

LA DESCENTE SUR LES VARIÉTÉS RATIONNELLES, II

JEAN-LOUIS COLLIOT-THÉLÈNE ET JEAN-JACQUES SANSUC

à *Yu. I. Manin*

§0. Introduction. La méthode générale de la descente sur les variétés rationnelles a été introduite en 1976–77 dans une série de Notes ([17], [18], [19]) suscitées par des travaux de F. Châtelet [9], P. Swinnerton-Dyer, et Yu. I. Manin ([41], [42]) à propos de l'étude des points rationnels de certaines surfaces algébriques. Elle avait constitué notre première approche [17] de la description des points rationnels des tores [20]. Elle a été partiellement reprise et complétée en 1979 dans un exposé au congrès d'Angers [22] qui analyse davantage la problématique générale mais ne donne guère plus de démonstrations que les Notes précédentes.

Cette méthode a été appliquée depuis avec succès dans des situations nouvelles ([13], [27], [2], [15], [28], [16]) et l'intérêt arithmétique des résultats obtenus rend nécessaire la publication d'un texte de base, par nature quelque peu aride, qui rassemble les énoncés fondamentaux de la théorie, y compris certains obtenus récemment [25], et surtout en donne des démonstrations détaillées. Signalons que si les articles [13] et [2] évitaient le recours à la théorie générale, il n'en est pas de même de l'article [27], qui repose en grande partie sur le présent mémoire.

Des textes de présentation variés existent déjà: d'abord l'exposé [22] dont cet article est en quelque sorte la suite, mais aussi le §5 du rapport [43] de Manin et Tsfasman, le §2 de l'exposé [11] au congrès de Berkeley et divers textes de séminaire ou congrès ([29], [49], [51]).

Nous ne rappelons donc que brièvement la liste des problèmes algébriques, géométriques et arithmétiques auxquels on s'intéresse sur les variétés rationnelles, et le principe de la méthode de la descente dont l'objectif est d'aider à la solution de certains de ces problèmes.

Une *k*-variété rationnelle est une variété algébrique géométriquement intègre birationnelle à l'espace projectif sur une extension de son corps de définition *k*. On peut citer comme exemples les quadriques et les variétés de Severi-Brauer, les surfaces cubiques lisses, les surfaces fibrées en coniques sur la droite projective, les surfaces de Del Pezzo, les intersections complètes de deux quadriques, géométriquement intègres et sans point conique, dans l'espace projectif de dimension ≥ 4 , les espaces homogènes principaux sous un groupe algébrique linéaire connexe.

Received January 27, 1987.

Les *problèmes* auxquels on s'intéresse à propos de ces variétés sont de plusieurs types:

(a) problèmes k -birationnels: k -rationalité, k -rationalité stable, k -unirationnalité (le corps des fonctions de la variété est-il transcendant pur sur k , le devient-il après adjonction de variables indépendantes, est-il un sous-corps d'une extension transcendante pure de k ?);

(b) problèmes de points rationnels (existence d'un point rationnel, densité des points rationnels, répartition en classes pour la R -équivalence, paramétrage de l'ensemble des points rationnels, et, sur un corps de nombres, principe de Hasse et approximation faible, ...).

La méthode de *la descente*, inspirée de la descente sur les courbes de genre 1 (voir par exemple [7]), est conçue comme une méthode d'attaque de ces problèmes. Elle consiste à attacher à la variété rationnelle considérée un certain nombre de variétés auxiliaires, dites *variétés de descente*, de dimension plus grande mais de géométrie a priori plus simple, chacune équipée d'un k -morphisme dominant vers la variété initiale, tout point rationnel de celle-ci étant image d'un point rationnel de l'une de ces variétés auxiliaires (voir (2.7.2)), et le nombre de ces variétés auxiliaires étant fini lorsque k est un corps de nombres (théorème 2.7.3).

L'observation originale que nous avons faite, à la suite de questions de P. Swinnerton-Dyer en 1970, est que les exemples concrets de variétés de descente rencontrées dans la littérature (tant dans le travail original de Châtelet que dans les contre-exemples au principe de Hasse, tel celui de Swinnerton-Dyer [53] en 1962), variétés qui apparaissent après des "factorisations" adéquates, sont des toreseurs sous des tores au-dessus de la variété initiale, non ramifiés sur les modèles projectifs et lisses de cette variété, et que ce fait explique les phénomènes rencontrés (telle la finitude ci-dessus, qui n'est autre qu'une variante du théorème faible de Mordell-Weil) et permet de définir le cadre le plus général où de telles méthodes s'appliquent (§2.7).

Si les variétés de descente sont bien choisies, ce qu'on peut imposer dans le cadre général des toreseurs sous des tores quelconques ("torseurs universels" ou "torseurs admissibles"), les obstructions (dues à Manin) tant à la k -rationalité (§2.A) qu'au principe de Hasse (§3.1) s'évanouissent sur elles (§2.1).

Par ailleurs, si k est un corps de nombres, si la variété initiale a des points dans tous les complétés de k , et si l'obstruction au principe de Hasse définie par Manin au moyen du groupe de Brauer ne permet pas de conclure à l'absence de point rationnel, alors il existe une variété auxiliaire possédant des points dans tous les complétés de k et pour laquelle le groupe de Brauer est "trivial" (en fait mieux, voir §3.5).

La description de la méthode de descente et la justification des deux dernières phrases sont le premier objectif de cet article. Le résultat du §3.5 est fondamental dans les applications concrètes de la méthode.

Une fois établi que les obstructions usuelles s'évanouissent sur les variétés de descente d'un type convenable, il devient alors plus raisonnable de chercher à établir le principe de Hasse (lorsque k est un corps de nombres) et la k -rationa-

lité de ces variétés auxiliaires (lorsqu'elles possèdent un point k -rationnel). Si ces deux propriétés sont satisfaites, on peut dire que l'arithmétique de la variété initiale est parfaitement connue (§2.8 et §3.8).

En général, nous ne disposons pas de procédé-miracle pour établir ces propriétés. De fait, à ce stade de la méthode, il faut de nouvelles idées pour analyser la géométrie et l'arithmétique des variétés auxiliaires. En l'absence de théorèmes généraux, on étudie de près ces variétés, et on essaye d'établir l'une ou l'autre des propriétés ci-dessus par des méthodes ad hoc ([13], [27], [28]). On ne sait le faire sans posséder des *équations concrètes* de ces variétés auxiliaires, variétés qui sont données a priori de façon très désincarnée. C'est le second objectif du présent article de donner de telles équations ("description locale des toiseurs", §2.3) et de détailler en particulier le cas où la variété initiale est une surface fibrée en coniques sur la droite projective (§2.6).

Les résultats des §§ 2 et 3 sont fondés sur des propositions de cohomologie étale (ou plate) qui sont rassemblées dans le §1, paragraphe que nous invitons le lecteur à sauter en première lecture. Par ailleurs nous avons inclus une démonstration simple et valable en toute caractéristique d'un résultat de base sur le groupe de Picard des variétés rationnelles (§2.A), ainsi que la démonstration d'une remarque générale sur le calcul de ce groupe (§2.B). Enfin le résultat du §2.9 peut dans certains cas aider à établir la k -rationalité (stable) des toiseurs universels.

Notons que si en dernière analyse (théorème 3.5.1), les obstructions "géométriques" au principe de Hasse définies par les toiseurs sous des tores coïncident avec l'obstruction définie par Manin en termes de groupe de Brauer, des exemples montrent que la partition des points rationnels d'une k -variété rationnelle obtenue par accouplement avec des toiseurs sous des tores peut être strictement plus fine que celle obtenue par accouplement avec le groupe de Brauer (cf. 2.7.11), et donc se rapprocher plus de la partition en classes pour la R -équivalence, telle que définie par Manin (cf. 2.7.2).

La méthode a complètement réussi dans le cas des surfaces de Châtelet généralisées [27] qui sont les surfaces fibrées en coniques non triviales les plus simples, et elle a partiellement réussi pour d'autres surfaces fibrées en coniques [28]. Autre exemple de réussite complète: le cas des espaces homogènes principaux sous des tores ([20], [22]). Complétée par la "méthode des sections hyperplanes", la méthode de la descente a permis de mieux comprendre l'arithmétique des intersections de deux quadriques [27] et aussi de certaines hypersurfaces cubiques [16]. Mais il convient de signaler que pour certaines variétés rationnelles très simples de dimension au moins 3, les toiseurs universels ne sont pas (stablement) k -rationnels (cf. 2.8.18). Le cas des surfaces rationnelles est ouvert: le module galoisien défini par le groupe de Picard d'une surface rationnelle semble alors mieux contrôler la géométrie et l'arithmétique de la variété ([4], [10], [23]).

C'est avec grand plaisir que nous dédions ce travail à Yu. I. Manin, qui sut renouveler l'étude arithmétique des variétés rationnelles en y apportant le point de vue de la géométrie algébrique moderne.

Plan

§0.	Introduction	375
§1.	Torseurs sous des groupes de type multiplicatif	378
1.1.	Groupes de type multiplicatif	379
1.2.	Torseurs	380
1.3.	Lemmes de topologie	381
1.4.	Torseurs et extensions	382
1.5.	Une suite exacte fondamentale	385
1.6.	Comportement par restriction à un ouvert	391
1.A.	Appendice d'algèbre homologique	397
§2.	Géométrie des toreseurs	408
2.1.	Propriétés globales des toreseurs sous des tores	409
2.2.	L'obstruction élémentaire: condition nécessaire d'existence de toreseurs d'un type donné	413
2.3.	Description locale des toreseurs	420
2.4.	Exemples d'application au prolongement de toreseurs	427
2.5.	Exemples de calculs d'équations locales de toreseurs universels	429
2.6.	Le cas des surfaces fibrées en coniques sur la droite projective	432
2.7.	Accouplements avec les points rationnels	442
2.8.	La première hypothèse sur les toreseurs universels	451
2.9.	Comportement des toreseurs universels par transformations k -birationnelles	457
2.A.	Appendice: Invariance k -birationnelle stable du \mathfrak{g} -module $\text{Pic } \bar{X}$	461
2.B.	Appendice: Calcul du \mathfrak{g} -module $\text{Pic } \bar{X}$ en l'absence de point rationnel	462
§3.	Arithmétique des toreseurs	463
3.1.	L'obstruction de Manin au principe de Hasse	466
3.2.	Obstructions au principe de Hasse définies par des toreseurs sous des tores	469
3.3.	La première obstruction et l'obstruction de Manin associée à \mathfrak{B}	471
3.4.	La deuxième obstruction: la traduction fonctionnelle	475
3.5.	Obstruction de Picard et obstruction de Manin au principe de Hasse	478
3.6.	Exemples	481
3.7.	Les obstructions à l'approximation faible	484
3.8.	Deux hypothèses arithmétiques sur les toreseurs universels	486

§1. Torseurs sous des groupes de type multiplicatif

1.0. *Notations.* On utilise les abréviations usuelles pour les topologies suivantes sur un schéma X : *ét* pour étale, *Zar* pour Zariski, *pl* ou *fppf* pour fidèlement plat de présentation finie et enfin *fpqc* (voir [44] II §1 ou [31] Arcata I et II). Sauf mention explicite, la topologie considérée est la topologie plate *pl* et

les faisceaux et leurs groupes de cohomologie sont relatifs à cette topologie. Si \mathcal{F} et \mathcal{G} sont deux faisceaux de groupes abéliens sur X , on désigne par $\mathcal{H}om_X(\mathcal{F}, \mathcal{G})$ le faisceau des homomorphismes de \mathcal{F} dans \mathcal{G} . La notation G_m désigne le groupe multiplicatif $\text{Spec } \mathbb{Z}[t, t^{-1}]$.

1.1. *Groupes de type multiplicatif.* Pour les notions générales sur les groupes de type multiplicatif, on renvoie à [32], chap. VIII–X. Voici néanmoins quelques rappels pour fixer la terminologie (on se place dans des situations moins générales que [32]).

Soit X un schéma. On note $G_{m, X} := G_m \times_{\mathbb{Z}} X$ le groupe multiplicatif sur X . Un X -schéma en groupes diagonalisable est un X -sous-schéma en groupes d'un $G_{m, X}^n$. Un X -groupe de type multiplicatif (resp. un X -tore) est un X -schéma en groupes S localement diagonalisable (resp. localement isomorphe à un G_m^n) pour la topologie *fpqc* ([32] VIII 1.1, IX 1.1, 1.3). On se limite à des groupes de type fini, auquel cas on peut remplacer *fpqc* par *ét* ([32] X 4.5). Comme en outre X sera en général localement noethérien normal, un tel S sera même diagonalisable après revêtement étale (= morphisme étale fini surjectif) de X .

Comme exemples de groupes de type multiplicatif, on a le groupe $\mu_{n, X}$ des racines n -ièmes de l'unité, noyau de la multiplication par n dans $G_{m, X}$, le tore descendu à la Weil $R_{X'/X} G_m$ pour X'/X étale fini— X' non nécessairement connexe—le tore $R_{X'/X}^1 G_m$ noyau de la norme $N_{X'/X}: G_{m, X'} \rightarrow G_{m, X}$. Un X -tore est dit quasi-trivial s'il est isomorphe à un tore du type $R_{X'/X} G_m$.

On appelle X -groupe constant tordu un X -schéma en groupes localement constant pour la topologie *fpqc* ([32] X 5.1). S'il est à engendrement fini, ce qui sera toujours le cas ici, il est même localement constant pour la topologie étale ([32] X 5.9). Si M est un groupe abélien de type fini, on note M_X le X -groupe constant $\coprod_X M$ qu'il définit.

On a une antiéquivalence de catégories, souvent appelée dualité, entre les X -groupes de type multiplicatif et les X -groupes constants tordus, via:

$$S \mapsto \hat{S} = \mathcal{H}om_{X\text{-gr}}(S, G_{m, X})$$

$$M \mapsto D(M) = \mathcal{H}om_{X\text{-gr}}(M, G_{m, X})$$

([32] X 5.1, 5.6 à 5.9). Lorsque X est connexe, S et M peuvent être trivialisés par un revêtement étale galoisien connexe $X' \rightarrow X$ de groupe g . On a alors une dualité entre les X -groupes de type multiplicatif trivialisés par X'/X et la catégorie des g -modules de type fini, via:

$$S \mapsto \hat{S}(X')$$

([32] X 1.1). A une suite exacte de g -modules correspond ainsi une "suite exacte" de X -groupes de type multiplicatif trivialisés par $X' \rightarrow X$ ([32] VIII 3.1) qui définit une suite exacte de faisceaux abéliens pour la topologie *pl*. Dans la dualité ci-dessus, S est lisse lorsque $\hat{S}(X')$ a une \mathbb{Z} -torsion première aux caractéristiques

résiduelles. C'est un tore lorsque $\hat{S}(X')$ est sans Z -torsion. Lorsque $X = \text{Spec } k$ où k est un corps, on a même une dualité entre les k -groupes de type multiplicatif S et les \mathfrak{g} -modules continus discrets, de type fini, où $\mathfrak{g} = \text{Gal}(\bar{k}/k)$ est le groupe de Galois d'une clôture séparable \bar{k} de k , via:

$$\begin{aligned} S &\mapsto \hat{S}(\bar{k}) \\ M &\mapsto D(M) \end{aligned}$$

où $D(M) = \text{Hom}_Z(M, \bar{k}^*)$. On notera souvent \hat{S} le \mathfrak{g} -module $\hat{S}(\bar{k})$.

Notons enfin que le dual de $G_{m, X}$ est Z_X , celui de $\mu_{n, X}$ est $(Z/n)_X$ et celui de $R^1_{X'/X}G_m$ est le conoyau de la norme $Z \rightarrow Z[\mathfrak{g}/\mathfrak{h}]$, où $\mathfrak{g} = \text{Gal}(X''/X)$ est le groupe de Galois d'un revêtement galoisien X''/X qui majore X'/X et $\mathfrak{h} = \text{Gal}(X''/X')$.

1.2. *Torseurs.* Soit S un X -groupe de type multiplicatif. On appelle *torseur* sur X sous S un espace principal homogène $\mathcal{T} \rightarrow X$ sur X sous S ([44] III §4). Autrement dit, $\mathcal{T} \rightarrow X$ est *fppf* et S agit sur \mathcal{T} de façon compatible avec la projection, le morphisme canonique ainsi défini:

$$\begin{aligned} S \times_X \mathcal{T} &\rightarrow \mathcal{T} \times_X \mathcal{T} \\ (s, t) &\rightarrow (t, s \cdot t) \end{aligned}$$

étant un isomorphisme.

Si $\text{Tors}(X, S)$ désigne l'ensemble des classes d'isomorphisme de X -torseurs sous S ,

$$\text{Tors}(X, S) = H^1(X_{\text{pl}}, S)$$

([44] III 4.7 et 2.10), et même, si S est lisse, par exemple si S est un tore,

$$\text{Tors}(X, S) = H^1(X_{\text{ét}}, S)$$

([35] 11.7 ou [44] III 3.9). Autrement dit, un toseur \mathcal{T} sur X sous S est dans ce dernier cas trivialisé par un recouvrement \mathcal{U} pour la topologie étale: le 1-cocycle associé à $\mathcal{U} = \{U_i\}$ et à une famille $\{t_i\}$ de sections, $t_i \in H^0(U_i, \mathcal{T})$ est $\{t_{i,j}\} = \{t_j/t_i\} \in Z^1(\mathcal{U}, S)$ (cf. [31] Cycle). Si $S = G_m$, on a même d'après le théorème 90 ([44] III 4.9):

$$\text{Tors}(X, G_m) = H^1(X_{\text{Zar}}, G_m) = \text{Pic } X.$$

Voici quelques exemples de toseurs. Une suite exacte de groupes de type multiplicatif

$$1 \rightarrow M' \rightarrow M \rightarrow M'' \rightarrow 1$$

fait de M un torseur sur M'' sous M' . Une isogénie de courbes elliptiques $E' \rightarrow E$ fait de E' un torseur sur E sous le schéma en groupes fini noyau de l'isogénie. Mentionnons encore les λ -revêtements de courbes de genre 1 (cf. [7]). Si K/k est une extension séparable finie de corps, l'équation

$$N_{K/k}(\xi) = a$$

où $a \in k^*$ définit un torseur sur k sous le k -tore $R_{K/k}^1 \mathbf{G}_m$ qui admet pour équation affine $N_{K/k}(\xi) = 1$. Un espace homogène G/H est la base d'un torseur, à savoir G , sous H .

1.3. Lemmes de topologie.

LEMME 1.3.1. *Soient $q: X \rightarrow Y$ un morphisme de schémas et R un Y -groupe constant tordu. Le morphisme naturel*

$$q^*R \rightarrow R_X$$

est un isomorphisme de faisceaux étales sur X .

