Del Pezzo Flächen ohne rationale Punkte auf Körpern der kohomologischen Dimension 1

J.-L. Colliot-Thélène et D. Madore

C.N.R.S. et Université Paris-Sud (Orsay)

C_1-**Körper** (Lang)

Man sagt, k ist ein C_1-Körper, wenn folgendes gilt:

Jedes System von Gleichungen

$$F_i(T_1, \cdots, T_n) = 0, \qquad i = 1, \cdots, r$$

wobei alle F_i homogene Formen mit Koeffizienten in k, vom Grad d sind, besitzt eine nichttriviale Nullstelle $(t_1, \cdots, t_n) \in k^n$:

$$F_i(t_1, \cdots, t_n) = 0,$$

sobald $n > rd$ gilt.

Beispiele von Systemen

– Eine quadratische Form in mehr als 2 Variablen

– Eine kubische Form in mehr als 3 Variablen

– Ein System von zwei quadratischen Formen in mehr als 4 Variablen

Beispiele von C_1-Körpern

1) $k = \mathbf{F}$ ist ein endlicher Körper.

Der Fall $d = 2, r = 1$ geht auf Euler zurück. Der allgemeine Fall ist der Satz von Chevalley-Warning.

2) k ist ein Funktionenkörper in einer Variable, das heißt, k ist der Funktionenkörper einer Kurve über einem algebraisch abgeschlossenen Körper, d. h. k ist eine endliche Erweiterung des rationalen Funktionenkörpers $C(T)$, mit C algebraisch abgeschlossen.

Der Fall $d = 2, r = 1$ geht auf Max Noether zurück, der allgemeine Fall ist der Satz von Tsen.

3) $k = C((t))$ ist der Körper der formalen Potenzreihen in einer Variable über einem algebraisch abgeschlossenen Körper.

Körper der kohomologischen Dimension 1
(Tate, Serre)

Es sei k ein perfekter Körper und $G = \mathrm{Gal}(k_s/k)$ die absolute Galoisgruppe des Körpers k. Man sagt, k hat die kohomologische Dimension 1, und schreibt $\mathrm{cd}(k) \leq 1$ wenn die folgenden äquivalenten Eigenschaften erfüllt sind:

1) Es sei M ein endlicher G-Modul.
Für alle $i \geq 2$,

$$H^i(G, M) = 0.$$

2) Ist K/k eine endliche Erweiterung von k, so verschwindet die Brauergruppe von K:

$$\mathrm{Br}(K) = 0.$$

3) Es sei G/k eine zusammenhängende lineare algebraische Gruppe über k und X/k ein homogener Raum von G. Dann besitzt X einen rationalen Punkt:

$$X(k) \neq \emptyset.$$

4) Falls $G = \mathrm{Gal}(k_s/k)$ eine pro-p-Gruppe ist (d. h. für alle endliche Erweiterungen K/k ist der Grad $[K : k]$ eine p-Potenz), so ist

$$H^2(G, \mathbf{Z}/p)) \simeq \mathrm{Br}(k)[p] = 0.$$

Index einer algebraischen Varietät

Es sei k ein Körper und X/k eine algebraische Varietät.

Es sei K eine Erweiterung von k. Mit $X(K)$ bezeichnet man die Menge der K-rationalen Punkte von X (Punkte mit Koordinaten in K).

Der Index $I(X) = I(X/k)$ von X/k ist der g. g. T. aller Grade $[K : k]$ von endlichen Körpererweiterungen K von k mit der Eigenschaft $X(K) \neq \emptyset$.

$$X(k) \neq \emptyset \qquad \Rightarrow \qquad I(X,k) = 1 \qquad \text{(Klar)}$$

Es sei $k = \mathbf{F}$ ein endlicher Körper, und $X/\mathbf{F}$ eine absolut irreduzible Varietät. Dann ist $I(X/\mathbf{F}) = 1$ (Lang-Weil).

(Gilt nicht für $k = C(T)$ oder $k = C((T))$, Beispiel:

$$Y_1^3 + TY_2^3 + T^2Y_3^3 = 0.)$$

Beziehung zwischen C_1 und $\mathrm{cd}(k) \leq 1$

Satz $\quad k$ ist $C_1 \quad \Rightarrow \quad \mathrm{cd}(k) \leq 1.$

Es gibt Beispiele (Ax, 1965) von Körpern k der kohomologischen Dimension 1, die nicht C_1-sind.

