_{S/k}(\bar{k})$ et α est algébriquement équivalente à zéro. La suite exacte (5) en découle.

Pour (iii), on utilise que l'extension (5) induit une suite exacte

$$0 \to CH^2(\overline{X})^G_{alg} \to CH^2(\overline{X})^G \to \mathbb{Z} \xrightarrow{\delta} H^1(k, CH^2(\overline{X})_{alg}),$$

d'où une classe de cohomologie $\delta(1)$ dans $H^1(k, CH^2(\overline{X})_{alg}) = H^1(k, J(\bar{k}))$ et donc un espace principal homogène J_1 de $J = \mathbf{Pic}^0_{S/k}$. Pour $d \in \mathbb{Z}$ on dispose d'un espace principal homogène J_d de classe $\delta(d)$: l'ensemble des $\bar{k}$-points de la k-variété J_d est la classe à gauche de $d \in \mathbb{Z}$, i.e. l'image réciproque de d dans

$CH^2(\overline{X})$, avec l'action du groupe de Galois G induite par celle sur $CH^2(\overline{X})$. L'application p_*q^* induit une application G-équivariante $J_d(\bar{k}) \hookrightarrow \mathbf{Pic}_{S/k}(\bar{k})$, via le diagramme suivant

$$\begin{tikzcd} 0 \arrow[r] & CH^2(\overline{X})_{alg} \arrow[r] \arrow[d, "p_*q^*"', "\simeq"] & CH^2(\overline{X}) \arrow[r] \arrow[d, "p_*q^*"'] & \mathbb{Z} \arrow[r] \arrow[d, hook, "p_*q^*"'] & 0 \\ 0 \arrow[r] & \mathbf{Pic}^0_{S/k}(\bar{k}) \arrow[r] & \mathbf{Pic}_{S/k}(\bar{k}) \arrow[r] & \mathbf{NS}_{S/k}(\bar{k}) \arrow[r] & 0. \end{tikzcd} \tag{7}$$

On peut donc aussi voir J_d comme une composante du schéma $\mathbf{Pic}_{S/k}$.

Soit T une k-variété lisse connexe et $Z \subset X \times_k T$ comme dans (iv). Soit $[Z] \in CH^2(X \times T)$ la classe de $[Z]$. La classe $p_*q^*[Z] \in CH^1(S \times_k T)$ induit un morphisme algébrique

$$T \to \mathbf{Pic}_{S/k}. \tag{8}$$

Puisque les fibres de Z au-dessus de T sont des courbes de degré d, l'image de $T(\bar{k})$ est contenue dans $J_d(\bar{k}) \subset \mathbf{Pic}_{S/k}(\bar{k})$. L'application (8) ci-dessus se factorise donc par une application algébrique $T \to J_d$, comme affirmé dans l'énoncé. □

Remarque 2.2. Dans le cas où $k = \mathbb{C}$, la flèche $CH^2(X) \to \mathbb{Z}$ dans l'extension (5) s'identifie à l'application classe de cycle $CH^2(X) \to H^4(X, \mathbb{Z})$, où $H^4(X, \mathbb{Z}) \simeq \mathbb{Z}$ est engendré par la classe d'une droite. Via le diagramme (7) la variété J_d correspond à une composante de $\mathbf{Pic}_{S/k}$ d'éléments de classe p_*q^*d.

3. Espaces de modules pour une famille de cubiques

3.A. Espaces de modules des courbes de genre 1

Soit $k = \mathbb{C}$ et soit $X \subset \mathbb{P}^4_{\mathbb{C}}$ un solide cubique lisse.

Soit $C \subset \mathbb{P}^4_{\mathbb{C}}$ une courbe connexe, projective et lisse. Rappelons que C est dite ***non-dégénérée*** si l'application

$$H^0(\mathbb{P}^4_{\mathbb{C}}, \mathcal{O}_{\mathbb{P}^4_{\mathbb{C}}}(1)) \to H^0(C, \mathcal{O}_C(1)), \tag{9}$$

induite par la suite exacte de faisceaux

$$0 \to I_C \to \mathcal{O}_{\mathbb{P}^4_{\mathbb{C}}} \to \mathcal{O}_C \to 0$$

est injective. On dit que C est ***(linéairement) normale*** si l'application (9) est surjective. On dit que C est ***projectivement normale*** si l'application $H^0(\mathbb{P}^4_{\mathbb{C}}, \mathcal{O}_{\mathbb{P}^4_{\mathbb{C}}}(m)) \to H^0(C, \mathcal{O}_C(m))$ est surjective pour tout $m \geq 1$. Notons que la dimension de l'espace $H^0(\mathbb{P}^4_{\mathbb{C}}, \mathcal{O}_{\mathbb{P}^4_{\mathbb{C}}}(1))$ vaut 5. Si C est de genre 1 et de degré 5, d'après Riemann-Roch, la dimension de l'espace $H^0(C, \mathcal{O}_C(1))$ vaut 5 aussi. Dans ce cas, la courbe C est non-dégénérée si et seulement si elle est linéairement normale. D'après [18, Prop. IV.1.2], la courbe C est alors aussi projectivement normale.