Dans cet énoncé, q^*R désigne l'image réciproque de R en tant que faisceau étale, et le "morphisme naturel" est l'adjoint du morphisme "évident" $R \rightarrow q_*R_X$ de faisceaux étales sur Y . La vérification est locale pour la topologie considérée. Comme R est localement constant pour la topologie étale, il suffit de traiter le cas constant où $R = M_Y$ pour M un groupe abélien de type fini. On note qu'alors $M_Y \times_Y X = M_X$ et le lemme résulte de la suite d'égalités:

$$\begin{aligned} \mathrm{Hom}_X(M_X, \mathcal{F}) &= \mathrm{Hom}_{\mathrm{gr}}(M, \mathcal{F}(X)) = \mathrm{Hom}_{\mathrm{gr}}(M, (q_*\mathcal{F})(Y)) \\ &= \mathrm{Hom}_Y(M_Y, q^*\mathcal{F}) = \mathrm{Hom}_X(q_*M_Y, \mathcal{F}). \end{aligned}$$

LEMME 1.3.2. *Soit S un X -groupe de type multiplicatif. Le morphisme naturel*

$$S \rightarrow \mathcal{H}om_X(\hat{S}, \mathbf{G}_{m, X})$$

est un isomorphisme de faisceaux étales sur X .

En effet, $\mathcal{H}om_{X\text{-gr}}(\hat{S}, \mathbf{G}_{m, X}) \rightarrow \mathcal{H}om_X(\hat{S}, \mathbf{G}_{m, X})$ est un isomorphisme de faisceaux sur X .

LEMME 1.3.3.

(i) *Si S est un X -groupe de type multiplicatif,*

$$\mathcal{E}xt_{X_{\mathrm{pl}}}^i(\hat{S}, \mathbf{G}_{m, X}) = 0 \quad \text{pour tout } i > 0.$$

(ii) Si S est un X -groupe de type multiplicatif lisse,

$$\mathcal{E}xt_{X_{\acute{e}t}}^i(\hat{S}, \mathbf{G}_{m, X}) = 0 \quad \text{pour tout } i > 0.$$

La vérification est locale pour la topologie considérée. Comme \hat{S} est localement constant pour la topologie étale, il suffit de traiter les cas constants $\hat{S} = \mathbf{Z}$ et $\hat{S} = \mathbf{Z}/n$. Le premier cas est immédiat pour toute topologie. On en déduit le second pour tout $i > 1$. Il reste la nullité pour $i = 1$ dans ce dernier cas: elle signifie que la multiplication par n

$$\mathbf{G}_{m, X} \xrightarrow{\times n} \mathbf{G}_{m, X}$$

est un épimorphisme de faisceaux, ce qui est toujours vrai pour la topologie pl et le reste pour la topologie étale si n est premier aux caractéristiques résiduelles de X , ce qui est le cas si S est lisse.

1.4. *Torseurs et extensions.*

PROPOSITION 1.4.1. *Soit S un X -groupe de type multiplicatif. On a des isomorphismes naturels:*

$$H^i(X_{pl}, S) \xrightarrow{\cong} \text{Ext}_{X_{\acute{e}t}}^i(\hat{S}, \mathbf{G}_{m, X}) \quad \text{pour tout } i \geq 0.$$

Rappelons ([35] théorème 11.7) que, si S est lisse, $H^i(X_{pl}, S) = H^i(X_{\acute{e}t}, S)$, ce qui permet dans ce cas de remplacer pl par $\acute{e}t$ dans l'énoncé ci-dessus.

La démonstration utilise la suite spectrale d'intégration ([1] V 6.1)

$$H^p(X_{pl}, \mathcal{E}xt^q(\hat{S}, \mathbf{G}_{m, X})) \Rightarrow \text{Ext}_{X_{pl}}^{p+q}(\hat{S}, \mathbf{G}_{m, X})$$

en topologie pl . Celle-ci dégénère complètement en raison de la nullité des faisceaux

$$\mathcal{E}xt_{X_{pl}}^i(\hat{S}, \mathbf{G}_{m, X}) \quad \text{pour tout } i > 0$$

(lemme 1.3.3). D'après le lemme 1.3.2, $\mathcal{H}om_X(\hat{S}, \mathbf{G}_{m, X}) = S$ comme faisceaux pour la topologie étale, ou pour une topologie plus fine. Les edges de la suite spectrale définissent donc des isomorphismes

$$H^i(X_{pl}, S) \xrightarrow{\cong} \text{Ext}_{X_{pl}}^i(\hat{S}, \mathbf{G}_{m, X}).$$

Notons que, pour S lisse, on peut remplacer partout pl par $\acute{e}t$ dans les arguments ci-dessus, ce qui établit déjà la proposition dans ce cas-là. Sinon, il reste à

prouver les égalités

$$\text{Ext}_{X_{\text{ét}}}^i(\hat{S}, \mathbf{G}_{m, X}) = \text{Ext}_{X_{\text{pl}}}^i(\hat{S}, \mathbf{G}_{m, X}).$$

Comme \hat{S} est localement constant pour la topologie étale, il suffit, par descente (suite spectrale de Leray d'un recouvrement ([1] V 3.3)), de traiter les cas constants $\hat{S} = \mathbf{Z}$ et $\hat{S} = \mathbf{Z}/n$. Dans le premier cas, les égalités ci-dessus s'écrivent

$$H^i(X_{\text{ét}}, \mathbf{G}_{m, X}) = H^i(X_{\text{pl}}, \mathbf{G}_{m, X})$$

et sont vraies par lissité de $\mathbf{G}_{m, X}$ ([35] théorème 11.7). Elles sont donc aussi vraies dans le second cas par le lemme des cinq.

PROPOSITION 1.4.2. *Soient X un schéma réduit, S un X -tore et $\mathcal{T} \xrightarrow{q} X$ un X -torseur sous S . On a une suite exacte naturelle de faisceaux étales sur X :*

$$(E_{\mathcal{T}}) \quad 1 \rightarrow \mathbf{G}_{m, X} \rightarrow q_* \mathbf{G}_{m, \mathcal{T}} \rightarrow \hat{S} \rightarrow 0.$$

C'est une variante globale du lemme de Rosenlicht (cf. [46] VII 1.2): si Y est un schéma réduit et si S est un Y -tore, alors

$$\mathbf{G}_m(S)/\mathbf{G}_m(Y) = \hat{S}(Y).$$

Considérons d'abord le cas du toseur trivial $S \xrightarrow{q} X$. Un automorphisme φ de ce toseur est de la forme $s \mapsto ss_0$. Soit e la section unité. Le lemme de Rosenlicht affirme que toute fonction inversible f sur S s'écrit

$$f = \chi_f \cdot f(e)$$

où χ_f est un caractère de S et $f(e) = q^* e^* f$. On peut ainsi écrire une suite exacte de faisceaux sur X :

$$1 \rightarrow \mathbf{G}_{m, X} \rightarrow q_* \mathbf{G}_{m, S} \xrightarrow{\rho} \hat{S} \rightarrow 0$$

où $\rho(f) = \chi_f$. Un automorphisme φ induit un automorphisme φ^* de cette suite exacte qui est l'identité sur $\mathbf{G}_{m, X}$, mais aussi sur \hat{S} , comme le montre le calcul suivant:

$$\begin{aligned} (\varphi^* f)(s) &= f(ss_0) = \chi_f(ss_0) \cdot f(e) = \chi_f(s) \chi_f(s_0) \cdot f(e) \\ &= \chi_f(s) \cdot f(s_0) = \chi_f(s) \cdot (\varphi^* f)(e). \end{aligned}$$

Autrement dit: $\chi_{\varphi^* f} = \chi_f$, et ceci prouve que la projection ρ ne dépend pas de la

trivialisation du toreur trivial. Ceci permet de définir, pour un toreur \mathcal{T} quelconque, un morphisme de faisceaux étales sur X

$$\rho: q_*\mathbf{G}_{m,\mathcal{T}} \rightarrow \hat{S}$$

par recollement des morphismes ρ_U définis sans ambiguïté pour tout ouvert étale U qui trivialise \mathcal{T} . On obtient ainsi une suite naturelle de faisceaux étales sur X

$$1 \rightarrow \mathbf{G}_{m,X} \rightarrow q_*\mathbf{G}_{m,\mathcal{T}} \xrightarrow{\rho} \hat{S} \rightarrow 0.$$

Le fait que cette suite soit exacte se vérifie localement, et c'est alors le lemme de Rosenlicht déjà vu (il suffit d'ailleurs de le connaître pour $S = \mathbf{G}_{m,X}^n$).

PROPOSITION 1.4.3. *Soient X un schéma réduit et S un X -tore. L'isomorphisme naturel*

$$\varepsilon: H^1(X, S) \xrightarrow{\cong} \text{Ext}_{X_{\text{ét}}}^1(\hat{S}, \mathbf{G}_{m,X})$$

associe, au signe près, à la classe d'un toreur $\mathcal{T} \xrightarrow{q} X$ celle de l'extension de faisceaux étales $(E_{\mathcal{T}})$.

L'application naturelle ε est l'edge $E_2^{1,0} \rightarrow E^1$ de la suite spectrale

$$H^p(X_{\text{ét}}, \mathcal{E}xt^q(\hat{S}, \mathbf{G}_{m,X})) \Rightarrow \text{Ext}_{X_{\text{ét}}}^{p+q}(\hat{S}, \mathbf{G}_{m,X})$$

d'intégration des $\mathcal{E}xt$ locaux (proposition 1.4.1).

Démonstration. La vérification s'appuie sur la description générale de l'edge dans une suite spectrale du type ci-dessus donnée en appendice. Avec les notations de l'appendice, la suite spectrale ci-dessus n'est autre que la suite spectrale (1.A.1) pour les données suivantes:

$\mathcal{C} = \mathcal{C}'$ la catégorie des faisceaux de groupes abéliens sur $X_{\text{ét}}$ et \mathcal{C}'' la catégorie des groupes abéliens,

$$\Phi = \mathcal{H}om_X(\hat{S}, \) \quad \text{et} \quad \Psi = H^0(X, \), \quad \text{de telle sorte que} \quad \Psi\Phi = \text{Hom}_X(\hat{S}, \).$$

Etant donné un toreur $\mathcal{T} \xrightarrow{q} X$ sous S , on peut, d'après 1.3.3, appliquer le lemme 1.A.3 à l'extension de faisceaux $(E_{\mathcal{T}})$ sur $X_{\text{ét}}$. On a donc, au signe près, un carré commutatif

$$\begin{array}{ccc} \text{Hom}_X(\hat{S}, \hat{S}) & \xrightarrow{\partial_0} & H^1(X, S) \\ \parallel & & \downarrow \varepsilon \\ \text{Hom}_X(\hat{S}, \hat{S}) & \xrightarrow{\partial_1} & \text{Ext}_X^1(\hat{S}, \mathbf{G}_m) \end{array}$$

dans lequel ∂_0 est le bord déduit de la suite exacte de faisceaux $\Phi(E_{\mathcal{F}})$ par application de $\Psi = H^0(X, \)$:

$$1 \rightarrow S \rightarrow \mathcal{H}om_X(\hat{S}, q_* \mathbf{G}_{m, \mathcal{F}}) \rightarrow \mathcal{H}om_X(\hat{S}, \hat{S}) \rightarrow 0$$

et ∂_1 est, au signe près, l'application pull-back de l'extension $(E_{\mathcal{F}})$. Ceci montre finalement qu'au signe près

$$[E_{\mathcal{F}}] = \partial_1(\text{id}_{\hat{S}}) = \varepsilon \partial_0(\text{id}_{\hat{S}}).$$

Il reste à voir qu'au signe près

$$[\mathcal{F}] = \partial_0(\text{id}_{\hat{S}}).$$

Soit $\{U_i, t_i\}$ une trivialisations étale de \mathcal{F} , i.e. $\{U_i\}$ est un recouvrement étale de X et $t_i \in H^0(U_i, \mathcal{F})$. L'extension $(E_{\mathcal{F}})$ est trivialisée sur U_i par la section σ_i définie, avec des notations évidentes, par

$$(\sigma_i(\chi))(s \cdot t_i) = \chi(s).$$

Par suite, l'extension $\Phi(E_{\mathcal{F}})$ est trivialisée sur U_i par la section s_i définie par

$$((s_i \varphi)(\chi))(s \cdot t_i) = \varphi(\chi)(s).$$

On en déduit, pour $\varphi = \text{id}_{\hat{S}}$,

$$\partial(\text{id}_{\hat{S}})_{i,j}(\chi)(t) = \chi(s_j(t)) / \chi(s_i(t)) = \chi(s_j(t) / s_i(t)) = \chi(t_i / t_j)$$

$$\text{où } t = s_i(t) \cdot t_i = s_j(t) \cdot t_j \text{ et } t_i / t_j := s_j(t_i).$$

et, par suite en "oubliant" χ :

$$\partial(\text{id}_{\hat{S}})_{i,j} = t_i / t_j.$$

Or, $\{t_{i,j} := t_i / t_j\}$ est, au signe près, le 1-cocycle du recouvrement $\{U_i\}$ à valeurs dans S associé à la trivialisations du torseur \mathcal{F} définie par les sections $\{t_i\}$. Ceci prouve $[E_{\mathcal{F}}] = \partial_0(\text{id}_{\hat{S}})$ et achève donc la démonstration.

1.5. Une suite exacte fondamentale.

1.5.0. Fixons d'abord quelques notations qui seront constamment utilisées dans la suite. Si k est un corps, on désigne par \bar{k} une clôture séparable et par \mathfrak{g} le groupe de Galois de \bar{k}/k . Si X est une k -variété, on note $\bar{X} = X \times_k \bar{k}$. Si K/k est une extension quelconque, on note $K[X]$ l'anneau des fonctions régulières sur X_K et, si X_K est intègre, on note $K(X)$ le corps des fonctions rationnelles sur X_K .

Soit enfin F un fermé de Zariski de X . On note $\text{Div } X$ (resp. $\text{Div}_F X$) le groupe des diviseurs de Cartier (resp. à support dans F) de X , et $\text{Pic } X$ le groupe de Picard de X . On note

$$\text{Br}_1 X = \ker(H^2(X, \mathbb{G}_m) \rightarrow H^2(\bar{X}, \mathbb{G}_m)) = \ker(\text{Br } X \rightarrow \text{Br } \bar{X})$$

le sous-groupe du groupe de Brauer-Grothendieck de X formé des éléments tués par passage à \bar{k} (voir le début de 3.1). Pour X géométriquement intègre,

$$\text{Br}_1 X = \ker(H^2(\mathfrak{g}, \bar{k}(X)^*) \rightarrow H^2(\mathfrak{g}, \text{Div } \bar{X}))$$

(cf. [20] lemme 14, p. 213). On a la suite exacte naturelle (cf. [41], [20] p. 214):

$$(1.5.0) \quad 0 \rightarrow H^1(\mathfrak{g}, \bar{k}[X]^*) \rightarrow \text{Pic } X \rightarrow (\text{Pic } \bar{X})^{\mathfrak{g}} \rightarrow H^2(\mathfrak{g}, \bar{k}[X]^*) \\ \rightarrow \text{Br}_1 X \xrightarrow{X} H^1(\mathfrak{g}, \text{Pic } \bar{X}) \rightarrow H^3(\mathfrak{g}, \bar{k}[X]^*)$$

qui est la suite des termes de bas degré de la suite spectrale de Leray pour $X \rightarrow \text{Spec } k$ et le faisceau étale \mathbb{G}_m :

$$H^p(\mathfrak{g}, H^q(\bar{X}, \mathbb{G}_m)) \Rightarrow H^{p+q}(X, \mathbb{G}_m).$$

La suite exacte qui fait l'objet de ce paragraphe généralise simplement le début de (1.5.0) pour un k -groupe de type multiplicatif quelconque à la place de \mathbb{G}_m .

Après les résultats préliminaires indiqués plus haut, venons-en à cette suite exacte, essentielle pour les paragraphes ultérieurs:

THÉORÈME 1.5.1. *Soient k un corps, X une k -variété algébrique et S un k -groupe de type multiplicatif. Soit $\mathfrak{g} = \text{Gal}(\bar{k}/k)$ où \bar{k} est une clôture séparable de k . On a une suite exacte naturelle:*

$$(1.5.1) \quad 0 \rightarrow \text{Ext}_{\mathfrak{g}}^1(\hat{S}, \bar{k}[X]^*) \xrightarrow{i_1} H^1(X, S) \xrightarrow{X} \text{Hom}_{\mathfrak{g}}(\hat{S}, \text{Pic } \bar{X}) \\ \xrightarrow{\partial} \text{Ext}_{\mathfrak{g}}^2(\hat{S}, \bar{k}[X]^*) \xrightarrow{i_2} H^2(X, S).$$

Dans cet énoncé, \hat{S} désigne le \mathfrak{g} -module $\hat{S}(\bar{k})$ et $H^i(X, S) := H^i(X_{\text{pl}}, S)$.