Aber: In allen Beispielen von Ax, gilt $I(X/k) = 1$.

Frage (Kato–Kuzumaki, 1986)

Sei k von kohomologischer Dimension 1.

Es sei $X \subset \mathbf{P}_k^{n-1}$ eine projektive Varietät, die durch ein System von Gleichungen

$$F_i(T_1, \cdots, T_n) = 0, \qquad i = 1, \cdots, r,$$

wobei alle F_i homogene Formen vom Grad d mit Koeffizienten in k sind, definiert ist.

Wenn $n > rd$, gilt $I(X/k) = 1$?

Man kann auch die Frage für spezielle Werte von d, n aufwerfen. In 1978 wurde ein falscher Beweis des Falles $d = 2, r = 2$ veröffentlicht.

Antwort (C-T + Madore, 2003)

Nein, schon in den Fällen:

zwei quadratische Formen in 5 Variablen ($d = 2, r = 2$)

eine kubische Form in 4 Variablen ($d = 3, r = 1$)

(Hauptsatz des Vortrages)

Wie kann man neue Körper der kohomologischen Dimension 1 erzeugen ?

Sei $p = 2$, und es sei k ein Körper, Char(k)=0.

Wenn man die zwei Operationen

– k durch den Fixkörper einer 2-Sylow Untergruppe von $\mathrm{Gal}(k_s/k)$ ersetzen

– k durch den Funtionenkörper $k(C)$, wobei C ein Kegelschnitt über k ohne k-rationalen Punkt ist, ersetzen

nacheinander ins unendliche treibt, und die Vereinigung dieser Körper nimmt, dann bekommt man einen Körper F mit den Eigenschaften:

– $k \subset F$

– die absolute Galoisgruppe von F ist eine pro-2-Gruppe

– jede Quaternionalgebra über F ist eine Matrizenalgebra.

Für einen beliebigen Körper L hat Merkurjev in 1981 den tiefliegenden Satz bewiesen, daß die Gruppe $\mathrm{Br}(L)[2]$ von Quaternionenalgebrenklassen erzeugt ist.

Aus den obigen Eigenschaften folgt also

$$\mathrm{cd}(F) \leq 1.$$

Für eine Primzahl $p \neq 2$ kann man eine ähnliche Konstruktion durchführen. Dabei werden Kegelschnitte durch Severi-Brauer Varietäten ersetzt, und der Satz von Merkurjev und Suslin (1982) wird angewandt.

Ein wenig algebraische Geometrie

Es sei $X \subset \mathbf{P}_k^n$ eine irreduzible, nichtsinguläre (abgeschlossene) Untervarietät des projektiven Raumes. Sei d die Dimension von X.

Man definiert die Gruppe $\mathrm{Div}(X)$ der Divisoren (das ist die freie abelsche Gruppe, die durch die irreduziblen Untervarietäten der Kodimension 1 von X erzeugt wird). Zu jeder Einheit in $k(X)^*$ wird ihr Divisor in $\mathrm{Div}(X)$ assoziert. Der Quotient

$$\mathrm{Pic}(X) = \mathrm{Div}(X)/\mathrm{Im}(k(X)^*)$$

ist die Picardgruppe von X. In $\mathrm{Pic}(X)$ hat man die kanonische Klasse ω_X, die mittels der Differentialformen auf X definiert ist.

Zu $D \in \mathrm{Div}(X)$ assoziiert man das Geradenbündel $O_X(D)$. Das ist ein algebraisches Vektorbündel vom Rang 1. Die Gruppe $\mathrm{Pic}(X)$ kann man auch als die Gruppe der Isomorphieklassen von Geradenbündeln definieren.

Zu jedem algebraischen Vektorbündel $\mathcal{E}$ über X assoziert man ganze Zahlen $h^i(\mathcal{E}) = \dim H^i(X, \mathcal{E})$. Die Euler-Poincaré Charakteristik

$$\chi(\mathcal{E}) = \sum_{i=1}^{d} (-1)^i h^i(\mathcal{E}) \in \mathbf{Z}$$

wird mittels des Satzes von Riemann-Roch berechnet.