Dans la suite de ce texte, on aura besoin d'espaces de modules de courbes $C \subset X$ de genre 1 et de degré 5 ou 6. Suivant [23, 19, 32], pour $d = 5, 6$ on considère $M_{d,1}(X)$ l'union des composantes, avec la structure réduite, du schéma de Hilbert de X dont le point général paramètre les courbes $C \subset X$, lisses connexes, de genre 1, de degré d, contenues dans X et non-dégénérées dans $\mathbb{P}^4_{\mathbb{C}}$. Les points de ces espaces $M_{5,1}(X)$ et $M_{6,1}(X)$ paramètrent donc des courbes projectives (peut-être réductibles) de degré 5 et 6 respectivement. L'espace $M_{5,1}(X)$ est irréductible, de dimension 10 [23, Thm. 4.5], [16, Thm. 8.1]. Pour X générale, l'espace $M_{6,1}(X)$ est irréductible de dimension 12 [32, p. 153].

On fixe une désingularisation $\tau_5 : \tilde{M}_{5,1}(X) \to M_{5,1}(X)$ (resp. $\tau_6 : \tilde{M}_{6,1}(X) \to M_{6,1}(X)$). Les morphismes τ_5 et τ_6 sont des morphismes propres birationnels.

Si $Z_d \subset M_{d,1}(X) \times X$, $d = 5, 6$ est la restriction de la famille universelle, d'après le Théorème 2.1(iv), on dispose d'une application rationnelle $M_{d,1}(X) \dashrightarrow J_d$. Puisque $\tilde{M}_{d,1}(X)$ est lisse, cette application s'étend en un morphisme $\tilde{M}_{d,1}(X) \to J_d$, défini à partir de la famille $Z_d \times_{M_{d,1}(X)} \tilde{M}_{d,1}(X)$. On l'appelle ici l'application *d'Abel-Jacobi.*

Théorème 3.1. ([19, Thm. 3.2], [23, Thm. 5.6], [24, Thm. 4.7], [32, Thm. 3.1]) *Soient $k = \mathbb{C}$ et $X \subset \mathbb{P}^4_k$ un solide cubique très général. Alors les applications d'Abel-Jacobi*

$$\tilde{M}_{5,1}(X) \to J_5 \text{ et } \tilde{M}_{6,1}(X) \to J_6$$

définies ci-dessus sont surjectives, à fibre générique géométrique rationnellement connexe.

La démonstration de ces résultats repose sur des arguments de géométrie projective élaborés. Les arguments dans [19, 23, 32] utilisent l'hypothèse $k = \mathbb{C}$. Dans le cas de l'espace de modules $\tilde{M}_{5,1}(X)$ l'énoncé vaut pour k algébriquement clos de caractéristique positive, différente de 2, d'après [24]. Dans ce cas, on a un énoncé plus fort : sur les k-points généraux, les fibres de l'application d'Abel-Jacobi sont isomorphes à $\mathbb{P}^5_k$.

3.B. Construction en famille

Soit $P \subset \mathbb{P}^{34}_{\mathbb{C}}$ l'ouvert, dans l'espace projectif des coefficients des solides cubiques, qui paramètre les solides lisses et soit $\mathcal{X} \to P$ la famille universelle correspondante. On dispose d'une famille $\mathcal{S} \to P$ dont la fibre en un point $t \in P$ est la surface de Fano de $\mathcal{X}_t$. On dispose aussi d'une correspondance d'incidence $\mathcal{V} \subset \mathcal{S} \times \mathcal{X}$ et on note comme avant $p : \mathcal{V} \to \mathcal{S}$ et $q : \mathcal{V} \to \mathcal{X}$ les deux projections :

$$\begin{tikzcd} & \mathcal{V} \arrow[dl, "p"'] \arrow[dr, "q"] \arrow[dd] & \\ \mathcal{S} \arrow[dr] & & \mathcal{X} \arrow[dl] \\ & P & \end{tikzcd} \quad . \tag{10}$$

Dans ce diagramme, les morphismes p et $\mathcal{S} \to P$ sont lisses, et donc le morphisme $\mathcal{V} \to P$ l'est aussi. Les schémas quasi-projectifs $\mathcal{V}, \mathcal{X}, P$ sont des $\mathbb{C}$-schémas lisses. Le morphisme q est un morphisme localement d'intersection complète, puisque les schémas $\mathcal{V}$ et $\mathcal{X}$ sont lisses sur $\mathbb{C}$.