La suite exacte du théorème est la suite des termes de bas degré de la suite spectrale

$$\text{Ext}_{k_{\text{ét}}}^p(\hat{S}, R^q p_* \mathbb{G}_{m, X}) \Rightarrow \text{Ext}_{X_{\text{ét}}}^{p+q}(p^* \hat{S}, \mathbb{G}_{m, X})$$

où $p: X \rightarrow \text{Spec } k$ est le morphisme structural. Il s'agit de la suite spectrale

$$(L)_{p, \mathcal{F}, \mathcal{G}} \quad \text{Ext}_{Y_{\text{ét}}}^p(\mathcal{F}, R^q p_* \mathcal{G}) \Rightarrow \text{Ext}_{X_{\text{ét}}}^{p+q}(p^* \mathcal{F}, \mathcal{G})$$

associée à un morphisme $p: X \rightarrow Y$ et à deux faisceaux, \mathcal{F} sur $Y_{\text{ét}}$ et \mathcal{G} sur $X_{\text{ét}}$ ([1] V 5.5), considérée pour $Y = \text{Spec } k$, $\mathcal{F} = \hat{S}$ et $\mathcal{G} = \mathbf{G}_{m, X}$. Autrement dit, avec les notations de l'appendice, c'est la suite spectrale (1.A.4) pour les données suivantes:

\mathcal{C} (resp. \mathcal{C}') = la catégorie des faisceaux de groupes abéliens sur $X_{\text{ét}}$ (resp. $Y_{\text{ét}}$) et \mathcal{C}'' = la catégorie des groupes abéliens,

$\Phi = p_*$ et $\Psi = \text{Hom}_Y(\mathcal{F}, _)$, de telle sorte que, par adjonction, $\Psi\Phi(G) = \text{Hom}_X(p^* \mathcal{F}, \mathcal{G})$, et que la condition (1.4.0) est satisfaite, p_* admettant pour adjoint à gauche p^* qui est exact. La suite des termes de bas degré s'écrit en général

$$\begin{aligned} 0 \rightarrow \text{Ext}_Y^1(\mathcal{F}, p_* \mathcal{G}) &\rightarrow \text{Ext}_X^1(p^* \mathcal{F}, \mathcal{G}) \rightarrow \text{Hom}_Y(\mathcal{F}, R^1 p_* \mathcal{G}) \\ &\rightarrow \text{Ext}_Y^2(\mathcal{F}, p_* \mathcal{G}) \rightarrow \text{Ext}_X^2(p^* \mathcal{F}, \mathcal{G}). \end{aligned}$$

Si S est un Y -groupe de type multiplicatif, si $\mathcal{F} = \hat{S}$ et $\mathcal{G} = \mathbf{G}_{m, X}$, on a $p^* \hat{S} = \hat{S}_X$ (lemme 1.3.1) et cette suite s'écrit

$$\begin{aligned} 0 \rightarrow \text{Ext}_Y^1(\hat{S}, p_* \mathbf{G}_{m, X}) &\rightarrow \text{Ext}_X^1(\hat{S}, \mathbf{G}_{m, X}) \rightarrow \text{Hom}_Y(\hat{S}, \text{Pic}_{X/Y}) \\ &\rightarrow \text{Ext}_Y^2(\hat{S}, p_* \mathbf{G}_{m, X}) \rightarrow \text{Ext}_X^2(\hat{S}, \mathbf{G}_{m, X}) \end{aligned}$$

où $\text{Pic}_{X/Y} = R^1 p_* \mathbf{G}_{m, X}$. Si en outre $Y = \text{Spec } k$, on identifie faisceaux étales sur $\text{Spec } k$ et \mathfrak{g} -modules continus discrets ([1] VIII 2.2), via

$$\mathcal{F} \mapsto \varinjlim_{k'/k} \mathcal{F}(k') = \mathcal{F}(\bar{k}),$$

ce qui identifie $p_* \mathbf{G}_{m, X}$ au \mathfrak{g} -module $\bar{k}[X]^*$, et $R^1 p_* \mathbf{G}_{m, X}$ au \mathfrak{g} -module $\text{Pic } \bar{X}$. La proposition 1.4.1 permet de remplacer $\text{Ext}_X^i(\hat{S}, \mathbf{G}_{m, X})$ par $H^i(X_{\text{pl}}, S)$, ou même, si S est lisse, par exemple si c'est un tore, par $H^i(X_{\text{ét}}, S)$.

Voici quelques propriétés de cette suite exacte, qui nous seront utiles dans la suite:

PROPOSITION 1.5.2. *La suite exacte (1.5.1) du théorème précédent a les propriétés suivantes:*

- (i) Elle est fonctorielle en (X, S) , covariante en S et contravariante en X .
- (ii) Le morphisme χ s'obtient par fonctorialité de la façon suivante:

$$H^1(X, S) \times \hat{S}(\bar{k}) \rightarrow H^1(\bar{X}, \bar{S}) \times \text{Hom}_{\text{gr}}(\bar{S}, \mathbf{G}_{m, \bar{k}}) \rightarrow H^1(\bar{X}, \mathbf{G}_m) = \text{Pic } \bar{X}.$$

(iii) Si S est un tore, χ se décrit également comme suit: si \mathcal{F} est un X -torseur sous S , l'extension $(E_{\mathcal{F}})$ associée définit, par application de R^*p_* , un bord $\partial_{\mathcal{F}}$: $\hat{S}(\bar{k}) \rightarrow \text{Pic } \bar{X}$, et, au signe près:

$$\chi([\mathcal{F}]) = \partial_{\mathcal{F}}.$$

(iv) Le morphisme ∂ est, au signe près, le cup-produit par la classe de l'extension

$$1 \rightarrow \bar{k}[X]^* \rightarrow \bar{k}(X)^* \rightarrow \text{Div } \bar{X} \rightarrow \text{Pic } \bar{X} \rightarrow 0.$$

Autrement dit, il associe à un \mathfrak{g} -morphisme $\lambda: \hat{S} \rightarrow \text{Pic } \bar{X}$ la classe, au signe près, de la 2-extension de \hat{S} par $\bar{k}[X]^*$ obtenue par pull-back à partir de l'extension ci-dessus.

(v) i_1 et i_2 sont les morphismes naturels

$$\text{Ext}_k^i(\hat{S}, p_*\mathbf{G}_{m,X}) \rightarrow \text{Ext}_X^i(\hat{S}_X, \mathbf{G}_{m,X})$$

pour $i = 1, 2$.

Démonstration.

(i) La suite spectrale $(L)_{p, \mathcal{F}, \mathcal{G}}$ est covariante en \mathcal{G} et contravariante en \mathcal{F} . De plus, étant donné un morphisme $j: X' \rightarrow X$ de Y -schémas, on a un morphisme naturel de suites spectrales

$$j^*: (L)_{p, \mathcal{F}, \mathcal{G}} \rightarrow (L)_{p \circ j, \mathcal{F}, j^*\mathcal{G}}.$$

On en déduit aussitôt la covariance en S de la suite

$$\begin{aligned} 0 \rightarrow \text{Ext}_Y^1(\hat{S}, p_*\mathbf{G}_{m,X}) &\rightarrow \text{Ext}_X^1(\hat{S}, \mathbf{G}_{m,X}) \rightarrow \text{Hom}_Y(\hat{S}, \text{Pic}_{X/Y}) \\ &\rightarrow \text{Ext}_Y^2(\hat{S}, p_*\mathbf{G}_{m,X}) \rightarrow \text{Ext}_X^2(\hat{S}, \mathbf{G}_{m,X}) \end{aligned}$$

et en particulier celle de (1.5.1).

Pour la variance en X , soient $j: X' \rightarrow X$ un Y -morphisme et $p' = p \circ j$. Le morphisme j définit des morphismes de suites spectrales:

$$(L)_{p, \hat{S}, \mathbf{G}_{m,X}} \rightarrow (L)_{p', \hat{S}, j^*\mathbf{G}_{m,X}} \rightarrow (L)_{p', \hat{S}, \mathbf{G}_{m,X'}}.$$

Le premier traduit la functorialité de (L) en X , et le second est défini par le morphisme $j^*\mathbf{G}_{m,X} \rightarrow \mathbf{G}_{m,X'}$ adjoint du morphisme naturel $\mathbf{G}_{m,X} \rightarrow j_*\mathbf{G}_{m,X'}$.

(ii) Par functorialité de la suite spectrale, on se ramène au cas particulier

$$k = \bar{k} \quad \text{et} \quad S = \mathbf{G}_{m,k},$$

auquel cas on vérifie que $\chi = \text{id}_{\text{Pic } \bar{X}}$.

(iii) On va montrer plus généralement que, pour la suite spectrale $(L)_{p, \mathcal{F}, \mathcal{G}}$, le morphisme

$$\chi: \text{Ext}_X^1(p^*\mathcal{F}, \mathcal{G}) \rightarrow \text{Hom}_Y(\mathcal{F}, R^1p_*\mathcal{G})$$

se décrit comme suit: étant donné une extension de faisceaux sur $X_{\text{ét}}$

$$0 \rightarrow \mathcal{G} \rightarrow \mathcal{E} \rightarrow p^*\mathcal{F} \rightarrow 0,$$

elle définit un bord $\partial: p_*p^*\mathcal{F} \rightarrow R^1p_*\mathcal{G}$, et $\chi(\mathcal{E})$ n'est autre, au signe près, que le morphisme composé

$$\mathcal{F} \rightarrow p_*p^*\mathcal{F} \xrightarrow{\partial} R^1p_*\mathcal{G}$$

avec le morphisme naturel $\mathcal{F} \rightarrow p_*p^*\mathcal{F}$. La démonstration s'appuie sur le lemme 1.A.2 de l'appendice. Si l'on plonge \mathcal{G} dans un injectif $I_{\mathcal{G}}^0$, on obtient un diagramme commutatif à lignes exactes

$$\begin{array}{ccccccc} 0 & \rightarrow & \mathcal{G} & \rightarrow & \mathcal{E} & \rightarrow & p^*\mathcal{F} \rightarrow 0 \\ & & \parallel & & \downarrow & & \downarrow \beta \\ 0 & \rightarrow & \mathcal{G} & \rightarrow & I_{\mathcal{G}}^0 & \rightarrow & Z_{\mathcal{G}}^1 \rightarrow 0, \end{array}$$

d'où l'on tire le suivant:

$$\begin{array}{ccccccc} \text{Ext}_X^1(p^*\mathcal{F}, \mathcal{G}) & \xleftarrow{\partial} & \text{Hom}_X(p^*\mathcal{F}, p^*\mathcal{F}) & = & \text{Hom}_Y(\mathcal{F}, p_*p^*\mathcal{F}) & \xrightarrow{\partial} & \text{Hom}_Y(\mathcal{F}, R^1p_*\mathcal{G}) \\ \parallel & & \downarrow \beta & & \downarrow \beta & & \parallel \\ \text{Ext}_X^1(p^*\mathcal{F}, \mathcal{G}) & \xleftarrow{\partial} & \text{Hom}_X(p^*\mathcal{F}, Z_{\mathcal{G}}^1) & = & \text{Hom}_Y(\mathcal{F}, p_*Z_{\mathcal{G}}^1) & \xrightarrow{\partial} & \text{Hom}_Y(\mathcal{F}, R^1p_*\mathcal{G}). \end{array}$$

D'après le lemme 1.A.2, le morphisme χ est donné par la deuxième ligne. Or, sur la première ligne, le morphisme canonique $\iota: \mathcal{F} \rightarrow p_*p^*\mathcal{F}$ donne à gauche la classe de l'extension \mathcal{E} , et à droite le composé avec ∂ . D'où: $\chi(\mathcal{E}) = \partial\iota$, ce qui achève de prouver (iii).

(iv) Dans cet énoncé, on suppose X géométriquement intègre. Le résultat est un cas particulier du suivant: si, dans la suite spectrale $(L)_{p, \mathcal{F}, \mathcal{G}}$, on a une extension

$$0 \rightarrow \mathcal{G} \rightarrow \mathcal{E} \rightarrow \mathcal{D} \rightarrow 0$$

de faisceaux étales sur X , avec $R^1p_*\mathcal{E} = 0$, alors le morphisme

$$\partial: \text{Hom}_Y(\mathcal{F}, R^1p_*\mathcal{G}) \rightarrow \text{Ext}_Y^2(\mathcal{F}, p_*\mathcal{G})$$

est donné, au signe près, par le cup-produit avec la 2-extension de faisceaux

$$0 \rightarrow p_*\mathcal{G} \rightarrow p_*\mathcal{E} \rightarrow p_*\mathcal{D} \rightarrow R^1p_*\mathcal{G} \rightarrow 0.$$

C'est un corollaire immédiat du lemme 1.A.4. Il s'applique à $\mathcal{G} = G_{m, X}$ grâce à la suite exacte

$$1 \rightarrow G_{m, X} \rightarrow i_*G_{m, \eta} \rightarrow \mathcal{D}iv_X \rightarrow 0$$

de faisceaux sur $X_{\text{ét}}$, où $i: \eta \rightarrow X$ désigne l'inclusion du point générique η de X . On a effectivement

$$(R^1p_*)(i_*G_{m, \eta}) = 0,$$

car, si $r = p \circ i$, c'est un sous-faisceau de $R^1r_*G_{m, \eta}$ qui vaut 0 par le théorème 90. Dans l'énoncé, $Y = \text{Spec } k$.

(v) Là aussi, on se place dans le cadre plus général de la suite spectrale $(L)_{p, \mathcal{F}, \mathcal{G}}$. On va voir que l'edge

$$\text{Ext}_Y^n(\mathcal{F}, p_*\mathcal{G}) \rightarrow \text{Ext}_X^n(p^*\mathcal{F}, \mathcal{G})$$

se décrit comme suit en termes de n -extensions: étant donné une n -extension de \mathcal{F} par $p_*\mathcal{G}$, on lui applique p^* , ce qui donne une n -extension de $p^*\mathcal{F}$ par $p^*p_*\mathcal{G}$ qu'on pousse par le morphisme naturel $p^*p_*\mathcal{G} \rightarrow \mathcal{G}$. Cette assertion revient au lemme suivant qu'on pourrait d'ailleurs énoncer dans un cadre plus général:

LEMME 1.5.3. *Soit $p: X \rightarrow Y$. Soient $\mathcal{F}, \mathcal{F}'$ deux faisceaux sur Y et \mathcal{G} un faisceau sur X . Soient enfin $\lambda: \mathcal{F}' \rightarrow p_*\mathcal{G}$ et $\mu: p^*\mathcal{F}' \rightarrow \mathcal{G}$ deux morphismes adjoints. On a alors un diagramme commutatif:*

$$\begin{array}{ccccc} \text{Ext}_Y^n(\mathcal{F}, \mathcal{F}') & \xrightarrow{p^*} & \text{Ext}_X^n(p^*\mathcal{F}, p^*\mathcal{F}') & \xrightarrow{\mu} & \text{Ext}_X^n(p^*\mathcal{F}, \mathcal{G}) \\ & \searrow \lambda & & \nearrow i_n & \\ & & \text{Ext}_Y^n(\mathcal{F}, p_*\mathcal{G}) & & \end{array}$$

On applique ce lemme pour $\mathcal{F}' = p_*\mathcal{G}$, et pour λ l'identité de $p_*\mathcal{G}$ et μ son adjointe. La démonstration du lemme s'appuie sur la description générale de l'edge

$$i_n: E_2^{n,0} \rightarrow E^n$$

donnée au lemme 1.A.1. On considère des résolutions injectives

$$0 \rightarrow \mathcal{F}' \rightarrow D; \quad 0 \rightarrow \mathcal{G} \rightarrow I; \quad 0 \rightarrow p_*\mathcal{G} \rightarrow J$$

respectivement de \mathcal{F}' , \mathcal{G} et $p_*\mathcal{G}$. Il existe alors des morphismes de complexes γ et θ rendant commutatif le diagramme

$$\begin{array}{ccccc} 0 & \rightarrow & \mathcal{F}' & \rightarrow & D^\cdot \\ & & \lambda \downarrow & & \downarrow \gamma \\ 0 & \rightarrow & p_*\mathcal{G} & \rightarrow & J^\cdot \\ & & \parallel & & \downarrow \theta \\ 0 & \rightarrow & p_*\mathcal{G} & \rightarrow & p_*I^\cdot \end{array}$$

Soit $\xi = \text{adj}(\theta\gamma)$ l'adjointe de $\theta\gamma$. On obtient, par adjonction, le diagramme commutatif

$$\begin{array}{ccccc} 0 & \rightarrow & p^*\mathcal{F}' & \rightarrow & p_*D^\cdot \\ & & \mu \downarrow & & \downarrow \xi \\ 0 & \rightarrow & \mathcal{G} & \rightarrow & I^\cdot \end{array}$$

Le lemme 1.A.1 montre que le diagramme de l'énoncé est simplement l'homologie de degré n du diagramme de complexes:

$$\begin{array}{ccccc} \text{Hom}_Y(\mathcal{F}, D^\cdot) & \xrightarrow{p^*} & \text{Hom}_X(p^*\mathcal{F}, p^*D^\cdot) & \xrightarrow{\xi} & \text{Hom}_X(p^*\mathcal{F}, I^\cdot) \\ & \searrow \gamma & & & \nearrow \text{adj} \\ & & \text{Hom}_Y(\mathcal{F}, J^\cdot) & \xrightarrow{\theta} & \text{Hom}_Y(\mathcal{F}, p_*I^\cdot) \end{array}$$

Or ce diagramme est commutatif, car, si $\omega \in \text{Hom}_Y(\mathcal{F}, D^\cdot)$,

$$(\text{adj} \circ \theta\gamma)(\omega) = \text{adj}(\theta\gamma) \circ p^*(\omega) = \xi \circ p^*(\omega).$$

1.6. *Comportement par restriction à un ouvert.* Le comportement de la suite exacte fondamentale (1.5.1) par restriction à un ouvert de Zariski est donné par l'énoncé suivant:

THÉOREME 1.6.1. *Soient X une variété algébrique lisse sur le corps k et S un k -groupe de type multiplicatif. Soit U un ouvert de Zariski non vide de X . On note F le fermé complémentaire de U et on considère le \mathfrak{g} -module $P_{\bar{X}, \bar{U}}$ défini par la suite exacte*

$$(1.6.1) \quad 0 \rightarrow P_{\bar{X}, \bar{U}} \rightarrow \text{Pic } \bar{X} \rightarrow \text{Pic } \bar{U} \rightarrow 0.$$

Sous ces hypothèses, on a le diagramme suivant, dont les lignes et les colonnes sont

exactes, et qui commute à des signes près:

$$\begin{array}{ccccccc}
 \text{Hom}_{\mathfrak{g}}(\hat{S}, \bar{k}[U]^*) & \longrightarrow & H^0(U, S) & & 0 & & \text{Ext}_{\mathfrak{g}}^1(\hat{S}, \bar{k}[U]^*) \\
 \downarrow & & \downarrow & & \downarrow & & \downarrow \\
 0 \rightarrow \text{Hom}_{\mathfrak{g}}(\hat{S}, \bar{k}[U]^*/\bar{k}[X]^*) & \longrightarrow & \text{Hom}_{\mathfrak{g}}(\hat{S}, \text{Div}_{\bar{F}}\bar{X}) & \rightarrow & \text{Hom}_{\mathfrak{g}}(\hat{S}, P_{\bar{X}, \bar{U}}) & \rightarrow & \text{Ext}_{\mathfrak{g}}^1(\hat{S}, \bar{k}[U]^*/\bar{k}[X]^*) \\
 \downarrow & & \downarrow & & \downarrow & & \downarrow \\
 0 \longrightarrow \text{Ext}_{\mathfrak{g}}^1(\hat{S}, \bar{k}[X]^*) & \longrightarrow & H^1(X, S) & \longrightarrow & \text{Hom}_{\mathfrak{g}}(\hat{S}, \text{Pic } \bar{X}) & \longrightarrow & \text{Ext}_{\mathfrak{g}}^2(\hat{S}, \bar{k}[X]^*) \\
 \downarrow & & \downarrow & & \downarrow & & \downarrow \\
 0 \longrightarrow \text{Ext}_{\mathfrak{g}}^1(\hat{S}, \bar{k}[U]^*) & \longrightarrow & H^1(U, S) & \longrightarrow & \text{Hom}_{\mathfrak{g}}(\hat{S}, \text{Pic } \bar{U}) & \longrightarrow & \text{Ext}_{\mathfrak{g}}^2(\hat{S}, \bar{k}[U]^*) \\
 \downarrow \pi & & \downarrow & & & & \\
 \text{Hom}_{\mathfrak{g}}(\hat{S}, P_{\bar{X}, \bar{U}}) & \rightarrow & \text{Ext}_{\mathfrak{g}}^1(\hat{S}, \bar{k}[U]^*/\bar{k}[X]^*) & \rightarrow & \text{Ext}_{\mathfrak{g}}^1(\hat{S}, \text{Div}_{\bar{F}}\bar{X}). & &
 \end{array}$$

Dans ce diagramme, les suites exactes horizontales sont des morceaux de (1.5.1)_X, de (1.5.1)_U et de la suite exacte longue de cohomologie tirée de la suite exacte courte de \mathfrak{g} -modules

$$(1.6.3) \quad 1 \rightarrow \bar{k}[U]^*/\bar{k}[X]^* \rightarrow \text{Div}_{\bar{F}}\bar{X} \rightarrow P_{\bar{X}, \bar{U}} \rightarrow 0.$$

Les suites exactes verticales sont des morceaux des suites longues de cohomologie tirées des deux suites exactes de \mathfrak{g} -modules

$$(1.6.1) \quad 0 \rightarrow P_{\bar{X}, \bar{U}} \rightarrow \text{Pic } \bar{X} \rightarrow \text{Pic } \bar{U} \rightarrow 0$$

$$(1.6.4) \quad 1 \rightarrow \bar{k}[X]^* \rightarrow \bar{k}[U]^* \rightarrow \bar{k}[U]^*/\bar{k}[X]^* \rightarrow 1$$

ainsi que de la suite exacte de faisceaux étales définissant le faisceau de droite

$$(1.6.5) \quad 1 \rightarrow \mathbf{G}_{m, X} \rightarrow j_*\mathbf{G}_{m, U} \rightarrow \mathcal{D}iv_F X \rightarrow 0,$$

où j est l'immersion ouverte de U dans X , par application du foncteur $\text{Hom}_X(\hat{S}, \)$.