Mittels des Riemann-Rochschen Satzes für Vektorbündel auf Kurven und des Riemann-Rochschen Satzes für Geradenbündel auf Flächen kann man folgendes beweisen:

Satz 1 *Seien k ein Körper und X/k eine irreduzible, nichtsinguläre, projektive Fläche. Es sei p eine Primzahl. Seien C/k und D/k irreduzible projektive Kurven, $f : D \to C$ ein endlicher k-Morphismus, und $h : D \to X$ ein k-Morphismus.*

Wenn $p \mid I(X/k)$, $p \nmid \mathrm{Grad}(f)$ und $p \nmid \chi(O_C)$, so ist $h(D) \subset X$ eine irreduzible Kurve $\Gamma \subset X$, und $p \nmid (\Gamma.(\Gamma + \omega_X))/2$.

Für $p = 2$ erhält man als Folgerung:

Satz 2 *Es sei k ein Körper und $X \subset \mathbf{P}^4_k$ ein nichtsingulärer Durchschnitt von zwei Quadriken.*

Nehmen wir an, daß

– $2 \mid I(X/k)$

– die Gruppe $\mathrm{Pic}(X)$ wird durch ω_X erzeugt.

Seien C/k ein Kegelschnitt, D/k eine irreduzible Kurve, $f : D \to C$ ein endlicher k-Morphismus, und $h : D \to X$ ein k-Morphismus.

Dann ist der Grad von $f : D \to C$ gerade.

Beweis. Unter diesen Annahmen ist $\chi(O_C) = 1$, und es gibt $r \in \mathbf{Z}$ mit $\Gamma = r\omega_X$. Dann ist

$$(\Gamma.(\Gamma + \omega_X))/2 = (r\omega_X.(r+1)\omega_X)/2$$

$$= (r.(r+1))/2) \times (\omega_X.\omega_X) = 2r.(r+1),$$

also gerade. Hier wird $(\omega_X.\omega_X) = 4$ benutzt.

Zur zweiten Bedingung im Satz 2:

Es sei k_s ein algebraischer Abschluß von k. Auf $X_{k_s} \subset \mathbf{P}^4_{k_s}$ liegen genau 16 Geraden, und man weiß, daß die Gruppe $\mathrm{Pic}(X_{k_s})$ durch diese Geraden erzeugt ist. Wenn die Galoisgruppe $\mathrm{Gal}(k_s/k)$ die 16 Geraden transitiv permutiert, so wird die Gruppe $\mathrm{Pic}(X) \subset \mathrm{Pic}(X_{k_s})$ durch die Klasse ω_X erzeugt.

Es sei L/k die kleinste Galoiserweiterung von k, über der die 16 Geraden definiert sind. Wir sagen, L ist der Zerfällungskörper von X/k.

Satz 3 *Es sei* $X \subset \mathbf{P}^4_{\mathbf{Q}}$ *ein nichtsingulärer Durchschnitt von zwei Quadriken, und* $L/\mathbf{Q}$ *der Zerfällungskörper von* $X/\mathbf{Q}$.

Nehmen wir an, daß

a) $2 \mid I(X/k)$*;*

b) der Grad $[L : \mathbf{Q}]$ *ist eine Potenz von 2;*

c) die 16 Geraden von X_L *werden transitiv durch* $\mathrm{Gal}(L/\mathbf{Q})$ *vertauscht.*

Dann gibt es einen Körper F *mit* $2 = I(X_F/F)$ *und* $\mathrm{cd}(F) \leq 1$.

Beweis. Man will F durch Iteration von zwei Operationen bauen:

1) den Körper k durch den Fixkörper eine pro-2-Sylow-Untergruppe von $\mathrm{Gal}(k_s/k)$ ersetzen

2) den Körper k durch den Funktionenkörper $k(C)$ ersetzen, wobei C/k ein Kegelschnitt ist, mit $C(k) = \emptyset$ (d. h. $I(C/k) = 2$)

Um die Iteration zu vervollständigen, muß man zeigen, daß die Eigenschaften a), b), c) unter diesen Operationen erhalten bleiben. Die einzige Schwierigkeit bietet Eigenschaft a) unter Operation 2). Daß alles glatt läuft ist genau der Inhalt des Satzes 2.