Soit $\mathcal{M}_{d,1}$, $d = 5, 6$ la composante irréductible (avec sa structure réduite) du schéma de Hilbert relatif $Hilb_{\mathcal{X}/P}$ dont le point complexe général paramètre une courbe lisse connexe de genre 1 et de degré d, non dégénérée dans $\mathbb{P}^4_{\mathbb{C}}$, et qui domine P. Une telle composante existe et elle est unique puisque l'espace $M_{d,1}(\mathcal{X}_t)$ est irréductible pour $t \in P(\mathbb{C})$ général, de dimension 10 pour $d = 5$ et de dimension 12 pour $d = 6$ (voir la section précédente). On a que $\mathcal{M}_{d,1}$ est un sous-schéma fermé du schéma de Hilbert relatif $Hilb_{\mathcal{X}/P}$, et que $\mathcal{M}_{d,1,t} \subset M_{d,1}(\mathcal{X}_t)$ pour $t \in P(\mathbb{C})$. On fixe $\tau_d : \tilde{\mathcal{M}}_{d,1} \to \mathcal{M}_{d,1}$ une désingularisation de $\mathcal{M}_{d,1}$. Le morphisme τ_d est propre est birationnel.

On dispose d'une famille universelle $\mathcal{Z}_d \subset \mathcal{X} \times_P \mathcal{M}_{d,1}$, la projection $\mathcal{Z}_d \to \mathcal{M}_{d,1}$ est un morphisme plat, dont les fibres sont des courbes de degré d et de genre 1. On note $\tilde{\mathcal{Z}}_d = \mathcal{Z}_d \times_{\mathcal{M}_{d,1}} \tilde{\mathcal{M}}_{d,1}$ la famille induite, de sorte que le digramme suivant est un produit fibré

$$\begin{tikzcd} \tilde{\mathcal{Z}}_d \arrow[r, hook] \arrow[d] & \mathcal{X} \times_P \tilde{\mathcal{M}}_{d,1} \arrow[d] \\ \mathcal{Z}_d \arrow[r, hook] & \mathcal{X} \times_P \mathcal{M}_{d,1}. \end{tikzcd}$$

On considère le diagramme suivant induit par le diagramme (10) :

$$\begin{tikzcd}
 & \mathcal{V} \times_P \tilde{\mathcal{M}}_{d,1} \arrow[dl, "p"'] \arrow[dr, "q"] \arrow[dd] & \\
\mathcal{S} \times_P \tilde{\mathcal{M}}_{d,1} \arrow[dr] & & \mathcal{X} \times_P \tilde{\mathcal{M}}_{d,1} \arrow[dl] \\
 & \tilde{\mathcal{M}}_{d,1} &
\end{tikzcd} \qquad . \tag{11}$$

Les morphismes p et $\mathcal{V} \times_P \tilde{\mathcal{M}}_{d,1} \to \tilde{\mathcal{M}}_{d,1}$ sont lisses, les schémas $\tilde{\mathcal{M}}_{d,1}$, $\mathcal{V} \times_P \tilde{\mathcal{M}}_{d,1}$ et $\mathcal{X} \times_P \tilde{\mathcal{M}}_{d,1}$ sont lisses aussi, cela implique en particulier que le morphisme q est un morphisme localement d'intersection complète. On note

$$q^* : CH_*(\mathcal{X} \times_P \tilde{\mathcal{M}}_{d,1}) \to CH_*(\mathcal{V} \times_P \tilde{\mathcal{M}}_{d,1}) \tag{12}$$

le morphisme de Gysin "raffiné" qui est défini pour tout morphisme localement d'intersection complète dans [12, Chapter 6.6]. Puisque $\tilde{p}$ est propre, le morphisme

$$p_* : CH_*(\mathcal{V} \times_P \tilde{\mathcal{M}}_{d,1}) \to CH_*(\mathcal{S} \times_P \tilde{\mathcal{M}}_{d,1})$$

est bien défini lui aussi. On peut donc définir la classe $p_* q^* \tilde{\mathcal{Z}}_d$ dans

$$CH^1(\mathcal{S} \times_P \tilde{\mathcal{M}}_{d,1}) = \mathrm{Pic}(\mathcal{S} \times_P \tilde{\mathcal{M}}_{d,1}),$$

induite par la famille $\tilde{\mathcal{Z}}_d$; la dernière égalité vient du fait que le schéma $S \times_P \tilde{\mathcal{M}}_{d,1}$ est lisse.