Pour préciser ce dernier point, il est bon d'isoler le lemme suivant:

LEMME 1.6.2. Sous les hypothèses du théorème, on a la suite exacte naturelle

$$\begin{aligned}
 (1.6.6) \quad 0 \rightarrow H^0(X, S) &\rightarrow H^0(U, S) \rightarrow \text{Hom}_{\mathfrak{g}}(\hat{S}, \text{Div}_{\bar{F}}\bar{X}) \\
 &\rightarrow H^1(X, S) \rightarrow H^1(U, S) \rightarrow \text{Ext}_{\mathfrak{g}}^1(\hat{S}, \text{Div}_{\bar{F}}\bar{X}).
 \end{aligned}$$

Démonstration du lemme. La suite exacte de faisceaux étales sur X

$$(1.6.5) \quad 1 \rightarrow \mathbf{G}_{m, X} \rightarrow j_*\mathbf{G}_{m, U} \rightarrow \mathcal{D}iv_F X \rightarrow 0$$

défini le faisceau étale $\mathcal{D}iv_F X$ des diviseurs de X à support dans F . On en

déduit, par application du foncteur $\text{Hom}_{X_{\text{ét}}}(\hat{S}, \cdot)$, une longue suite exacte de cohomologie étale dont le début s'écrit

$$(1.6.7) \quad 0 \rightarrow \text{Hom}_X(\hat{S}, \mathbf{G}_{m, X}) \rightarrow \text{Hom}_X(\hat{S}, j_*\mathbf{G}_{m, U}) \rightarrow \text{Hom}_X(\hat{S}, \mathcal{D}iv_F X) \\ \rightarrow \text{Ext}_X^1(\hat{S}, \mathbf{G}_{m, X}) \rightarrow \text{Ext}_X^1(\hat{S}, j_*\mathbf{G}_{m, U}) \rightarrow \text{Ext}_X^1(\hat{S}, \mathcal{D}iv_F X).$$

Dans cette suite, $\text{Ext}_X^i := \text{Ext}_{X_{\text{ét}}}^i$. D'après 1.3.2 et 1.4.1,

$$\text{Hom}_X(\hat{S}, \mathbf{G}_{m, X}) = H^0(X, S) \quad \text{et} \quad \text{Ext}_X^1(\hat{S}, \mathbf{G}_{m, X}) = H^1(X, S).$$

Par adjonction et par 1.3.2,

$$\text{Hom}_X(\hat{S}, j_*\mathbf{G}_{m, U}) = H^0(U, S).$$

D'autre part, $R^1 j_*\mathbf{G}_{m, U} = 0$ pour $j = j_{\text{ét}}: U_{\text{ét}} \rightarrow X_{\text{ét}}$; ceci se vérifie par réduction au cas strictement local X_{ξ} , auquel cas $\text{Pic } U_{\xi} = 0$ par lissité de X . La suite spectrale de Leray pour $j = j_{\text{ét}}$:

$$(1.6.8) \quad \text{Ext}_{X_{\text{ét}}}^p(\hat{S}, R^q j_*\mathbf{G}_{m, U}) \Rightarrow \text{Ext}_{U_{\text{ét}}}^{p+q}(\hat{S}, \mathbf{G}_{m, U})$$

donne alors, compte tenu de 1.4.1, l'identification

$$\text{Ext}_{X_{\text{ét}}}^1(\hat{S}, j_*\mathbf{G}_{m, U}) = \text{Ext}_{U_{\text{ét}}}^1(\hat{S}, \mathbf{G}_{m, U}) = H^1(U, S).$$

Pour interpréter enfin les termes en $\mathcal{D}iv_F X$, on considère la suite spectrale de Leray pour le morphisme structural $p = p_{\text{ét}}: X_{\text{ét}} \rightarrow \text{Spec } k_{\text{ét}}$

$$(1.6.9) \quad \text{Ext}_{k_{\text{ét}}}^p(\hat{S}, R^q p_*\mathcal{D}iv_F X) \Rightarrow \text{Ext}_{X_{\text{ét}}}^{p+q}(\hat{S}, \mathcal{D}iv_F X).$$

Nous allons établir les deux assertions suivantes:

- (i) le faisceau étale $p_*\mathcal{D}iv_F X$ s'identifie au \mathfrak{g} -module $\text{Div}_{\bar{F}}\bar{X}$;
- (ii) $R^1 p_*\mathcal{D}iv_F X = 0$.

On commence par noter que la suite exacte (1.6.5) est aussi une suite exacte de faisceaux sur X_{zar} , auquel cas on retrouve la définition même du faisceau des diviseurs de Cartier à support dans F . Pour l'établir, soit $r: X_{\text{ét}} \rightarrow X_{\text{zar}}$ le morphisme canonique. Le théorème 90 assure que $\text{Pic } X_{\xi} = 0$ pour tout localisé de X , d'où $R^1 r_*\mathbf{G}_{m, X} = 0$, et le résultat annoncé. Cette remarque vaut tout autant sur \bar{X} . Dans la correspondance entre faisceaux étales sur $\text{Spec } k$ et modules galoisiens, $p_*\mathcal{D}iv_F X$ correspond au \mathfrak{g} -module $H^0(\bar{X}, \mathcal{D}iv_{\bar{F}}\bar{X})$ et $R^1 p_*\mathcal{D}iv_F X$ au \mathfrak{g} -module $H^1(\bar{X}, \mathcal{D}iv_{\bar{F}}\bar{X})$, où $\mathcal{D}iv_{\bar{F}}\bar{X}$ est le faisceau des diviseurs de Cartier de \bar{X} à support dans \bar{F} . On a donc $H^0(\bar{X}, \mathcal{D}iv_{\bar{F}}\bar{X}) = \text{Div}_{\bar{F}}\bar{X}$. D'où (i). D'autre part,

$$H^1(\bar{X}, \mathcal{D}iv_{\bar{F}}\bar{X}) = 0,$$

car X est lisse et $H^1(Y, \mathbf{Z}) = 0$ pour tout schéma Y normal intègre ([1] IX 3.6(iii)). D'où (ii). La suite exacte des termes de bas degré de la suite

spectrale (1.6.9)

$$0 \rightarrow \text{Ext}_{k_{\text{ét}}}^1(\hat{S}, p_* \mathcal{D}iv_F X) \rightarrow \text{Ext}_{X_{\text{ét}}}^1(\hat{S}, \mathcal{D}iv_F X) \rightarrow \text{Hom}_k(\hat{S}, R^1 p_* \mathcal{D}iv_F X)$$

définit donc, d'après (i) et (ii), un isomorphisme canonique

$$(iii) \text{Ext}_{X_{\text{ét}}}^1(\hat{S}, \mathcal{D}iv_F X) = \text{Ext}_{\mathfrak{g}}^1(\hat{S}, \text{Div}_{\bar{F}} \bar{X}).$$

Remarque 1.6.3. La suite exacte du lemme prouve que, si S est un k -tore flasque (cf. [20] §1 ou [26] §0), la restriction $H^1(X, S) \rightarrow H^1(U, S)$ est surjective (voir aussi [26] théorème 2.2).

Démonstration du théorème. Il suffit d'appliquer le lemme 1.A.5 avec les données suivantes:

\mathcal{C} (resp. \mathcal{C}') = la catégorie des faisceaux de groupes abéliens sur $X_{\text{ét}}$ (resp. $(\text{Spec } k)_{\text{ét}}$) et \mathcal{C}'' = la catégorie des groupes abéliens,

$\Phi = p_*$ et $\Psi = \text{Hom}_k(\hat{S}, _)$, de telle sorte que, par adjonction, d'après 1.3.1, $\Psi\Phi(\mathcal{G}) = \text{Hom}_X(\hat{S}, \mathcal{G})$, et que la condition (1.4.0) est satisfaite, la suite exacte

$$(1.6.5) \quad 1 \rightarrow \mathbf{G}_{m, X} \rightarrow j_* \mathbf{G}_{m, U} \rightarrow \mathcal{D}iv_F X \rightarrow 0$$

jouant le rôle de (1.A.15), ce qui est possible car l'hypothèse $R^1 p_* \mathcal{D}iv_F X = 0$ est vérifiée comme on l'a vu plus haut, et alors, avec les notations du lemme 1.A.5,

$$P = \ker(\text{Pic } \bar{X} \rightarrow \text{Pic } \bar{U}) = P_{\bar{X}, \bar{U}},$$

par identification de $R^1 p_* \mathbf{G}_{m, X}$ avec le module galoisien $\text{Pic } \bar{X}$, et de $(R^1 p_*) j_* \mathbf{G}_{m, U}$ avec le module galoisien $\text{Pic } \bar{U}$: cette dernière identification passe par l'égalité $(R^1 p_*) j_* \mathbf{G}_{m, U} = R^1(pj)_* \mathbf{G}_{m, U}$, due au fait que $R^1 j_* \mathbf{G}_{m, U} = 0$ (voir démonstration du lemme 1.6.2).

LEMME 1.6.4. *Le cheminement ci-dessous, extrait du diagramme du théorème précédent, est cohérent, au signe près:*

$$(1.6.10) \quad \begin{array}{ccc} & \text{Hom}_{\mathfrak{g}}(\hat{S}, P_{\bar{X}, \bar{U}}) \xrightarrow{\partial} \text{Ext}_{\mathfrak{g}}^1(\hat{S}, \bar{k}[U]^*/\bar{k}[X]^*) & \\ & \downarrow & \\ & H^1(X, S) \xrightarrow{x} \text{Hom}_{\mathfrak{g}}(\hat{S}, \text{Pic } \bar{X}) & \lambda \rightarrow E \\ & \downarrow & \downarrow \\ & \text{Ext}_{\mathfrak{g}}^1(\hat{S}, \bar{k}[U]^*) \hookrightarrow H^1(U, S) & \mathcal{T} \rightarrow \chi_{\mathcal{T}} \\ & \downarrow \pi & \downarrow \\ & \text{Ext}_{\mathfrak{g}}^1(\hat{S}, \bar{k}[U]^*/\bar{k}[X]^*), & E_{\mathcal{T}} \rightarrow \mathcal{T}_U \\ & & \downarrow \\ & & E' \end{array}$$

autrement dit, si la classe du torseur \mathcal{T} dans $H^1(X, S)$ est reliée à

$$E \text{ et } E' \in \text{Ext}_q^1(\hat{S}, \bar{k}[U]^*/\bar{k}[X]^*)$$

comme indiqué sur le diagramme ci-dessus, alors, au signe près, $E = E'$.

Démonstration. Il suffit d'appliquer le lemme 1.A.6 de l'appendice avec les mêmes données que dans l'application du lemme 1.A.5 au théorème précédent. On notera que $[\mathcal{T}] \in H^1(X, S)$ est reliée à E et E' comme indiqué dans l'énoncé, si et seulement si $\chi(\mathcal{T}_U) = 0$.

LEMME 1.6.5. Soit $p: X \rightarrow \text{Spec } k$ un k -schéma. Soient

$$(1.6.11) \quad 1 \rightarrow S \rightarrow M \rightarrow T \rightarrow 1$$

une suite exacte de k -groupes de type multiplicatif et

$$(1.6.12) \quad 0 \rightarrow \hat{T} \rightarrow \hat{M} \rightarrow \hat{S} \rightarrow 0$$

la suite exacte duale de groupes constants tordus. On a alors le diagramme commutatif suivant, où les cobords ∂ sont définis par (1.6.11) et (1.6.12), où ε est l'edge (1.4.1), et où η est l'edge de la suite spectrale (1.5.2):

$$(1.6.13) \quad \begin{array}{ccc} H^0(X, \mathcal{H}om_X(\hat{T}_X, \mathbf{G}_{m, X})) = H^0(X, T) & \xrightarrow{\partial} & H^1(X, S) \\ \parallel & & \downarrow \varepsilon \\ \text{Hom}_X(\hat{T}_X, \mathbf{G}_{m, X}) & \xrightarrow{\partial} & \text{Ext}_X^1(\hat{S}_X, \mathbf{G}_{m, X}) \\ \parallel & \nearrow \eta & \\ \text{Hom}_k(\hat{T}, p_*\mathbf{G}_{m, X}) & & \\ \downarrow \partial & & \\ \text{Ext}_k^1(\hat{S}, p_*\mathbf{G}_{m, X}) & & \end{array}$$

Démonstration. On est en topologie pl . Le diagramme ci-dessus s'écrit

$$\begin{array}{ccc} H^0(X, \mathcal{H}om_X(\hat{T}_X, \mathbf{G}_{m, X})) & \xrightarrow{\partial} & H^1(X, \mathcal{H}om_X(\hat{S}_X, \mathbf{G}_{m, X})) \\ \parallel & & \downarrow \varepsilon \\ \text{Hom}_X(\hat{T}_X, \mathbf{G}_{m, X}) & \xrightarrow{\partial} & \text{Ext}_X^1(\hat{S}_X, \mathbf{G}_{m, X}) \\ \uparrow \cong & & \uparrow \eta \\ \text{Hom}_k(\hat{T}, p_*\mathbf{G}_{m, X}) & \xrightarrow{\partial} & \text{Ext}_k^1(\hat{S}, p_*\mathbf{G}_{m, X}). \end{array}$$

1. Montrons d'abord la commutativité du carré supérieur. Si

$$0 \rightarrow G_{m, X} \rightarrow I^0 \rightarrow I^1$$

est le début d'une résolution injective de $G_{m, X}$, elle définit le diagramme commutatif suivant, à lignes et colonnes exactes:

$$\begin{array}{ccccccc}
 0 & \rightarrow & \mathcal{H}om_X(\hat{S}, G_{m, X}) & \rightarrow & \mathcal{H}om_X(\hat{M}, G_{m, X}) & \rightarrow & \mathcal{H}om_X(\hat{T}, G_{m, X}) \rightarrow 0 \\
 & & \downarrow & & \downarrow & & \downarrow \\
 0 & \rightarrow & \mathcal{H}om_X(\hat{S}, I^0) & \rightarrow & \mathcal{H}om_X(\hat{M}, I^0) & \rightarrow & \mathcal{H}om_X(\hat{T}, I^0) \rightarrow 0 \\
 & & \downarrow & & \downarrow & & \downarrow \\
 0 & \rightarrow & \mathcal{H}om_X(\hat{S}, I^1) & \rightarrow & \mathcal{H}om_X(\hat{M}, I^1) & \rightarrow & \mathcal{H}om_X(\hat{T}, I^1) \rightarrow 0.
 \end{array}$$

Le bord

$$\partial: \text{Hom}_X(\hat{T}, G_{m, X}) \rightarrow H^1(X, \mathcal{H}om_X(\hat{S}, G_{m, X}))$$

est le morphisme de liaison défini par le diagramme $H^0(X, *)$ où $*$ désigne le diagramme formé par les deux dernières lignes ci-dessus, qui forment le début d'une résolution acyclique de la première ligne. Quant au bord

$$\partial: \text{Hom}_X(\hat{T}, G_{m, X}) \rightarrow \text{Ext}_X^1(\hat{S}, G_{m, X})$$

c'est aussi directement le morphisme de liaison défini par le même diagramme $H^0(X, *)$. On en déduit la commutativité de **1**, compte tenu de l'interprétation de l'edge ϵ .

2. Si $\lambda \in \text{Hom}_k(\hat{T}, p_*G_{m, X})$, il lui correspond, par l'isomorphisme d'adjonction, le composé μ des morphismes

$$\hat{T}_X \xrightarrow{p^*\lambda} p^*p_*G_{m, X} \xrightarrow{\omega} G_{m, X}.$$

On a les diagrammes commutatifs successifs:

$$\begin{array}{ccccccc}
 0 & \longrightarrow & \hat{T} & \longrightarrow & \hat{M} & \longrightarrow & \hat{S} \rightarrow 0 \\
 & & \lambda \downarrow & & \downarrow & & \parallel \\
 0 & \rightarrow & p_*G_{m, X} & \rightarrow & E & \rightarrow & \hat{S} \rightarrow 0
 \end{array}$$

dont la dernière ligne n'est autre que l'extension $\partial(\lambda)$, et

$$\begin{array}{ccccccc}
 0 & \longrightarrow & p^*\hat{T} & \longrightarrow & p^*\hat{M} & \longrightarrow & p^*\hat{S} \rightarrow 0 \\
 & & p^*\lambda \downarrow & & \downarrow & & \parallel \\
 0 & \longrightarrow & p^*p_*G_{m,x} & \longrightarrow & p^*E & \longrightarrow & p^*\hat{S} \rightarrow 0 \\
 & & \omega \downarrow & & \downarrow & & \parallel \\
 0 & \longrightarrow & G_{m,x} & \longrightarrow & F & \longrightarrow & p^*\hat{S} \rightarrow 0.
 \end{array}$$

La description de η donnée dans la proposition 1.5.2(v) montre d'après les deux dernières lignes que l'extension F a pour classe $\eta(\partial(\lambda))$. D'autre part, d'après les deux lignes extrêmes, la classe de F est aussi $\partial(\omega \circ p^*\lambda) = \partial(\mu)$. Ceci prouve la commutativité de $\mathbf{2}$ et achève la démonstration.