(Dabei sollte man nicht vergessen, daß die Eigenschaft $\mathrm{cd}(F) \leq 1$ für den Grenzkörper F nicht trivial ist, der Satz von Merkurjev wird benutzt um dies zu zeigen.)

Beispiel

$$T_0^2 + T_1^2 + T_2^2 + T_3^2 + T_4^2 = 0,$$

$$2T_0^2 + 3T_1^2 + 5T_2^2 + 7T_3^2 + 11T_4^2 = 0.$$

(Wenn X/k durch ein System der Gestalt

$$\sum_{i=0}^{4} a_i T_i^2 = 0, \quad \sum_{i=0}^{4} b_i T_i^2 = 0$$

gegeben ist, so ist der Zerfällungskörper von X/k durch die $\sqrt{a_i b_j - a_j b_i}$ erzeugt.)

Kubische Flächen

Mann kann jetzt glauben, daß der folgende Satz gilt:

Satz 3' *Es sei* k *ein Körper der Charakteristik null und* $X \subset \mathbf{P}_k^3$ *eine nichtsinguläre kubische Fläche. Sei* L/k *der Zerfällungskörper von* X *(d. h. der kleinste Körper worauf all 27 Geraden von* X_{k_s} *definiert sind).*

Nehmen wir an, daß

a) $3 \mid I(X/k)$*;*

b) der Grad $[L:k]$ *ist eine Potenz von 3;*

c) die 27 Geraden von X_L *werden transitiv durch* $\mathrm{Gal}(L/k)$ *permutiert.*

Dann gibt es einen Körper F *mit* $3 = I(X_F/F)$ *und* $\mathrm{cd}(F) \leq 1$.

Beispiel

$$X_0^3 + 7X_1^3 + 49X_2^3 - 3X_3^3 = 0$$

auf dem Körper $k = \mathbf{Q}(\zeta_3)$.

Um Satz 3' zu beweisen, benutzt man den

Satz 2'

Es sei k ein Körper und $X \subset \mathbf{P}_k^3$ eine nichtsinguläre kubische Fläche. Nehmen wir an, daß

– $3 \mid I(X/k)$

– *die Gruppe* $\mathrm{Pic}(X)$ *wird durch* ω_X *erzeugt.*

Seien Z/k ein 2-dimensionale Severi-Brauer Varietät und Y/k eine irreduzible projektive Fläche, $f : Y \to Z$ ein k-Morphismus mit $f(Y) = Z$, und $h : Y \to X$ ein k-Morphismus.

Dann teilt 3 den Grad von $f : Y \to Z$.

Wie wird dieser Satz bewiesen? Da Y und Z jetzt der Dimension 2 sind, kann man die Sätze von Riemann-Roch nicht wie beim Beweis des Satzes 1 anwenden.

Hier haben wir ein anderes, neues, Werkzeug aus der algebraischen K-Theorie benutzt.

Die Gradformel von Markus Rost

Es sei k ein Körper und X/k eine irreduzible, projektive Varietät. Sei p eine Primzahl.

Rost definiert eine Klasse $\eta_p(X) \in \mathbf{Z}/I(X/k)$. Es gilt $p.\eta_p(X) = 0$.

Natürlich ist $\eta_p(X)$ nur dann von Interesse, wenn $I(X/k) \neq 1$, im Besonderen, nur dann, wenn $X(k) = \emptyset$.

Ist X eine Severi-Brauer Varietät die einer nicht-trivialen zentral einfachen Algebra vom Index p entspricht, so ist $\eta_p(X) = 1 \in \mathbf{Z}/p$.

Satz (Gradformel von Rost) *Es sei $f : Z \to X$ ein k-Morphismus von projektiven, irreduziblen Varietäten der selben Dimension. Dann ist $I(X/k) \mid I(Z/k)$ (klar).*

Es gilt:

$$\eta_p(Z) = \mathrm{Grad}(f).\eta_p(X) \in \mathbf{Z}/I(X/k).$$

Klassisches Beispiel (Aufgabe)

Seien C_1 und C_2 zwei Kegelschnitte auf dem Körper k und sei $f : C_1 \to C_2$ ein k-Morphismus von geraden Grad. Dann ist $C_2(k) \neq \emptyset$.