Soit $\mathbf{Pic}_{\mathcal{S}/P}$ le P-schéma de Picard de $\mathcal{S}$: ce schéma représente le faisceau $\mathrm{Pic}_{\mathcal{S}/P,(ét)}$ associé au foncteur $\mathrm{Pic}_{\mathcal{S}/P}$ défini par

$$\mathrm{Pic}_{\mathcal{S}/P}(T) = \mathrm{Pic}(\mathcal{S} \times_P T)/\mathrm{Pic}(T).$$

L'image de $p_* q^* \tilde{\mathcal{Z}}_d$ par la surjection naturelle

$$\mathrm{Pic}(\mathcal{S} \times_P \tilde{\mathcal{M}}_{d,1}) \to \mathrm{Pic}(\mathcal{S} \times_P \tilde{\mathcal{M}}_{d,1})/\mathrm{Pic}(\tilde{\mathcal{M}}_{d,1})$$

induit un élément de $\mathbf{Pic}_{\mathcal{S}/P}(\tilde{\mathcal{M}}_{d,1})$. On a donc un morphisme

$$\tilde{\mathcal{M}}_{d,1} \to \mathbf{Pic}_{\mathcal{S}/P}. \tag{13}$$

Lemme 3.2. *Soit $a_1 \in P$ un point et soit $F = \kappa(a_1)$ le corps résiduel de a_1. Soient $a_2 \in \tilde{\mathcal{M}}_{d,1}(F)$ au-dessus du point a_1 et $a_3 = \tau_d(a_2) \in \mathcal{M}_{d,1}(F)$. On a alors*

$$(p_* q^* \tilde{\mathcal{Z}}_d)|_{a_2} = p_* q^* (\tilde{\mathcal{Z}}_{d,a_2}) = p_* q^* (\mathcal{Z}_{d,a_3}),$$

où $\tilde{\mathcal{Z}}_{d,a_2}$ (resp. $\mathcal{Z}_{d,a_3}$) est la fibre de $\tilde{\mathcal{Z}}_d$ (resp. $\mathcal{Z}_d$) en un point a_2 (resp. a_3), le morphisme $p_* q^*$ est défini ci-dessus (voir aussi (3)) et $(p_* q^* \tilde{\mathcal{Z}}_d)|_{a_2}$ est la reststriction du cycle $(p_* q^* \tilde{\mathcal{Z}}_d)$ au point a_2 : l'image par le morphisme de Gysin associé au morphisme $a_2 \to \tilde{\mathcal{M}}_{d,1}$ entre les schémas lisses.

Démonstration. On note d'abord que, puisque $\tilde{\mathcal{Z}}_d$ est plat sur $\tilde{\mathcal{M}}_{d,1}$, on a que la fibre $\tilde{\mathcal{Z}}_{d,a_2}$ est une courbe de degré d dont la classe dans $CH_1(\mathcal{X}_{a_1})$ est bien définie. On a l'égalité $\tilde{\mathcal{Z}}_{d,a_2} = \mathcal{Z}_{d,a_3}$ d'après la définition. Supposons d'abord $F = \mathbb{C}$. On considère le produit fibré suivant

$$\begin{tikzcd}
\mathcal{V}_{a_1} \arrow[r] \arrow[d, "q"] & \mathcal{V} \times_P \tilde{\mathcal{M}}_{d,1} \arrow[d, "q"] \\
\mathcal{X}_{a_1} \arrow[r] & \mathcal{X} \times_P \tilde{\mathcal{M}}_{d,1}
\end{tikzcd}$$

Tous les schémas dans ce diagramme sont des schémas lisses ; toutes les flèches sont donc des morphismes localement d'intersection complète. Par la fonctorialité de la construction du morphisme de Gysin [12, Theorem 6.5, Theorem 6.6] on a

$$q^*(\tilde{\mathcal{Z}}_{d,a_2}) = (q^*\tilde{\mathcal{Z}}_d)|_{a_2} \tag{14}$$

pour le cycle $\tilde{\mathcal{Z}}_{d,a_2} \in CH_1(\mathcal{X}_{a_1})$. De même, on a le diagramme

$$\begin{tikzcd} \mathcal{V}_{a_1} \arrow[r] \arrow[d, "p"] & \mathcal{V} \times_P \tilde{\mathcal{M}}_{d,1} \arrow[d, "p"] \\ \mathcal{S}_{a_1} \arrow[r] & \mathcal{S} \times_P \tilde{\mathcal{M}}_{d,1} \end{tikzcd}$$

et, par la compatibilité des morphismes p_* et des morphismes de Gysin (c'est-à-dire des restrictions $|_{a_2}$) [12, Theorem 6.2, Theorem 6.6] on obtient

$$p_*((q^*\tilde{\mathcal{Z}}_d)|_{a_2}) = (p_*q^*\tilde{\mathcal{Z}}_d)|_{a_2}. \tag{15}$$