1.A. *Appendice d'algèbre homologique.* On renvoie à [6] ou [36] pour les généralités d'algèbre homologique; voir aussi [44] (appendice B). Pour les diverses définitions ou interprétations des Ext^i , voir par exemple [36], IV 7-9.

1.A.0. On introduit, pour tout cet appendice, les hypothèses et notations suivantes:

Soient $\mathcal{C}, \mathcal{C}', \mathcal{C}''$ trois catégories abéliennes, et $\Phi: \mathcal{C} \rightarrow \mathcal{C}', \Psi: \mathcal{C}' \rightarrow \mathcal{C}''$ deux foncteurs additifs exacts à gauche. On suppose que \mathcal{C} et \mathcal{C}' ont assez d'injectifs et que Φ transforme injectif en Ψ -acyclique. On fait même souvent l'hypothèse plus forte suivante:

(1.A.0) Φ possède un adjoint à gauche exact,

auquel cas Φ transforme injectif en injectif. Sous ces hypothèses, on a la suite spectrale de dérivation du foncteur composé $\Psi \circ \Phi$:

(1.A.1) $E_2^{p,q} = R^p\Psi(R^q\Phi(A)) \Rightarrow E^{p+q} = R^{p+q}(\Psi\Phi)(A),$

dont la suite des termes de bas degré commence par

(1.A.2) $0 \rightarrow (R^1\Psi)(\Phi A) \rightarrow (R^1\Psi\Phi)(A) \rightarrow \Psi((R^1\Phi)(A))$
 $\rightarrow (R^2\Psi)(\Phi A) \rightarrow (R^2\Psi\Phi)(A),$

et dont les edges s'écrivent

(1.A.3) $E^n = (R^n\Psi\Phi)(A) \rightarrow E_2^{0,n} = \Psi(R^n\Phi)(A)$

(1.A.4) $E_2^{n,0} = (R^n\Psi)(\Phi A) \rightarrow E^n = (R^n\Psi\Phi)(A).$

Rappelons comment on peut décrire la suite spectrale (1.A.1). Soient $A \rightarrow I_A$ une

résolution injective de A , puis $\Phi A \rightarrow I_{\Phi A}^\bullet$ une résolution injective de ΦA , enfin $\Phi I_A^\bullet \rightarrow L^\bullet$ une résolution de Cartan-Eilenberg de ΦI_A^\bullet . On obtient ainsi le carré commutatif:

$$(1.A.5) \quad \begin{array}{ccc} \Phi I_A^\bullet & \xrightarrow{\alpha} & L^\bullet \\ \uparrow & \swarrow \theta & \uparrow \beta \\ \Phi A & \longrightarrow & I_{\Phi A}^\bullet \end{array}$$

qu'on complète, sous (1.A.0), par la diagonale θ , telle que le triangle inférieur soit commutatif, tandis que β et $\alpha\theta$ sont homotopes. L'existence de θ , sous (1.A.0), tient à ce que $I_{\Phi A}^\bullet$ est acyclique et ΦI_A^\bullet injectif. Par application de Ψ , on obtient ainsi le diagramme

$$(1.A.6) \quad \begin{array}{ccc} \Psi \Phi I_A^\bullet & \xrightarrow{\Psi(\alpha)} & \Psi L^\bullet \\ \uparrow & \swarrow \Psi(\theta) & \uparrow \Psi(\beta) \\ \Psi \Phi A & \longrightarrow & \Psi I_{\Phi A}^\bullet \end{array}$$

dans lequel chaque horizontale $\Psi I_A^q \rightarrow \Psi L^q$ est une résolution de ΨI_A^q . La suite spectrale (1.A.1) est la suite spectrale du complexe bigradué $\Psi(L^\bullet)$ filtré par le premier exposant p . Par dégénérescence de la suite spectrale du même complexe filtré par le second exposant q , l'aboutissement de (1.A.1) s'identifie via $H^n(\Psi(\alpha))$ à $H^n(\Psi \Phi(I_A^\bullet)) = (R^n \Psi \Phi)A$, et les termes initiaux "de côté" sont d'une part $H^n(\Psi I_{\Phi A}^\bullet) = R^n \Psi(\Phi A)$ via $H^n(\Psi(\alpha))$ et d'autre part $\Psi(H^n(\Phi(I_A^\bullet))) = \Psi(R^n \Phi A)$. D'où le lemme:

LEMME 1.A.1. *Avec les notations introduites ci-dessus, la suite spectrale (1.A.1) admet pour edge $E^n = (R^n \Psi \Phi)(A) \rightarrow E_2^{0,n} = \Psi(R^n \Phi)A$ le morphisme naturel $H^n(\Psi \Phi I_A^\bullet) \rightarrow \Psi(H^n(\Phi I_A^\bullet))$, et pour edge $E_2^{n,0} = (R^n \Psi) \Phi A \rightarrow E^n = (R^n \Psi \Phi)A$ le morphisme $H^n(\Psi(\theta)): H^n(\Psi I_{\Phi A}^\bullet) \rightarrow H^n(\Psi \Phi I_A^\bullet)$.*

Démonstration. Vérification facile à partir de ce qu'on a dit précédemment.

Pour le début de la suite des termes de bas degré on a le lemme suivant:

LEMME 1.A.2. *Soit*

$$(1.A.7) \quad 0 \rightarrow A \rightarrow I_A^0 \rightarrow Z_A^1 \rightarrow 0$$

une suite exacte dans \mathcal{C} avec I_A^0 injectif. Soit

$$(1.A.8) \quad 0 \rightarrow \Phi A \rightarrow \Phi I_A^0 \rightarrow \Phi Z_A^1 \rightarrow R^1 \Phi A \rightarrow 0$$

la 2-extension qu'on en déduit par application de Φ et qu'on peut couper en deux extensions

$$(1.A.9) \quad 0 \rightarrow \Phi A \rightarrow \Phi I_A^0 \rightarrow Z_{\Phi A}^1 \rightarrow 0,$$

$$(1.A.10) \quad 0 \rightarrow Z_{\Phi A}^1 \rightarrow \Phi Z_A^1 \rightarrow R^1\Phi A \rightarrow 0.$$

On a alors le diagramme de suites exactes suivant, commutatif à des signes près:

$$(1.A.11) \quad \begin{array}{ccccccc} & & \Psi\Phi I_A^0 & \xlongequal{\quad} & \Psi\Phi I_A^0 & & \\ & & \downarrow & & \downarrow & & \\ 0 & \longrightarrow & \Psi Z_{\Phi A}^1 & \longrightarrow & \Psi\Phi Z_A^1 & \longrightarrow & \Psi(R^1\Phi A) \rightarrow (R^1\Psi)Z_{\Phi A}^1 \rightarrow (R^1\Psi\Phi)Z_A^1 \\ & & \downarrow & & \downarrow & & \parallel \quad \partial \downarrow \cong \quad \partial \downarrow \cong \\ 0 & \rightarrow & (R^1\Psi)\Phi A & \rightarrow & (R^1\Psi\Phi)(A) & \rightarrow & \Psi(R^1\Phi A) \rightarrow (R^2\Psi)\Phi A \rightarrow (R^2\Psi\Phi)A \\ & & \downarrow & & \downarrow & & \\ & & 0 & & 0 & & \end{array}$$

dont l'horizontale médiane est le début de la longue suite exacte dérivée $R^*\Psi$ (1.A.10) suivi de l'edge

$$(R^1\Psi)\Phi Z_A^1 \rightarrow (R^1\Psi\Phi)Z_A^1$$

et dont les bords ∂ dérivent de la suite exacte courte (1.A.9).

Le diagramme (1.A.11) donne une description "concrète" du début de la suite des termes de bas degré (1.A.2). La vérification se fait à partir des diagrammes (1.A.5) et (1.A.6). Sous l'hypothèse (1.A.0), le début de la résolution injective $\Phi A \rightarrow I_{\Phi A}^*$ peut être pris égal à $\Phi A \rightarrow \Phi I_A^0 \rightarrow \Phi I_A^1$, auquel cas on peut prendre pour θ^0 et θ^1 les morphismes "identité." Sinon, la notation $Z_{\Phi A}^1$ est quelque peu abusive, mais l'hypothèse de Ψ -acyclicité des ΦI_A^q , laquelle implique par exemple $(R^1\Psi)\Phi I_A^0 = 0$, permet d'obtenir encore les mêmes présentations. On notera que le morphisme $\partial: \Phi Z_A^1 \rightarrow R^1\Phi A$ de (1.A.8) est l'opposé du morphisme naturel de définition de $R^1\Phi A$, résultat qu'on utilise souvent implicitement ici; plus généralement, avec des notations évidentes, le bord itéré $\partial: \Phi Z_A^n \rightarrow R^n\Phi A$, défini en tronquant la résolution I_A^* au niveau n , est égal au morphisme naturel de définition de $R^n\Phi A$ au signe $(-1)^{n(n+1)/2}$ près ([6] V 7.1).

On a également les énoncés particuliers suivants:

LEMME 1.A.3. Si $R^1\Phi A = 0$, toute extension

$$(1.A.12) \quad 0 \rightarrow A \rightarrow E \rightarrow B \rightarrow 0$$

définit un carré commutatif, au signe près:

$$(1.A.13) \quad \begin{array}{ccc} \Psi\Phi(B) & \xrightarrow{\partial} & (R^1\Psi)\Phi A \\ \parallel & & \downarrow i_1 \\ \Psi\Phi(B) & \xrightarrow{\partial} & (R^1\Psi\Phi)A \end{array}$$

où i_1 est l'edge (1.A.4) et où les bords ∂ sont déduits de Φ (1.A.12) par application de Ψ et de (1.A.12) par application de $\Psi\Phi$.

Démonstration. Conséquence de l'existence, par l'injectivité de I_A^0 , d'un diagramme commutatif

$$\begin{array}{ccccccc} 0 & \rightarrow & A & \rightarrow & E & \rightarrow & B & \rightarrow & 0 \\ & & \parallel & & \downarrow & & \downarrow & & \\ 0 & \rightarrow & A & \rightarrow & I_A^0 & \rightarrow & Z_A^1 & \rightarrow & 0. \end{array}$$

LEMME 1.A.4. *Le morphisme*

$$\Psi(R^1\Phi A) \rightarrow (R^2\Psi)\Phi A$$

est, au signe près, le bord itéré défini par application de Ψ à la 2-extension (1.A.8). Si

$$(1.A.12) \quad 0 \rightarrow A \rightarrow E \rightarrow B \rightarrow 0$$

est une extension telle que $R^1\Phi E = 0$, c'est aussi, au signe près, le bord itéré défini par application de Ψ à la 2-extension

$$(1.A.14) \quad 0 \rightarrow \Phi A \rightarrow \Phi E \rightarrow \Phi B \rightarrow R^1\Phi A \rightarrow 0.$$

Démonstration. La première partie résulte du lemme 1.A.2. Pour la seconde assertion, on procède comme au lemme 1.A.3, ce qui permet d'obtenir un isomorphisme (1.A.14) \rightarrow (1.A.8) de 2-extensions.

LEMME 1.A.5. *On garde les hypothèses et notations initiales. On considère en outre, dans la catégorie \mathcal{C} , une suite exacte*

$$(1.A.15) \quad 0 \rightarrow A \rightarrow B \rightarrow C \rightarrow 0$$

telle que $R^1\Phi C = 0$. Soit P le noyau du morphisme $R^1\Phi A \rightarrow R^1\Phi B$. On a ainsi les

trois suites exactes courtes

$$(1.A.16) \quad 0 \rightarrow \Phi A \rightarrow \Phi B \rightarrow \Phi B/\Phi A \rightarrow 0$$

$$(1.A.17) \quad 0 \rightarrow \Phi B/\Phi A \rightarrow \Phi C \rightarrow P \rightarrow 0$$

$$(1.A.18) \quad 0 \rightarrow P \rightarrow R^1\Phi A \rightarrow R^1\Phi B \rightarrow 0.$$

On a alors le diagramme suivant, formé de lignes et de colonnes exactes, et commutatif à des signes près:

$$\begin{array}{ccccccc}
 & \Psi\Phi B & \xlongequal{\quad} & \Psi\Phi B & & 0 & & (R^1\Psi)\Phi B \\
 & \downarrow & & \downarrow & & \downarrow & & \downarrow \\
 0 & \rightarrow \Psi(\Phi B/\Phi A) & \longrightarrow & \Psi\Phi C & \longrightarrow & \Psi P & \longrightarrow & (R^1\Psi)(\Phi B/\Phi A) \\
 & \downarrow & & \downarrow & & \downarrow & & \downarrow \\
 & & \mathbf{1} & & \mathbf{2} & & \mathbf{3} & \\
 0 & \rightarrow (R^1\Psi)\Phi A & \longrightarrow & (R^1\Psi\Phi)A & \longrightarrow & \Psi(R^1\Phi)A & \longrightarrow & (R^2\Psi)\Phi A \\
 & \downarrow & & \downarrow & & \downarrow & & \downarrow \\
 & & * & & * & & * & \\
 (1.A.19) & 0 \rightarrow (R^1\Psi)\Phi B & \longrightarrow & (R^1\Psi\Phi)B & \longrightarrow & \Psi(R^1\Phi)B & \longrightarrow & (R^2\Psi)\Phi B \\
 & \downarrow & & \downarrow & & & & \\
 & & & & & (R^1\Psi\Phi)C & & \\
 & & & & & \uparrow \cong & & \\
 & & & & & \mathbf{4} & & \\
 & & & & & \downarrow & & \\
 & & & & & \Psi(P) \rightarrow (R^1\Psi)(\Phi B/\Phi A) \rightarrow (R^1\Psi)\Phi C. & &
 \end{array}$$

Dans ce diagramme, les horizontales sont les suites (1.A.2)_A, (1.A.2)_B, et un morceau de la longue suite de cohomologie (R[•]Ψ) (1.A.17), les verticales sont des morceaux des longues suites de cohomologie (R[•]Ψ) (1.A.16), (R[•]ΨΦ) (1.A.15) et (R[•]Ψ) (1.A.18). La “soudure”

$$(R^1\Psi)\Phi C \xrightarrow{\cong} (R^1\Psi\Phi)C$$

est donnée par l’edge de la suite spectrale (1.A.4)_C.

Démonstration. On vérifie successivement les commutativités des carrés *, puis 1 à 4.

*. La commutativité du carré supérieur * est évidente; celle des trois autres carrés marqués * résulte de la functorialité en A de la suite spectrale (1.A.1).

1. Avec les notations du lemme 1.A.2, on a, par injectivité de I_A^0 , un diagramme

$$(1.A.20) \quad \begin{array}{ccccccc} 0 & \rightarrow & A & \rightarrow & B & \rightarrow & C & \rightarrow & 0 \\ & & \parallel & & \downarrow & & \downarrow & & \\ 0 & \rightarrow & A & \rightarrow & I_A^0 & \rightarrow & Z_A^1 & \rightarrow & 0, \end{array}$$

d'où l'on déduit par application de Φ les deux diagrammes suivants de suites exactes:

$$(1.A.21) \quad \begin{array}{ccccccc} 0 & \rightarrow & \Phi A & \rightarrow & \Phi B & \rightarrow & \Phi B / \Phi A & \rightarrow & 0 \\ & & \parallel & & \downarrow & & \downarrow & & \\ 0 & \rightarrow & \Phi A & \rightarrow & \Phi I_A^0 & \rightarrow & Z_{\Phi A}^1 & \rightarrow & 0, \end{array}$$

$$(1.A.22) \quad \begin{array}{ccccccc} 0 & \rightarrow & \Phi B / \Phi A & \rightarrow & \Phi C & \rightarrow & R^1 \Phi A \\ & & \downarrow & & \downarrow & & \parallel & & \\ 0 & \rightarrow & Z_{\Phi A}^1 & \rightarrow & \Phi Z_A^1 & \rightarrow & R^1 \Phi A & \rightarrow & 0. \end{array}$$

On déduit de ce dernier diagramme le carré commutatif

$$\begin{array}{ccc} \Psi(\Phi B / \Phi A) & \rightarrow & \Psi \Phi C \\ \downarrow & & \downarrow \\ \Psi Z_{\Phi A}^1 & \longrightarrow & \Psi \Phi Z_A^1, \end{array}$$

qui, d'après le lemme 1.A.2 et le diagramme (1.A.21) ci-dessus, induit le carré 1 après passage au quotient par l'image de $\Psi \Phi I_A^0$ sur la ligne du bas.

2. Il s'agit de voir que le triangle

$$(1.A.23) \quad \begin{array}{ccc} \Psi \Phi C & & \\ \vartheta \downarrow & \searrow \vartheta & \\ (R^1 \Psi \Phi) A & \rightarrow & \Psi(R^1 \Phi A) \end{array}$$

commute. Or, dans le diagramme ci-dessous:

$$\begin{array}{ccc} \Psi \Phi C & \xrightarrow{\vartheta} & (R^1 \Psi \Phi) A \\ \downarrow & \nearrow & \downarrow \\ \Psi \Phi Z_A^1 & \xrightarrow{\vartheta} & \Psi(R^1 \Phi A) \end{array}$$

les deux triangles commutent, celui du bas d'après le lemme 1.A.2. Le carré commute donc, et si l'on trace l'autre diagonale:

$$\begin{array}{ccc} \Psi\Phi C & \xrightarrow{\partial} & (R^1\Psi\Phi)A \\ \downarrow & \searrow & \downarrow \\ \Psi\Phi Z_A^1 & \xrightarrow{\partial} & \Psi(R^1\Phi A) \end{array}$$

le triangle inférieur commute comme image par Ψ d'un triangle commutatif, ce qui montre finalement que le triangle supérieur, qui n'est autre que (1.A.23), commute aussi.

3. Le diagramme (1.A.20) donne le diagramme commutatif de 2-extensions:

$$(1.A.24) \quad \begin{array}{ccccccccc} 0 & \rightarrow & \Phi A & \rightarrow & \Phi B & \rightarrow & \Phi C & \rightarrow & P & \rightarrow & 0 \\ & & \parallel & & \downarrow & & \downarrow & & \downarrow & & \\ 0 & \rightarrow & \Phi A & \rightarrow & \Phi I_A^0 & \rightarrow & \Phi Z_A^1 & \rightarrow & R^1\Phi A & \rightarrow & 0, \end{array}$$

d'où le carré commutatif

$$(1.A.25) \quad \begin{array}{ccc} \Psi P & \xrightarrow{\partial_2} & (R^2\Psi)\Phi A \\ \downarrow & & \parallel \\ \Psi(R^1\Phi A) & \xrightarrow{\partial} & (R^2\Psi)\Phi A \end{array}$$

où, d'après le lemme 1.A.4, le morphisme ∂ coïncide avec la flèche correspondante dans la partie 3 de (1.A.19). Quant à ∂_2 , c'est la composée des applications

$$\Psi P \rightarrow (R^1\Psi)(\Phi B/\Phi A) \rightarrow (R^2\Psi)(\Phi A)$$

de la même partie 3 du diagramme (1.A.19). D'où la commutativité de 3.