On déduit donc des égalités (14) et (15) le résultat voulu :

$$p_*q^*(\tilde{\mathcal{Z}}_{d,a_2}) = p_*((q^*\tilde{\mathcal{Z}}_d)|_{a_2}) = (p_*q^*\tilde{\mathcal{Z}}_d)|_{a_2}.$$

Le cas général (F est le corps résiduel du point a_1) se montre par le même argument : on remplace $\mathcal{V}_{a_1}$ par des schémas lisses au-dessus d'un ouvert (suffisamment petit) dans l'adhérence du point a_1. □

Soit $\mathcal{J} \to P$ la famille de "Jacobiennes intermédiaires" $\mathcal{J} = \mathcal{J}_0 = \mathbf{Pic}^0_{\mathcal{S}/P}$.

Proposition 3.3. *Pour tout $d \in \mathbb{Z}$ il existe un sous-schéma fermé*

$$\mathcal{J}_d \subset \mathbf{Pic}_{\mathcal{S}/P}$$

tel que, pour tout $s \in P$, $\mathcal{J}_{d,s} = J_d(\mathcal{X}_s)$ comme défini dans le théorème 2.1(iii).

Démonstration. Pour tout $U \to P$ un schéma lisse au-dessus de P tel que $S(U) \neq \emptyset$ on définit un sous-schéma $\mathcal{J}_{d,U} \subset \mathbf{Pic}_{\mathcal{S}/P} \times_P U$ comme le translaté du schéma $\mathbf{Pic}^0_{\mathcal{S}/P} \times_P U$ par $dp_*q^*L_U$, où L_U est une famille de droites qui correspond à un élément de $S(U)$. Notons que cette définition ne dépend pas du choix de L_U, car pour une autre famille L'_U on a que pour tout point géométrique $\bar{u} \in U$ les classes des droites $L_{\bar{u}}$ et $L'_{\bar{u}}$ sont algébriquement équivalentes dans $CH^2(\mathcal{X}_{\bar{u}})$, donc $dp_*q^*L_U - dp_*q^*L'_U$ induit un élément de $\mathbf{Pic}^0_{\mathcal{S}/P}(U)$. On en déduit en particulier que pour tout $V \to U$ avec V lisse, $\mathcal{J}_{d,V} = \mathcal{J}_{d,U} \times_U V$.

On choisit un recouvrement étale $\{U_i \to P\}_{i\in I}$ de P tel que $\mathcal{S}(U_i) \neq \emptyset$ pour tout $i \in I$. D'après la construction ci-dessus, on dispose des sous-schémas $\mathcal{J}_{d,U_i} \subset \mathbf{Pic}_{\mathcal{S}/P} \times_P U_i$, tels que pour tout $i, j \in I$ on a $\mathcal{J}_{d,U_i} \times_{U_i} U_j = \mathcal{J}_{d,U_j} \times_{U_j} U_i$ comme sous-schémas de $\mathbf{Pic}_{\mathcal{S}/P} \times_P U_i \times_P U_j$. Par la descente *fpqc* des sous-schémas fermés [5, Chapter 6, Thm. 4], il existe un sous-schéma fermé $\mathcal{J}_d \subset \mathbf{Pic}_{\mathcal{S}/P}$ tel que $\mathcal{J}_{d,U_i} = \mathcal{J}_d \times_P U_i$ pour tout $i \in I$.

D'après la construction, on a $\mathcal{J}_{d,s} = J_d(\mathcal{X}_s)$ pour tout $s \in P$. □

Puisque $\tilde{\mathcal{M}}_{d,1}$ paramètre des courbes de degré d, on a que le morphisme (13) se factorise par le schéma $\mathcal{J}_d \subset \mathbf{Pic}_{\mathcal{S}/P}$ et induit donc un morphisme algébrique

$$\phi_d : \tilde{\mathcal{M}}_{d,1} \to \mathcal{J}_d \tag{16}$$

au-dessus de P.

Proposition 3.4. *Soit $\mathcal{X} \to P$ la famille des solides cubiques lisses. Pour $d \in \{5,6\}$, soit $\phi_d : \tilde{\mathcal{M}}_{d,1} \to \mathcal{J}_d$ l'application définie ci-dessus.*

Pour tout point $s \in \mathcal{J}_d$ de corps résiduel $k = \kappa(s)$ le corps des fonctions d'une variable sur $\mathbb{C}$, la fibre $\tilde{\mathcal{M}}_{d,1,s}$ au-dessus de s admet un k-point : $\tilde{\mathcal{M}}_{d,1,s}(k) \neq \emptyset$.

Démonstration. D'après la compatibilité dans le lemme 3.2, on peut appliquer le théorème 3.1 à la restriction de l'application $\phi_d : \tilde{\mathcal{M}}_{d,1} \to \mathcal{J}_d$ à la fibre générique géométrique, qui est donc rationnellement connexe. D'après un résultat de Hogadi et Xu [17, Thm. 1.2] (voir aussi [14, Prop. 2.7]), toute fibre de ϕ_d au dessus d'un point (pas nécessairement un point fermé) de $\mathcal{J}_d$ admet une sous-variété géométriquement irréductible et rationnellement connexe. On applique ce résultat à la fibre $\tilde{\mathcal{M}}_{d,1,s}$ comme dans l'énoncé : soit $W \subset \tilde{\mathcal{M}}_{d,1,s}$ une sous-variété rationnellement connexe, définie sur k. On a alors $W(k) \neq \emptyset$ d'après le théorème de Graber, Harris et Starr [13], d'où le résultat. □

4. Preuve des théorèmes 1.1 et 1.2

Preuve du théorème 1.2.

Montrons (i). Soit $\xi \in CH^2(\overline{X})^G$. Soit $h^2 \in CH^2(X)$, où h est la classe d'une section hyperplane, le degré de h (la classe de h dans $H^4(\overline{X}, \mathbb{Z}(2)) \simeq \mathbb{Z}$) vaut 3. On peut donc supposer, quitte à remplacer ξ par $\pm\xi + nh$, où $n \in \mathbb{Z}$, que le degré d de ξ est $d = 5$ ou 6. Soit $\mathcal{X} \to P$ la famille universelle des cubiques, comme définie dans la partie 3.B. Puisque la cubique X est lisse, il existe un k-point $a_1 \in P(k)$ tel que $X = \mathcal{X}_t$. Soit $s = p_*q^*(\xi) \in \mathcal{J}_d(\bar{k})$ (cf. Théorème 2.1 et Proposition 3.3). Puisque $\xi \in CH^2(\overline{X})^G$ et l'application p_*q^* est équivariante pour l'action du groupe G d'après la définition (3), on en déduit que s provient d'un point de $\mathcal{J}_d(k)$ (que l'on note toujours s). D'après la proposition 3.4, il existe un point $a_2 \in \tilde{\mathcal{M}}_{d,1,s}(k)$ au-dessus de s. Par la fonctorialité dans le lemme 3.2 l'image a_3 de ce point dans $\mathcal{M}_{d,1,s}(k) \subset Hilb\,\mathcal{X}_t(k)$ correspond à une courbe $C = \mathcal{Z}_{d,a_3}$ de genre 1 de degré d sur $X = \mathcal{X}_t$ telle que $p_*q^*C = s = p_*q^*(\xi)$ et donc l'image de la classe de C dans $CH^2(\overline{X})^G$ vaut ξ. On en déduit que l'application $CH^2(X) \to CH^2(\overline{X})^G$ est surjective.

Montrons maintenant (ii). D'après [10, Corollaire 4.2(iii)], qui s'applique pour X un solide cubique lisse sur k corps de fonctions d'une variable sur $\mathbb{C}$, on a une suite exacte

$$H^1(G, \operatorname{Pic}\overline{X} \otimes \bar{k}^*) \to H^3_{nr}(k(X)/k, \mathbb{Q}/\mathbb{Z}(2))/H^3(k, \mathbb{Q}/\mathbb{Z}(2)) \\ \to \operatorname{coker}[CH^2(X) \to CH^2(\overline{X})^G] \to H^2(G, \operatorname{Pic}\overline{X} \otimes \bar{k}^*).$$

Pour établir l'existence de cette suite exacte, on utilise des techniques de K-théorie et les groupes de cohomologie motivique à coefficients $\mathbb{Z}(2)$ [20].