4. On peut considérer un diagramme commutatif de suites exactes

$$(1.A.26) \quad \begin{array}{ccccccc} 0 & \rightarrow & B & \rightarrow & I_B^0 & \rightarrow & Z_B^1 & \rightarrow & 0 \\ & & \downarrow & & \downarrow & & \downarrow & & \\ 0 & \rightarrow & C & \rightarrow & I_C^0 & \rightarrow & Z_C^1 & \rightarrow & 0, \end{array}$$

où I_B^0 et I_C^0 sont injectifs. On en tire successivement les diagrammes commutatifs

suivants:

$$\begin{array}{ccccccc}
 0 & \longrightarrow & \Phi B & \longrightarrow & \Phi I_B^0 & \longrightarrow & Z_{\Phi B}^1 \longrightarrow 0 \\
 & & \downarrow & & \downarrow & & \downarrow \\
 (1.A.27) & & 0 \rightarrow \Phi B/\Phi A & \rightarrow & \Phi I_C^0 & \rightarrow & Z_{\Phi B/\Phi A}^1 \rightarrow 0 \\
 & & \downarrow & & \parallel & & \downarrow \\
 & & 0 \longrightarrow \Phi C & \longrightarrow & \Phi I_C^0 & \longrightarrow & Z_{\Phi C}^1 \longrightarrow 0,
 \end{array}$$

dont les lignes sont exactes, et dont la partie droite se prolonge par

$$\begin{array}{ccc}
 Z_{\Phi B}^1 & \hookrightarrow & \Phi Z_B^1 \\
 \downarrow & & \downarrow \\
 Z_{\Phi C}^1 & \xrightarrow{\cong} & \Phi Z_C^1,
 \end{array}$$

compte tenu de $R^1\Phi C = 0$, puis

$$\begin{array}{ccc}
 \Psi Z_{\Phi B}^1 & \longrightarrow & \Psi \Phi Z_B^1 \\
 \downarrow & & \downarrow \\
 & & \Psi \Phi Z_C^1 \\
 & & \uparrow \cong \\
 \Psi Z_{\Phi B/\Phi A}^1 & \longrightarrow & \Psi Z_{\Phi C}^1,
 \end{array}$$

et, d'après le lemme 1.A.2, ce dernier diagramme induit le carré **4** de l'énoncé par passage au quotient, par $\Psi\Phi I_B^0$ sur la ligne du haut et par $\Psi\Phi I_C^0$ sur le reste. Ceci achève la démonstration.

LEMME 1.A.6. *Avec les hypothèses et notations du lemme précédent, le cheminement ci-dessous, extrait du diagramme (1.A.19), est cohérent, au signe près:*

$$\begin{array}{ccc}
 & & \Psi P \xrightarrow{\partial} (R^1\Psi)(\Phi B/\Phi A) \\
 & & \downarrow \\
 & & (R^1\Psi\Phi)A \longrightarrow \Psi(R^1\Phi A) \\
 & & \downarrow \qquad \qquad \qquad \omega \rightarrow \partial\omega \\
 (1.A.29) & & \alpha \rightarrow \alpha' \\
 & & \downarrow \\
 & & \beta \rightarrow \beta' \\
 & & \downarrow \\
 & & \gamma
 \end{array}$$

$$\begin{array}{ccc}
 & & (R^1\Psi)\Phi B \hookrightarrow (R^1\Psi\Phi)B \\
 & & \downarrow \\
 & & (R^1\Psi)(\Phi B/\Phi A),
 \end{array}$$

autrement dit, si α est relié à $\partial\omega$ et γ comme indiqué ci-dessus, alors, au signe près,

$$\gamma = \partial\omega \in (R^1\Psi)(\Phi B/\Phi A).$$

Démonstration. On notera d'abord qu'un élément α de $(R^1\Psi\Phi)A$ est relié à des éléments $\partial\omega$ et γ comme indiqué dans l'énoncé, si et seulement si c'est un élément du noyau de $(R^1\Psi\Phi)A \rightarrow \Psi(R^1\Phi B)$. On part d'un diagramme commutatif

$$\begin{array}{ccccccc} 0 & \rightarrow & A & \rightarrow & B & \rightarrow & C & \rightarrow & 0 \\ & & \downarrow & & \downarrow & & \downarrow & & \\ 0 & \rightarrow & I_A^0 & \rightarrow & I_B^0 & \rightarrow & I_C^0 & \rightarrow & 0, \end{array}$$

dont la ligne du bas est exacte et formée d'injectifs I_A^0, I_B^0, I_C^0 , et on note Z_A^1, Z_B^1 et Z_C^1 les conoyaux respectifs des trois morphismes verticaux.

(i) Montrons d'abord que, pour établir la cohérence du cheminement (1.A.29), il suffit d'établir celle du cheminement défini de façon analogue à partir du diagramme naturel suivant:

$$(1.A.30) \quad \begin{array}{ccc} & & P \xrightarrow{j} Z_{\Phi B/\Phi A}^1 \\ & & \downarrow \\ & & \Phi Z_A^1 \rightarrow R^1\Phi A \\ & & \downarrow \\ Z_{\Phi B}^1 & \hookrightarrow & \Phi Z_B^1 \\ \downarrow & & \\ Z_{\Phi B/\Phi A}^1 & & \end{array}$$

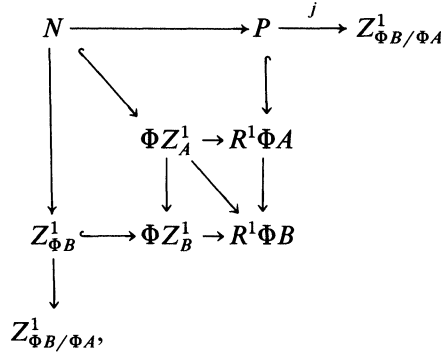
dans lequel, par définition, j rend commutatif le diagramme de suites exactes

$$\begin{array}{ccccccc} 0 & \rightarrow & \Phi B/\Phi A & \rightarrow & \Phi C & \xrightarrow{\partial} & P & \rightarrow & 0 \\ & & \parallel & & \downarrow & & \downarrow j & & \\ 0 & \rightarrow & \Phi B/\Phi A & \rightarrow & \Phi I_C^0 & \rightarrow & Z_{\Phi B/\Phi A}^1 & \rightarrow & 0, \end{array}$$

tandis que les autres flèches sont les flèches naturelles évidentes. Introduisons

$$N := \ker(\Phi Z_A^1 \rightarrow R^1\Phi B).$$

Le diagramme (1.A.30) se complète alors comme suit:



et dire que le cheminement défini par ce diagramme est cohérent, c'est dire que les deux morphismes

$$N \rightarrow Z_{\Phi_B/\Phi_A}^1$$

ainsi définis, l'un via P , l'autre via $Z_{\Phi_B}^1$, coïncident.

La cohérence du cheminement (1.A.29) s'interprète de façon analogue, en introduisant

$$N_\Psi := \ker((R^1 \Psi \Phi)A \rightarrow \Psi(R^1 \Phi B))$$

et en complétant (1.A.29) comme on l'a fait pour (1.A.30). On obtient ainsi sur ce diagramme complété deux applications $N_\Psi \rightarrow (R^1 \Psi)(\Phi B/\Phi A)$ dont on veut voir qu'elles coïncident, au signe près.

Or, on a les identifications canoniques suivantes:

$$(R^1 \Psi \Phi)A = \Psi \Phi Z_A^1 / \Psi \Phi I_A^0, \quad (R^1 \Psi \Phi)B = \Psi \Phi Z_B^1 / \Psi \Phi I_B^0,$$

$$(R^1 \Psi) \Phi B = \Psi Z_{\Phi_B}^1 / \Psi \Phi I_B^0, \quad (R^1 \Psi)(\Phi B/\Phi A) = \Psi Z_{\Phi_B/\Phi_A}^1 / \Psi \Phi I_C^0,$$

$$\text{et enfin } N_\Psi = \Psi N / \Psi \Phi I_A^0.$$

Ces identifications montrent que le complété du diagramme (1.A.29) est défini par passage au quotient de l'image par Ψ du complété du diagramme (1.A.30). Pour obtenir le lemme, il suffit donc d'établir la cohérence du cheminement défini par (1.A.30).

(ii) Comme on le voit sur (1.A.27), on a une surjection naturelle $Z_{\Phi_B/\Phi_A}^1 \xrightarrow{\eta} Z_{\Phi_C}^1$, et on montre aisément qu'on a le diagramme commutatif suivant, à lignes et

colonnes exactes:

$$(1.A.31) \quad \begin{array}{ccccccc} & & & & P & & \\ & & & & \downarrow & & \\ 0 & \longrightarrow & Z_{\Phi_A}^1 & \longrightarrow & \Phi Z_A^1 & \longrightarrow & R^1 \Phi A \longrightarrow 0 \\ & & \downarrow & & \downarrow & & \downarrow \varepsilon \\ 0 & \longrightarrow & Z_{\Phi_B}^1 & \longrightarrow & \Phi Z_B^1 & \longrightarrow & R^1 \Phi B \longrightarrow 0 \\ & & \downarrow & & \downarrow & & \\ & & & & \Phi Z_C^1 & & \\ & & & & \uparrow \cong & & \\ & & & & Z_{\Phi_C}^1 & & \\ & & & & \uparrow \eta & & \\ & & & & Z_{\Phi_B/\Phi_A}^1 & & \end{array}$$

Ce diagramme définit un morphisme de liaison $j': P \rightarrow Z_{\Phi_B/\Phi_A}^1$ qui, mis à la place de j dans le cheminement (1.A.30), le rend évidemment cohérent.

Considérons alors le diagramme commutatif suivant:

$$(1.A.32) \quad \begin{array}{ccccccc} 0 & \rightarrow & \Phi I_A^0 & \rightarrow & \Phi I_B^0 & \rightarrow & \Phi I_C^0 \longrightarrow 0 \\ & & \downarrow & \searrow & \downarrow & \searrow \zeta & \downarrow \pi \\ 0 & \rightarrow & Z_{\Phi_A}^1 & \rightarrow & Z_{\Phi_B}^1 & \rightarrow & Z_{\Phi_B/\Phi_A}^1 \rightarrow 0 \\ & & \downarrow \iota & \swarrow & \downarrow & \swarrow \eta & \downarrow \\ 0 & \rightarrow & \Phi Z_A^1 & \rightarrow & \Phi Z_B^1 & \rightarrow & \Phi Z_C^1 \longrightarrow 0. \end{array}$$

Le diagramme formé des deux dernières lignes définit un morphisme de liaison induisant un isomorphisme

$$j'': \ker \eta \xrightarrow{\cong} P = \ker \left(R^1 \Phi A \xrightarrow{\varepsilon} R^1 \Phi B \right).$$

Il est immédiat que j'' est l'inverse de l'isomorphisme $j': P = \ker \varepsilon \xrightarrow{\cong} \ker \gamma$, défini par (1.A.31). Le diagramme formé par les lignes extrêmes définit un morphisme de liaison

$$\ker \zeta = \Phi C \rightarrow R^1 \Phi A = \text{coker } \iota,$$

qui n'est autre que le bord ∂ déduit de la suite (1.A.17) par application de Φ . Il résulte ainsi de (1.A.32) que

$$\partial = j'' \circ (\pi|_{\Phi C}).$$

Ainsi, j coïncide avec $j''^{-1}: P \rightarrow Z_{\Phi_B/\Phi_A}^1$, et finalement $j = j'$, ce qui achève la démonstration.

§2. Géométrie des toiseurs.

2.0. On considère la situation suivante:

(2.0.1) k est un corps et X une k -variété algébrique lisse géométriquement intègre telle que

$$\bar{k}^* = \bar{k}[X]^*,$$

ce qui est le cas si X est propre sur k .

Sous ces hypothèses, la suite exacte (1.5.1) se réécrit

(2.0.2)

$$0 \rightarrow H^1(k, S) \xrightarrow{i_1} H^1(X, S) \xrightarrow{x} \mathrm{Hom}_{\mathfrak{g}}(\hat{S}, \mathrm{Pic} \bar{X}) \xrightarrow{\delta} H^2(k, S) \xrightarrow{i_2} H^2(X, S).$$

On dit qu'un toiseur \mathcal{T} sur X sous S est de type

$$\lambda \in \mathrm{Hom}_{\mathfrak{g}}(\hat{S}, \mathrm{Pic} \bar{X})$$

si l'on a $\chi([\mathcal{T}]) = \lambda$. On note $\mathrm{Tors}(X, S, \lambda)$ l'ensemble des classes d'isomorphisme de toiseurs de type λ . S'il est non vide, c'est un espace principal homogène sous le groupe $H^1(k, S)$.

Supposons de plus que X satisfasse la condition

(2.0.3) le \mathfrak{g} -module $\mathrm{Pic} \bar{X}$ est de type fini.

On note alors

$$S_0 := D(\mathrm{Pic} \bar{X})$$

le k -groupe de type multiplicatif dual. Vu l'appendice 2.A, la condition (2.0.3) est vérifiée pour les variétés rationnelles projectives et lisses, et S_0 est alors un tore, appelé tore de Néron-Severi de X . On dit qu'un toiseur \mathcal{T} sur X sous S est *universel* si l'on a

(2.0.4) $S = S_0$ et le type de \mathcal{T} est l'identité de $\mathrm{Hom}_{\mathfrak{g}}(\mathrm{Pic} \bar{X}, \mathrm{Pic} \bar{X})$.

En pratique, on considère aussi des toiseurs qui, sans être universels, en sont suffisamment proches pour en avoir certaines des propriétés. On dit qu'un toiseur

\mathcal{T} sur X sous un k -groupe de type multiplicatif S est *admissible* si son type

$$\lambda: \hat{S} \rightarrow \text{Pic } \bar{X}$$

est une injection dont le conoyau est un \mathfrak{g} -module de permutation.

De façon plus générale, on peut aussi considérer une sous-extension galoisienne K/k de \bar{k}/k telle que, si l'on note $\mathfrak{h} = \text{Gal}(\bar{k}/K)$ et $G = \text{Gal}(K/k) = \mathfrak{g}/\mathfrak{h}$, on ait

(2.0.5) le \mathfrak{h} -module $\text{Pic } \bar{X}$ stablement de permutation;

cette condition est en particulier vérifiée si X est K -rationnelle (appendice 2.A). Un torseur \mathcal{T} sur X est dit *quasi-universel* s'il a pour type l'injection naturelle

$$i: \text{Pic } X_K \rightarrow \text{Pic } \bar{X}$$

pour K/k vérifiant (2.0.5); plus généralement, un torseur \mathcal{T} sur X sous le k -groupe de type multiplicatif S , trivialisé par K , est dit *quasi-admissible* s'il a pour type l'application composée

$$\hat{S} \xrightarrow{j} \text{Pic } X_K \xrightarrow{i} \text{Pic } \bar{X}$$

d'une injection j à conoyau G -inversible (= facteur direct d'un G -module de permutation) et de l'injection naturelle i , où K/k vérifie (2.0.5).

2.1. Propriétés globales des toiseurs sous des tores.

PROPOSITION 2.1.1. *Soient X une k -variété algébrique lisse et géométriquement intègre, S un k -tore et \mathcal{T} un torseur sur X sous S de type λ . Soient K/k une sous-extension de \bar{k}/k et $\mathfrak{h} = \text{Gal}(\bar{k}/K)$. On a alors la suite exacte de groupes abéliens:*

$$(2.1.1) \quad 1 \rightarrow K[X]^* \rightarrow K[\mathcal{T}]^* \rightarrow \hat{S}^{\mathfrak{h}} \rightarrow \text{Pic } X_K \rightarrow \text{Pic } \mathcal{T}_K \rightarrow H^1(K, \hat{S}),$$

fonctorielle en K . Lorsque $K = \bar{k}$, le morphisme

$$\hat{S} \rightarrow \text{Pic } \bar{X}$$

ainsi obtenu est, au signe près, le type de \mathcal{T} .