Par [15, Corollaire XII.3.7], on a $\operatorname{Pic}\overline{X} \simeq \mathbb{Z}$; le premier groupe est nul par le théorème 90 de Hilbert. On a aussi $H^3(k, \mathbb{Q}/\mathbb{Z}(2)) = 0$ car $\operatorname{cd}(k) \leq 1$. On en déduit qu'on a une injection

$$H^3_{nr}(k(X)/k, \mathbb{Q}/\mathbb{Z}(2)) \hookrightarrow \operatorname{coker}[CH^2(X) \to CH^2(\overline{X})^G].$$

Le résultat (i) donne alors (ii). [On remarque que le groupe $H^2(G, \operatorname{Pic}\overline{X} \otimes \bar{k}^*) = \operatorname{Br} k$ est nul lui aussi car $\operatorname{cd}(k) \leq 1$.] □

Preuve du théorème 1.1.

Le théorème [8, Théorème 1.1] s'applique à $\mathcal{X}$ et donne un isomorphisme $H^3_{nr}(\mathbb{C}(\mathcal{X})/\mathbb{C}, \mathbb{Q}/\mathbb{Z}(2)) \xrightarrow{\simeq} Z^4(\mathcal{X})$. Il suffit donc de considérer le premier groupe. Soient $k = \mathbb{C}(\Gamma)$ et X/k la fibre générique de f. Puisque $H^3_{nr}(\mathbb{C}(\mathcal{X})/\mathbb{C}, \mathbb{Q}/\mathbb{Z}(2)) \subset H^3_{nr}(k(X)/k, \mathbb{Q}/\mathbb{Z}(2))$, le théorème 1.2 (ii) implique $H^3_{nr}(\mathbb{C}(\mathcal{X})/\mathbb{C}, \mathbb{Q}/\mathbb{Z}(2)) = 0$. □

Remarque 4.1. L'article [32] contient l'analogue du théorème 1.1 pour les familles $\mathcal{X} \to \Gamma$ dont la fibre générique X est une intersection lisse de deux quadriques dans $\mathbb{P}^5$, avec une restriction sur les fibres spéciales [32, Thm. 1.4] ([32, Cor. 2.7]). Dans ce cas, cette restriction a été éliminée dans [7, Cor. 3.1]. Il suffisait là d'invoquer le calcul de la cohomologie non ramifiée en degré 3 des quadriques sur un corps quelconque, qui donne $H^3_{nr}(k(X)/k, \mathbb{Q}/\mathbb{Z}(2)) = 0$ pour $k = \mathbb{C}(\Gamma)$ et donc $H^3_{nr}(\mathbb{C}(\mathcal{X})/\mathbb{C}, \mathbb{Q}/\mathbb{Z}(2)) = 0$.

Références

[1] A. Altman et S. Kleiman, *Foundations of the theory of Fano schemes*, Compositio Math. **34** (1977), no. 1, 3–47. MR-0569043

[2] J. Achter, S. Casalaina-Martin et Ch. Vial, *On descending cohomology geometrically*, Compositio Math. **153** (2017), no. 7, 1446–1478. MR-3705264

[3] A. Beauville, *Variétés de Prym et jacobiennes intermédiaires*, Ann. Sci. École Norm. Sup. (4) **10** (1977), no. 3, 309–391. MR-0472843

[4] S. Bloch et V. Srinivas, *Remarks on correspondences and algebraic cycles*, Amer. J. of Math. **105** (1983), no. 5, 1235–1253. MR-0714776

[5] S. Bosch, W. Lütkebohmert et M. Raynaud, *Néron Models*, Ergebnisse der Mathematik und ihrer Grenzgebiete (3), vol. 21, Springer-Verlag, Berlin, 1990. MR-1045822

[6] H. Clemens et P. Griffiths, *The intermediate Jacobian of the cubic threefold*, Ann. of Math. (2) **95** (1972), 281–356. MR-0302652

[7] J.-L. Colliot-Thélène, *Quelques cas d'annulation du troisième groupe de cohomologie non ramifiée.* Dans : Regulators (Proceedings of the Regulators III Conference held in Barcelona, July 12-22, 2010), pp. 45–50, Contemporary Math., vol. 571, Amer. Math. Soc., Providence, RI, 2012. MR-2953408

[8] J.-L. Colliot-Thélène et C. Voisin, *Cohomologie non ramifiée et conjecture de Hodge entière*, Duke Math. J. **161** (2012), no. 5, 735–801. MR-2904092

[9] J.-L. Colliot-Thélène et A. N. Skorobogatov, *Descente galoisienne sur le groupe de Brauer*, J. reine angew. Math. **682** (2013), 141–165. MR-3181502

[10] J.-L. Colliot-Thélène, *Descente galoisienne sur le second groupe de Chow : mise au point et applications*, Doc. Math. (2015), extra vol. : Alexander S. Merkurjev's sixtieth Birthday, 195–220. MR-3404380

[11] J.-L. Colliot-Thélène, *Troisième groupe de cohomologie non ramifiée des hypersurfaces de Fano*, Tunisian Journal of Mathematics **1** (2019), no. 1, 47–57.