Démonstration. Soit $q: \mathcal{T} \rightarrow X$ le morphisme structural. D'après la proposition 1.4.2, on a l'extension de faisceaux étales sur X :

$$(E_{\mathcal{T}}) \quad 1 \rightarrow \mathbf{G}_{m, X} \rightarrow q_* \mathbf{G}_{m, \mathcal{T}} \rightarrow \hat{S} \rightarrow 0.$$

Il est clair que la longue suite exacte de cohomologie obtenue à partir de $(E_{\mathcal{T}})$

par application de $H^0(X_K, \cdot)$ est fonctorielle en K . Il suffit donc de traiter le cas $K = k$. La longue suite de cohomologie commence alors par

$$1 \rightarrow k[X]^* \rightarrow k[\mathcal{S}]^* \rightarrow H^0(X, \hat{S}_X) \rightarrow \text{Pic } X \rightarrow H^1(X, q_*\mathbf{G}_{m, \mathcal{S}}) \rightarrow H^1(X, \hat{S}_X)$$

Comme X est géométriquement connexe, on a l'isomorphisme de faisceaux étales sur $\text{Spec } k$:

$$\hat{S} \xrightarrow{\cong} p_*\hat{S}_X$$

comme on le voit en passant à \bar{k} , par réduction au cas $\hat{S} = \mathbf{Z}$. On en déduit l'isomorphisme

$$\hat{S}^a = H^0(k, \hat{S}) \cong H^0(k, p_*\hat{S}_X) = H^0(X, \hat{S}_X).$$

Par ailleurs,

$$R^1p_*\hat{S}_X = 0,$$

comme on le voit en calculant la fibre géométrique de ce faisceau:

$$H^1(\bar{X}, \hat{S}_{\bar{X}}) = 0$$

car $H^1(Y, \mathbf{Z}) = 0$ pour tout schéma normal intègre Y ([1] IX 3.6(ii)). Compte tenu de l'isomorphisme $\hat{S} \cong p_*\hat{S}_X$, la suite spectrale

$$H^p(k, R^q p_*\hat{S}_X) \Rightarrow H^{p+q}(X, \hat{S}_X)$$

donne alors les isomorphismes

$$H^1(k, \hat{S}) \cong H^1(k, p_*\hat{S}_X) \cong H^1(X, \hat{S}_X).$$

Il reste à calculer le terme $H^1(X, q_*\mathbf{G}_{m, \mathcal{S}})$. La suite spectrale

$$H^p(X, R^q q_*\mathbf{G}_{m, \mathcal{S}}) \Rightarrow H^{p+q}(\mathcal{S}, \mathbf{G}_{m, \mathcal{S}})$$

donne la suite exacte

$$1 \rightarrow H^1(X, q_*\mathbf{G}_{m, \mathcal{S}}) \rightarrow H^1(\mathcal{S}, \mathbf{G}_{m, \mathcal{S}}) \rightarrow H^0(X, R^1 q_*\mathbf{G}_{m, \mathcal{S}}).$$

Montrons que le faisceau $R^1 q_*\mathbf{G}_{m, \mathcal{S}}$ est nul. Il suffit (cf. [1] VIII 5.2) de montrer que sa fibre en un localisé strict $Y = \text{Spec } \mathcal{O}_{X, \xi}$ en un point géométrique ξ de X est nulle. Compte tenu de [1], VII 5.9 et 5.7, cette fibre est égale à $H^1(\mathcal{S} \times_X Y, \mathbf{G}_m)$. Au-dessus de Y , le tore $S_X \times_X Y$ est isomorphe à un $\mathbf{G}_{m, Y}^n$ et, comme Y est le spectre d'un anneau local, $\text{Pic } Y = 0$, le torseur $\mathcal{S} \times_X Y$ est donc trivial, et ainsi isomorphe à $\mathbf{G}_{m, Y}^n$. Comme X est normal, Y l'est aussi et la flèche naturelle

$$\text{Pic } Y \rightarrow \text{Pic}(\mathbf{G}_{m, Y}^n)$$

est un isomorphisme ([33] Errata 4ème partie, 21.4.13), d'où finalement $\text{Pic}(\mathcal{T} \times_X Y) = 0$, ce qui établit la nullité de $R^1 q_* \mathbf{G}_{m, \mathcal{T}}$. En résumé:

$$H^1(X, q_* \mathbf{G}_{m, \mathcal{T}}) \xrightarrow{\cong} H^1(\mathcal{T}, \mathbf{G}_{m, \mathcal{T}}).$$

On a ainsi obtenu la suite exacte (2.1.1) pour $K = k$. On vérifie aisément que la flèche $\text{Pic } X \rightarrow \text{Pic } \mathcal{T}$ est la flèche naturelle. Lorsque $K = \bar{k}$, il reste à identifier la flèche

$$\hat{S} \rightarrow \text{Pic } \bar{X}.$$

Or on a vu (proposition 1.5.2(iii)) que la flèche composée

$$\hat{S} \rightarrow p_* \hat{S}_X \rightarrow R^1 p_* \mathbf{G}_{m, X},$$

une fois identifiée au morphisme de \mathfrak{g} -modules

$$\hat{S} \rightarrow \text{Pic } \bar{X},$$

coïncide, au signe près, avec le type du torseur \mathcal{T} . Or, la flèche bord

$$\partial: p_* \hat{S}_X \rightarrow R^1 p_* \mathbf{G}_{m, X},$$

traduite en termes de \mathfrak{g} -modules, n'est autre que la flèche bord

$$\partial: H^0(\bar{X}, \hat{S}_{\bar{X}}) \rightarrow H^1(\bar{X}, \mathbf{G}_{m, \bar{X}})$$

déduite de la suite exacte initiale.

THÉORÈME 2.1.2. *Soit X une k -variété algébrique vérifiant les conditions (2.0.1) et (2.0.3). Soient \mathcal{T} un torseur sur X sous un k -tore S et \mathcal{T}^c une k -compactification lisse de \mathcal{T} .*

(a) *Si \mathcal{T} est un torseur universel, ou même un torseur admissible, le \mathfrak{g} -module $\text{Pic } \bar{\mathcal{T}}^c$ est de permutation.*

(b) *Si \mathcal{T} est un torseur quasi-admissible, relativement à une extension algébrique K/k telle qu'on ait (2.0.5) et $X(K) \neq \emptyset$, le G -module $\text{Pic } \mathcal{T}_K^c$ est inversible, et*

$$H^1(\mathfrak{g}, \text{Pic } \bar{\mathcal{T}}^c) = 0.$$

Démonstration. On démontre (a) et (b) en parallèle, le cas (a) correspondant aux hypothèses particulières: $K = \bar{k}$, $G = \mathfrak{g}$ et le conoyau de λ est de permutation. On commence par montrer les deux résultats suivants:

- (i) $K^* = K[\mathcal{T}]^*$
- (ii) le G -module $\text{Pic } \mathcal{T}_K$ est inversible.

Comme S_K est un K -tore trivial, on a

$$\hat{S}^{\flat} = \hat{S} \quad \text{et} \quad H^1(K, \hat{S}) = 0,$$

et la suite exacte (2.1.1) donne donc l'égalité (i) et la suite exacte

$$0 \rightarrow \hat{S} \rightarrow \text{Pic } X_K \rightarrow \text{Pic } \mathcal{T}_K \rightarrow 0,$$

ce qui établit (ii) puisque \mathcal{T} est supposé quasi-admissible relativement à K/k ; de plus, ceci donne que, dans le cas (a), le G -module $\text{Pic } \bar{\mathcal{T}}$ est de permutation. Soit alors Y le fermé complémentaire de \mathcal{T} dans \mathcal{T}^c . La suite exacte de G -modules

$$0 \rightarrow K[\mathcal{T}]^*/K[\mathcal{T}^c]^* \rightarrow \text{Div}_{Y_K} \mathcal{T}_K^c \rightarrow \text{Pic } \mathcal{T}_K^c \rightarrow \text{Pic } \mathcal{T}_K \rightarrow 0$$

se réduit d'après (i) et (ii) à l'extension suivante de G -modules

$$0 \rightarrow \text{Div}_{Y_K} \mathcal{T}_K^c \rightarrow \text{Pic } \mathcal{T}_K^c \rightarrow \text{Pic } \mathcal{T}_K \rightarrow 0$$

qui est scindée, car c'est l'extension d'un module inversible par un module de permutation. Ceci prouve que le G -module $\text{Pic } \mathcal{T}_K^c$ est inversible, et achève la preuve de (a). On va ensuite établir

$$(iii) \quad \text{Pic } \mathcal{T}_K^c = (\text{Pic } \bar{\mathcal{T}}^c)^{\flat}.$$

Ceci vaut plus généralement pour une K -variété Z telle que $Z(K) \neq \emptyset$ et que $K[Z]^* = K^*$. En effet la suite exacte des termes de bas degré de la suite spectrale de Leray pour $p: Z \rightarrow \text{Spec } K$

$$H^p(K, R^q p_* \mathbf{G}_{m,Z}) \Rightarrow H^{p+q}(Z, \mathbf{G}_m)$$

s'écrit

$$0 \rightarrow H^1(\mathfrak{h}, \bar{k}[Z]^*) \rightarrow \text{Pic } Z \rightarrow (\text{Pic } \bar{Z})^{\flat} \rightarrow H^2(\mathfrak{h}, \bar{k}[Z]^*) \rightarrow H^2(Z, \mathbf{G}_m).$$

Or l'hypothèse et le théorème 90 de Hilbert impliquent

$$H^1(\mathfrak{h}, \bar{k}[Z]^*) = H^1(\mathfrak{h}, \bar{k}^*) = 0$$

et l'injectivité de l'application

$$H^2(K, \mathbf{G}_m) = H^2(\mathfrak{h}, \bar{k}^*) = H^2(\mathfrak{h}, \bar{k}[Z]^*) \rightarrow H^2(Z, \mathbf{G}_m)$$

puisque tout point rationnel de Z en définit une rétraction. Il reste à voir que \mathcal{T}_K^c vérifie les hypothèses indiquées pour Z : comme S_K est un K -tore trivial, la fibre du torseur \mathcal{T}_K en un point de $X(K) \neq \emptyset$ est triviale (théorème 90 de Hilbert), et

donc $\mathcal{T}_K(K)$ est non vide. A fortiori $\mathcal{T}_K^{\ell}(K) \neq \emptyset$, et évidemment $K[\mathcal{T}_K^{\ell}]^* = K^*$, ce qui achève de prouver (iii).

On établit enfin

(iv) le \mathfrak{h} -module $\text{Pic } \bar{\mathcal{T}}^c$ est stablement de permutation.

Comme le torseur \mathcal{T}_K est localement trivial sur X_K pour la topologie de Zariski, puisque S_K est un K -tore trivial (théorème 90 de Hilbert), la K -variété \mathcal{T}_K est K -birationnelle à $X_K \times_K \mathbf{P}_K^n$ pour un certain entier n : on en déduit (cf. appendice 2.A et [20] lemme 11) l'existence d'un isomorphisme de \mathfrak{h} -modules

$$P_1 \oplus \text{Pic } \bar{\mathcal{T}}^c \cong P_2 \oplus \text{Pic}(\bar{X} \times_{\bar{k}} \mathbf{P}_{\bar{k}}^n) \cong P_2 \oplus \mathbf{Z} \oplus \text{Pic } \bar{X}$$

où P_1 et P_2 sont des modules de permutation, ce qui d'après l'hypothèse (2.0.5) prouve (iv). La suite exacte de restriction-inflation

$$0 \rightarrow H^1(G, (\text{Pic } \bar{\mathcal{T}}^c)^{\mathfrak{h}}) \rightarrow H^1(\mathfrak{g}, \text{Pic } \bar{\mathcal{T}}^c) \rightarrow H^1(\mathfrak{h}, \text{Pic } \bar{\mathcal{T}}^c) = 0$$

donne alors la conclusion

$$H^1(\mathfrak{g}, \text{Pic } \bar{\mathcal{T}}^c) = 0.$$

Remarque 2.1.3. Le résultat (b) s'applique aux k -variétés X , propres, lisses et géométriquement intègres telles que X_K soit K -rationnelle. Il est intéressant de noter que, même dans ce cas, le \mathfrak{g} -module $\text{Pic } \bar{\mathcal{T}}^c$ n'est pas forcément de permutation, ni même inversible, contrairement à la situation décrite en (a). De fait, il peut se produire qu'on ait $H^1(L, \text{Pic } \bar{\mathcal{T}}^c) \neq 0$ pour une extension convenable L/k , comme on le voit en utilisant la proposition 6.1 de [13] et la description locale des toseurs donnée ci-après, alors que néanmoins $H^1(k, \text{Pic } \bar{\mathcal{T}}^c) = 0!$

Remarque 2.1.4. Pour X propre sur k , tout torseur \mathcal{T} sur X sous un k -tore S admet une k -compactification lisse, même en caractéristique > 0 : J.-L. Brylinski [5] a en effet établi l'existence d'une k -compactification lisse équivariante $S \rightarrow S^c$ pour tout k -tore S , et il suffit de prendre le produit contracté

$$\mathcal{T}^c = \mathcal{T} \times^S S^c,$$

ce qui compactifie dans les fibres de $\mathcal{T} \rightarrow X$.

2.2. *L'obstruction élémentaire: condition nécessaire d'existence de toseurs d'un type donné.*

Définition 2.2.1. Soit X une k -variété algébrique lisse et géométriquement intègre. On appelle *obstruction élémentaire* la classe dans $\text{Ext}_{\mathfrak{g}}^1(\bar{k}(X)^*/\bar{k}^*, \bar{k}^*)$ de l'extension définie par la suite exacte naturelle

$$(2.2.1) \quad 1 \rightarrow \bar{k}^* \rightarrow \bar{k}(X)^* \rightarrow \bar{k}(X)^*/\bar{k}^* \rightarrow 1.$$

La proposition qui suit montre que la non-nullité de cette classe est une obstruction à l'existence d'un point rationnel pour X . Si l'obstruction élémentaire est nulle, on dira aussi qu'elle est "vide".

PROPOSITION 2.2.2. *Soit X une k -variété algébrique lisse et géométriquement intègre.*

(a) *Si X possède un point k -rationnel, la suite exacte de \mathfrak{g} -modules (2.2.1) est scindée; il en est de même, si U est un ouvert de Zariski non vide de X , de la suite exacte de \mathfrak{g} -modules*

$$(2.2.2) \quad 1 \rightarrow \bar{k}^* \rightarrow \bar{k}[U]^* \rightarrow \bar{k}[U]^*/\bar{k}^* \rightarrow 1.$$

(b) *Si k est parfait et si X est quasi-projective, les extensions (2.2.1) et (2.2.2) sont triviales dès que X possède un 0-cycle de degré 1.*

Démonstration. Soit $P \in X(k)$. Soit $\mathcal{O}_{\bar{X}, P}$ l'anneau local de \bar{X} en P . Soit $\text{Div}_P \bar{X}$ le groupe abélien libre sur les points de codimension 1 de \bar{X} dont l'adhérence contient P : c'est un \mathfrak{g} -module somme directe de \mathfrak{g} -modules du type $\mathbb{Z}[\mathfrak{g}/\mathfrak{h}]$, pour \mathfrak{h} sous-groupe ouvert de \mathfrak{g} , i.e. c'est un \mathfrak{g} -module de permutation, mais non de type fini sur \mathbb{Z} . Comme X est lisse en P , on a la suite exacte de \mathfrak{g} -modules

$$1 \rightarrow \mathcal{O}_{\bar{X}, P}^* \rightarrow \bar{k}(X)^* \rightarrow \text{Div}_P \bar{X} \rightarrow 0.$$

Pour tout sous-groupe ouvert \mathfrak{h} de \mathfrak{g} , une variante du théorème 90 de Hilbert donne

$$H^1(\mathfrak{h}, \mathcal{O}_{\bar{X}, P}^*) = 0,$$

d'où par le lemme de Shapiro

$$\text{Ext}_{\mathfrak{g}}^1(\mathbb{Z}[\mathfrak{g}/\mathfrak{h}], \mathcal{O}_{\bar{X}, P}^*) = 0,$$

ce qui prouve que la suite exacte de \mathfrak{g} -modules ci-dessus est scindée (pour une variante de cet argument, voir [21]). Autrement dit, le \mathfrak{g} -morphisme naturel

$$\mathcal{O}_{\bar{X}, P}^* \rightarrow \bar{k}(X)^*$$

admet une \mathfrak{g} -rétraction. Comme le point P définit évidemment une \mathfrak{g} -rétraction de la flèche naturelle

$$\bar{k}^* \rightarrow \mathcal{O}_{\bar{X}, P}^*,$$

on en conclut que le morphisme naturel

$$\bar{k}^* \rightarrow \bar{k}(X)^*$$

admet une \mathfrak{g} -rétraction; il en est a fortiori de même des morphismes

$$\bar{k}^* \rightarrow \bar{k}[U]^*$$

pour tout ouvert non vide U de X , ce qui achève la preuve de (a). Le point (b) s'établit de façon analogue en considérant l'anneau semi-local de \bar{X} aux points du support d'un 0-cycle de degré 1.

Remarque 2.2.3. L'assertion (a) reste vraie pourvu que $X_{\text{lisse}}(k) \neq \emptyset$. L'obstruction élémentaire est donc une obstruction à l'existence d'un point rationnel lisse, qui, par sa définition même, présente un caractère k -birationnel, et qui, d'après (b), ne peut faire la différence entre les k -variétés qui possèdent un 0-cycle de degré 1 et celles qui possèdent un point rationnel.

PROPOSITION 2.2.4. *Soit X une k -variété algébrique vérifiant (2.0.1). L'obstruction élémentaire est nulle si et seulement si la classe de la 2-extension naturelle*

$$(2.2.4) \quad 1 \rightarrow \bar{k}^* \rightarrow \bar{k}(X)^* \rightarrow \text{Div } \bar{X} \rightarrow \text{Pic } \bar{X} \rightarrow 0$$

est nulle dans $\text{Ext}_{\mathfrak{g}}^2(\text{Pic } \bar{X}, \bar{k}^)$.*

Démonstration. La suite exacte (2.2.4) donne aussitôt la suite exacte d'Ext

$$\text{Ext}_{\mathfrak{g}}^1(\text{Div } \bar{X}, \bar{k}^*) \rightarrow \text{Ext}_{\mathfrak{g}}^1(\bar{k}(X)^*/\bar{k}^*, \bar{k}^*) \xrightarrow{\partial} \text{Ext}_{\mathfrak{g}}^2(\text{Pic } \bar{X}, \bar{k}^*).$$

Comme ∂ est le cup-produit par la classe de l'extension

$$1 \rightarrow \bar{k}(X)^*/\bar{k}^* \rightarrow \text{Div } \bar{X} \rightarrow \text{Pic } \bar{X} \rightarrow 0,$$

l'obstruction élémentaire a pour image par ∂ la classe de l'extension (2.2.4). Comme X est lisse, $\text{Div } \bar{X}$ est un \mathfrak{g} -module de permutation, d'où par application du lemme de Shapiro et du théorème 90 de Hilbert:

$$\text{Ext}_{\mathfrak{g}}^1(\text{Div } \bar{X}, \bar{k}^*) = 0,$$

ce qui permet de conclure.

PROPOSITION 2.2.5. *Soit X une k -variété algébrique lisse et géométriquement intègre telle que l'obstruction élémentaire soit nulle. Si S est un k -groupe de type multiplicatif, les applications naturelles*

$$H^i(k, S) \rightarrow H^i(X, S) \quad \text{et} \quad H^i(k, S) \rightarrow H^i(k(X), S)$$

sont injectives pour $i = 0, 1$ et 2 . En particulier, on a des injections naturelles

$$\text{Br } k \rightarrow \text{Br } X \quad \text{et} \quad \text{Br } k \rightarrow \text{Br } k(X).$$

Démonstration. Noter que, si $X(k) \neq \emptyset$, les résultats relatifs à X sont immédiats. En général, il suffit d'établir les résultats relatifs à $k(X)$. Le cas $i = 0$ est trivial. Pour tout ouvert non vide U de X , on a la suite exacte (1.5.1):

$$\begin{aligned} 0 \rightarrow \text{Ext}_{\mathfrak{g}}^1(\hat{S}, \bar{k}[U]^*) &\rightarrow H^1(U, S) \rightarrow \text{Hom}_{\mathfrak{g}}(\hat{S}, \text{Pic } \bar{U}) \\ &\rightarrow \text{Ext}_{\mathfrak{g}}^2(\hat{S}, \bar{k}[U]^*) \rightarrow H^2(U, S), \end{aligned}$$

qui, par passage à la limite inductive sur U , donne la suite exacte

$$0 \rightarrow \text{Ext}_{\mathfrak{g}}^1(\hat{S}, \bar{k}(X)^*) \rightarrow H^1(k(X), S) \rightarrow 0 \rightarrow \text{Ext}_{\mathfrak{g}}^2(\hat{S}, \bar{k}(X)^*) \rightarrow H^2(k(X), S).$$

On en déduit le résultat par functorialité (proposition 1.5.2(i)) de (1.5.1) appliquée à $X \rightarrow \text{Spec } k$. L'hypothèse de nullité de l'obstruction élémentaire assure que toute \mathfrak{g} -rétraction σ de $\bar{k}^* \rightarrow \bar{k}(X)^*$ induit une \mathfrak{g} -rétraction de chaque morphisme naturel $\text{Ext}_{\mathfrak{g}}^i(\hat{S}, \bar{k}(X)^*) \rightarrow H^i(k(X), S)$. On a donc pour $i = 1$ le résultat supplémentaire suivant: toute \mathfrak{g} -rétraction σ définit une \mathfrak{g} -rétraction du morphisme naturel

$$H^1(k, S) \rightarrow H^1(k(X), S), \quad \text{donc aussi de } H^1(k, S) \rightarrow H^1(X, S).$$

L'énoncé pour le groupe de Brauer correspond au cas $S = \mathbf{G}_{m, k}$.