[12] W. Fulton, *Intersection theory*, 2nd edition, Ergebnisse der Mathematik und ihrer Grenzgebiete (3), vol. 2, Springer-Verlag, Berlin, 1998. MR-1644323

[13] T. Graber, J. Harris et J. Starr, *Families of rationally connected varieties*, J. Amer. Math. Soc. **16** (2003), no. 1, 57–67. MR-1937199

[14] T. Graber, J. Harris, B. Mazur et J. Starr, *Rational connectivity and sections of families over curves*, Ann. Sci. École Norm. Sup. (4) **38** (2005), no. 5, 671–692. MR-2195256

[15] A. Grothendieck, *Cohomologie locale des faisceaux cohérents et théorèmes de Lefschetz locaux et globaux (SGA 2)*, Advanced Studies in Pure Mathematics, vol. 2, North-Holland, Amsterdam, 1968 ; nouvelle édition : Documents Mathématiques (Paris), vol. 4, Société mathématique de France, Paris, 2005. MR-2171939

[16] J. Harris, M. Roth et J. Starr, *Curves of small degree on cubic threefolds*, Rocky Mountain J. Math. **35** (2005) no. 3, 761–817. MR-2150309

[17] A. Hogadi et Ch. Xu, *Degenerations of rationally connected varieties*, Trans. Amer. Math. Soc. **361** (2009), no. 7, 3931–3949. MR-2491906

[18] K. Hulek, *Projective geometry of elliptic curves*, Astérisque No. 137 (1986). MR-0845383

[19] A. Iliev et D. Markushevich, *The Abel-Jacobi map of a cubic threefold and periods of Fano threefolds of degree 14*, Doc. Math. **5** (2000), 23–47. MR-1739270

[20] B. Kahn, *Applications of weight-two cohomology*, Doc. Math. **1** (1996), no. 17, 395–416. MR-1423901

[21] S. Kleiman, *The Picard scheme.* Dans : Fundamental algebraic geometry, pp. 235–321, Math. Surveys Monogr., vol. 123, Amer. Math. Soc., Providence, RI, 2005. MR-2223410

[22] Q. Liu, *Algebraic geometry and arithmetic curves*, Oxford Graduate Texts in Mathematics, vol. 6, Oxford Science Publications, Oxford University Press, Oxford, 2002. MR-1917232

[23] D. Markushevich et A. Tikhomirov, *The Abel-Jacobi map of a moduli component of vector bundles on the cubic threefold*, J. Algebraic Geom. **10** (2001), no. 1, 37–62. MR-1795549

[24] R. Mboro, *On the universal* CH_0*-group of cubic threefolds in positive characteristic*, manuscripta math. **154** (2017), no. 1-2, 147–168. MR-3682208

[25] A. S. Merkurjev et A. A. Suslin, K*-cohomology of Severi-Brauer varieties and the norm residue homomorphism*, Izv. Akad. Nauk SSSR Ser. Mat. **46** (1982), no. 5, 1011– 1046, 1135–1136. MR-0675529

[26] J. P. Murre, *Algebraic equivalence modulo rational equivalence on a cubic threefold*, Compositio Math. **25** (1972), 161–206. MR-0352088

[27] J. P. Murre, *Reduction of the proof of the non-rationality of a non-singular cubic threefold to a result of Mumford*, Compositio Math. **27** (1973), 63–82. MR-0352089

[28] J. P. Murre, *Some results on cubic threefolds.* Dans : Classification of algebraic varieties and compact complex manifolds, pp. 140–160, Lecture Notes in Math., vol. 412, Springer, Berlin, 1974. MR-0374145

[29] J. P. Murre, *Applications of algebraic* K*-theory to the theory of algebraic cycles.* Dans : Algebraic geometry, Sitges (Barcelona), 1983, pp. 216–261, Lecture Notes in Math., vol. 1124, Springer, Berlin, 1985. MR-0805336

[30] C. Voisin, *Théorie de Hodge et géométrie algébrique complexe*, Cours Spécialisés, vol. 10, Société Mathématique de France, Paris, 2002. MR-1988456

[31] C. Voisin, *Some aspects of the Hodge conjecture*, Jpn. J. Math. **2** (2007), no. 2, 261–296. MR-2342587

[32] C. Voisin, *Abel-Jacobi map, integral Hodge classes and decomposition of the diagonal*, J. Algebraic Geom. **22** (2013), no. 1, 141–174. MR-2993050