Exemple 2.2.6. Soit X une k -variété lisse et géométriquement intègre et soit K/k une extension finie séparable. S'il existe $\alpha \in k^*$ tel que

$$\alpha \notin N_{K/k} K^*, \quad \text{mais } \alpha \in N_{K(X)/k(X)} K(X)^*,$$

alors $X(k) = \emptyset$. Il suffit d'appliquer la proposition précédente en considérant le tore $S = R_{K/k}^1 \mathbf{G}_m$. On notera que si $\alpha = N_{K(X)/k(X)}(g)$ avec $g \in K(X)^*$, il est immédiat que X ne possède pas de point rationnel en dehors du diviseur de g , mais la proposition assure qu'elle n'en possède pas non plus sur le support de $\text{div}(g)$.

Remarque 2.2.7. L'obstruction élémentaire est nulle pour une k -variété vérifiant (2.0.1) et contenant un ouvert de Zariski U non vide tel que

$$\bar{k}^* = \bar{k}[U]^* \quad \text{et} \quad \text{Pic } \bar{U} = 0.$$

En effet, on dispose alors de la suite exacte de \mathfrak{g} -modules

$$1 \rightarrow \bar{k}^* \rightarrow \bar{k}(U)^* \rightarrow \text{Div } \bar{U} \rightarrow 0,$$

qui est \mathfrak{g} -scindée (lemme de Shapiro et théorème 90).

La proposition suivante montre la relation entre l'obstruction élémentaire et l'existence de toiseurs d'un type donné:

PROPOSITION 2.2.8. Soit X une k -variété algébrique vérifiant (2.0.1). Soient S un k -groupe de type multiplicatif,

$$\lambda \in \text{Hom}_{\mathfrak{g}}(\hat{S}, \text{Pic } \bar{X}) \quad \text{et} \quad \partial: \text{Hom}_{\mathfrak{g}}(\hat{S}, \text{Pic } \bar{X}) \rightarrow H^2(k, S)$$

le bord dans la suite exacte (1.5.1).

(i) La non-nullité de $\partial(\lambda) \in H^2(k, S)$ est une obstruction (\mathcal{O}'_{λ}) à l'existence d'un point k -rationnel sur X , et même, si k est parfait, à l'existence d'un 0-cycle de degré 1.

(ii) Cette obstruction est nulle si, et seulement si, X possède un toiseur de type λ . C'est le cas si l'obstruction élémentaire est nulle.

(iii) Si $\text{Pic } \bar{X}$ est de type fini sur Z et si

$$\lambda_0 = \text{id}_{\text{Pic } \bar{X}},$$

l'obstruction $(\mathcal{O}'_{\lambda_0})$ est la plus fine de ces obstructions (\mathcal{O}'_{λ}) , et elle coïncide avec l'obstruction élémentaire.

(iv) Si l'obstruction élémentaire est nulle, toute \mathfrak{g} -rétraction σ du morphisme évident

$$\bar{k}^* \rightarrow \bar{k}(X)^*$$

définit un scindage de la suite exacte

$$(2.2.5) \quad 0 \rightarrow H^1(k, S) \rightarrow H^1(X, S) \rightarrow \text{Hom}_{\mathfrak{g}}(\hat{S}, \text{Pic } \bar{X}) \rightarrow 0.$$

(v) Soit U un ouvert de Zariski non vide de X . Soient

$$P_{\bar{X}, \bar{U}} := \ker(\text{Pic } \bar{X} \rightarrow \text{Pic } \bar{U})$$

et

$$\lambda: P_{\bar{X}, \bar{U}} \rightarrow \text{Pic } \bar{X}$$

l'injection naturelle. L'obstruction (\mathcal{O}'_{λ}) est nulle si et seulement si la suite évidente de \mathfrak{g} -modules

$$1 \rightarrow \bar{k}^* \rightarrow \bar{k}[U]^* \rightarrow \bar{k}[U]^*/\bar{k}^* \rightarrow 1$$

est scindée.

Démonstration.

(i) D'après 1.5.2(iv), $\partial(\lambda)$ est la classe dans $H^2(k, S) = \text{Ext}_g^2(\hat{S}, \bar{k}^*)$ de la 2-extension déduite de

$$(2.2.4) \quad 1 \rightarrow \bar{k}^* \rightarrow \bar{k}(X)^* \rightarrow \text{Div } \bar{X} \rightarrow \text{Pic } \bar{X} \rightarrow 0$$

via λ . Si $\partial(\lambda) \neq 0$, la 2-extension ci-dessus est a fortiori non triviale, d'où la conclusion d'après 2.2.4.

(ii) Compte tenu de la suite exacte (2.0.2), c'est une conséquence immédiate des définitions et de (i).

(iii) L'hypothèse permet de considérer le k -groupe de type multiplicatif

$$S_0 := D(\text{Pic } \bar{X}).$$

Par functorialité de la suite exacte (2.0.2), $\partial(\lambda)$ est l'image de $\partial(\lambda_0)$ par le morphisme $D(\lambda): S_0 \rightarrow S$. La nullité de $\partial(\lambda_0)$ implique donc celle de tous les $\partial(\lambda)$. D'autre part (cf. (i)), d'après 1.5.2(iv), $\partial(\lambda_0)$ n'est autre que la classe de la 2-extension (2.2.4). La conclusion suit alors de la proposition 2.2.4.

(iv) Par définition même, la nullité de l'obstruction élémentaire équivaut à l'existence d'une g -rétraction

$$\sigma: \bar{k}(X)^* \rightarrow \bar{k}^*,$$

qui induit donc (cf. 2.2.5) des rétractions de i_1 et i_2 dans la suite exacte (2.0.2); celle-ci donne alors la suite exacte scindée

$$0 \rightarrow H^1(k, S) \rightarrow H^1(X, S) \rightarrow \text{Hom}_g(\hat{S}, \text{Pic } \bar{X}) \rightarrow 0.$$

(v) Considérons le k -groupe de type multiplicatif

$$S := D(P_{\bar{X}, \bar{U}})$$

et l'injection naturelle $\lambda: P_{\bar{X}, \bar{U}} \rightarrow \text{Pic } \bar{X}$. On a donc $\lambda \in \text{Hom}_g(\hat{S}, \text{Pic } \bar{X})$. La description de $\partial(\lambda)$ montre alors que c'est la classe dans $H^2(k, S) = \text{Ext}_g^2(P_{\bar{X}, \bar{U}}, \bar{k}^*)$ de la 2-extension

$$1 \rightarrow \bar{k}^* \rightarrow \bar{k}[U]^* \rightarrow \text{Div}_{\bar{Y}} \bar{X} \rightarrow P_{\bar{X}, \bar{U}} \rightarrow 0,$$

où Y désigne le fermé complémentaire de U dans X (c'est le pull-back de (2.2.4) par λ). L'extension

$$1 \rightarrow \bar{k}[U]^* / \bar{k}^* \rightarrow \text{Div}_{\bar{Y}} \bar{X} \rightarrow P_{\bar{X}, \bar{U}} \rightarrow 0$$

définit la suite exacte

$$0 = \text{Ext}_g^1(\text{Div}_{\bar{Y}} \bar{X}, \bar{k}^*) \rightarrow \text{Ext}_g^1(\bar{k}[U]^* / \bar{k}^*, \bar{k}^*) \xrightarrow{\delta} \text{Ext}_g^2(P_{\bar{X}, \bar{U}}, \bar{k}^*)$$

dont le premier termes est nul par lissité de X (lemme de Shapiro et théorème 90 de Hilbert). D'après ce qui précède, $\partial(\lambda)$ est, au signe près, l'image par δ de la classe de l'extension évidente

$$1 \rightarrow \bar{k}^* \rightarrow \bar{k}[U]^* \rightarrow \bar{k}[U]^*/\bar{k}^* \rightarrow 1,$$

dont la non-nullité équivaut donc à celle de $\partial(\lambda)$, i.e. à celle de (\mathcal{O}_λ') .

Remarque 2.2.9. Si l'obstruction élémentaire est nulle, par exemple si $X(k) \neq \emptyset$, il existe des toseurs de tout type λ . Inversement, si $\text{Pic } \bar{X}$ est de type fini, l'existence de toseurs universels entraîne la nullité de l'obstruction élémentaire.

Si k est un corps \mathfrak{p} -adique, les théorèmes de dualité du corps de classes local entraînent que l'obstruction élémentaire équivaut, dans ce cas, au fait que la flèche naturelle

$$\text{Br } k \rightarrow \text{Br } X$$

est injective.

Exemple 2.2.10. Soient k un corps de caractéristique $\neq 2$ et U la k -variété lisse et géométriquement intègre définie par l'équation

$$0 \neq y^2 - az^2 = P(x)$$

où x, y, z sont les variables, où $a \in k^*$ est donné et où $P \in k[x]$ est un polynôme séparable non constant donné. Soit $X \supset U$ une k -compactification lisse de U . Soient c le coefficient dominant de P et A la k -algèbre finie séparable produit de $k[t]/(t^2 - a)$ et de $k[x]/(P)$. On vérifie, via la proposition 2.2.8(v), que l'obstruction élémentaire pour X est vide si, et seulement si, c est une norme d'un élément de A^* . Elle est en particulier toujours vide si P est de degré impair.

Exemples 2.2.11. Ce sont des exemples où l'obstruction élémentaire est la seule obstruction à l'existence d'un point rationnel pour la k -variété algébrique X (on suppose k parfait):

- (a) les variétés de Severi-Brauer (formes sur k de l'espace projectif);
- (b) les formes sur k d'une surface rationnelle propre et lisse, relativement minimale sur \bar{k} (formes sur k de $\mathbf{P}^2, \mathbf{P}^1 \times \mathbf{P}^1$ ou F_n , pour $n \geq 2$);
- (c) les k -compactifications lisses d'espaces homogènes principaux de tores;
- (d) les surfaces de Del Pezzo de degré 6 (formes sur k de l'éclaté de \mathbf{P}^2 en trois points non alignés).

On a en fait plus, car, dans les cas (a), (b), (d), si $X(k) \neq \emptyset$, alors X est k -rationnelle. Par ailleurs, si E^c est une k -compactification lisse d'un espace principal homogène E sous un k -tore, on peut montrer en utilisant 2.2.8(v) que, si l'obstruction élémentaire est nulle, alors E est trivial. Ainsi, $E^c(k) \neq \emptyset$ implique $E(k) \neq \emptyset$.

Exemples 2.2.12. Voici au contraire des exemples où l'obstruction élémentaire est nulle et où pourtant $X(k) = \emptyset$:

- (a) une quadrique lisse dans $\mathbf{P}_{\mathbb{R}}^n$ sans point réel, pour $n \geq 4$;
- (b) une k -compactification lisse d'un espace homogène principal non trivial sous $SL(D)$ où D est une k -algèbre centrale simple pour laquelle la norme réduite $\text{Nrd}: D^* \rightarrow k^*$ n'est pas surjective;
- (c) la surface cubique X d'équation

$$x^3 + 2y^3 + 4z^3 + 9t^3 = 0$$

considérée sur $k = \mathbf{Q}_3$: tout d'abord $X(k) = \emptyset$ par congruences mod 9; ensuite $\text{Pic } X = (\text{Pic } \bar{X})^{\mathfrak{g}}$ car, X étant k -minimale (cf. [42] III 4.12 (= III 21.10)), $(\text{Pic } \bar{X})^{\mathfrak{g}} = \mathbf{Z}\omega_X = \text{Pic } X$ où ω_X est la classe canonique ([42] IV 6.1 (= IV 23.6)); il résulte alors de (2.0.2) pour $S = \mathbf{G}_{m,k}$ que $\text{Br } k$ s'injecte dans $\text{Br } X$, ce qui équivaut, pour un corps p -adique, à la nullité de l'obstruction élémentaire (cf. remarque 2.2.9);

(d) certaines surfaces rationnelles sur \mathbf{Q} ou \mathbf{Q}_p [12] possédant un 0-cycle de degré 1 sans posséder de point rationnel.

2.3. Description locale des torseurs. Soit X une k -variété algébrique qui vérifie (2.0.1), c'est-à-dire qui soit lisse, géométriquement intègre et telle que $\bar{k}[X]^* = \bar{k}^*$. Soient S un k -groupe algébrique de type multiplicatif et

$$\lambda: \hat{S} \rightarrow \text{Pic } \bar{X}$$

un \mathfrak{g} -homomorphisme. Soit alors U un ouvert de Zariski non vide de X tel que λ se factorise par

$$P_{\bar{X}, \bar{U}} := \ker(\text{Pic } \bar{X} \rightarrow \text{Pic } \bar{U}).$$

Soit en outre

$$(2.3.1) \quad 1 \rightarrow S \rightarrow M \rightarrow R \rightarrow 1 \tag{8}$$

une suite exacte de k -groupes algébriques de type multiplicatif où M soit un k -tore quasi-trivial et telle qu'il existe un diagramme commutatif de \mathfrak{g} -modules

$$(2.3.2) \quad \begin{array}{ccccccc} 1 & \rightarrow & \bar{k}[U]^*/\bar{k}^* & \rightarrow & \text{Div}_{\bar{Y}} \bar{X} & \rightarrow & P_{\bar{X}, \bar{U}} \rightarrow 0 \\ & & \uparrow \rho & & \uparrow & & \uparrow \lambda \\ 0 & \longrightarrow & \hat{R} & \longrightarrow & \hat{M} & \longrightarrow & \hat{S} \longrightarrow 0 \end{array}$$

où Y désigne le fermé $X - U$. La suite exacte (2.3.1) fait de M un \mathfrak{g} -torseur (8) sur R sous S . Tout k -morphisme $\phi: U \rightarrow R$ définit un \mathfrak{g} -morphisme

$$\hat{\phi}: \hat{R} \rightarrow \bar{k}[U]^*,$$

et inversement, autrement dit:

$$H^0(U, R) = \text{Hom}_{\mathfrak{g}}(\hat{R}, \bar{k}[U]^*).$$

Tout k -morphisme $\phi: U \rightarrow R$ définit par pull-back de l'extension (2.3.1) un toreur $\phi^*(\mathfrak{N})$ sur U sous S modelé sur le toreur-type (\mathfrak{N}) .

Ayant ainsi fixé λ , U , (\mathfrak{N}) et ρ , considérons l'ensemble

$$(2.3.3) \quad \text{Tors}(U, S; \mathfrak{N}, \rho)$$

des classes d'isomorphisme de tels toreurs $\phi^*(\mathfrak{N})$ lorsque le comorphisme

$$\hat{\phi}: \hat{R} \rightarrow \bar{k}[U]^* \text{ est un relèvement de } \rho.$$

On note

$$(2.3.4) \quad \text{Tors}(X, S; \lambda)$$

l'ensemble des classes d'isomorphisme de toreurs sur X sous S de type λ .

THÉORÈME 2.3.1. *On garde les hypothèses et notations ci-dessus. La restriction de X à U définit une surjection*

$$\gamma: \text{Tors}(X, S; \lambda) \rightarrow \text{Tors}(U, S; \mathfrak{N}, \rho).$$

C'est une bijection si, et seulement si, la flèche naturelle

$$\text{Ext}_{\mathfrak{g}}^1(\hat{S}, \bar{k}^*) \rightarrow \text{Ext}_{\mathfrak{g}}^1(\hat{S}, \bar{k}[U]^*)$$

est une injection, ce qui est le cas si le morphisme $\bar{k}^ \rightarrow \bar{k}[U]^*$ admet une \mathfrak{g} -rétraction.*

Cet énoncé a au moins trois aspects:

(a) il décrit localement la restriction à U d'un toreur \mathcal{T} de type λ comme un produit fibré d'un toreur-type (\mathfrak{N}) par un morphisme $\phi: U \rightarrow R$, ce qui fournit, si R est aussi quasi-trivial, une description d'un modèle de \mathcal{T} par des équations explicites;

(b) il assure que certains toreurs définis par produit fibré d'un toreur-type sur certaines k -variétés "ouvertes" U se prolongent, parfois même de façon unique, à toute k -compactification lisse X ;

(c) il caractérise l'existence d'un toreur de type λ par l'existence d'un \mathfrak{g} -relèvement $\hat{R} \rightarrow \bar{k}[U]^*$ de la flèche $\rho: \hat{R} \rightarrow \bar{k}[U]^*/\bar{k}^*$.

Démonstration. Elle s'appuie sur le diagramme du théorème 1.6.1 et sur la propriété de cohérence du lemme 1.6.4.

On va commencer par montrer l'égalité

$$(2.3.5) \quad \text{Tors}(U, S; \mathfrak{S}, \rho) = \pi^{-1}(\partial(\lambda)) \subset H^1(U, S)$$

sur la portion suivante du diagramme du théorème 1.6.1:

$$\begin{array}{ccc} \text{Ext}_g^1(\hat{S}, \bar{k}[U]^*) & \hookrightarrow & H^1(U, S) \\ \downarrow \pi & & \\ \text{Hom}_g(\hat{S}, P_{\bar{X}, \bar{U}}) & \xrightarrow{\partial} & \text{Ext}_g^1(\hat{S}, \bar{k}[U]^*/\bar{k}^*). \end{array}$$

(α) Pour établir l'égalité ci-dessus, on commence par factoriser le diagramme commutatif (2.3.2) en introduisant l'extension intermédiaire E qui est à la fois le pull-back par λ de la suite du haut et le push-out par ρ de celle du bas:

$$\begin{array}{ccccccc} 1 & \rightarrow & \bar{k}[U]^*/\bar{k}^* & \rightarrow & \text{Div}_{\bar{Y}} \bar{X} & \rightarrow & P_{\bar{X}, \bar{U}} \rightarrow 0 \\ & & \parallel & & \uparrow & & \uparrow \lambda \\ 1 & \rightarrow & \bar{k}[U]^*/\bar{k}^* & \rightarrow & E & \rightarrow & \hat{S} \rightarrow 0 \\ & & \uparrow \rho & & \uparrow & & \parallel \\ 0 & \rightarrow & \hat{R} & \rightarrow & \hat{M} & \rightarrow & \hat{S} \rightarrow 0. \end{array}$$

On a donc, au signe près,

$$\partial(\lambda) = [E] = \partial(\rho),$$

où les bords

$$\partial: \text{Hom}_g(\hat{S}, P_{\bar{X}, \bar{U}}) \rightarrow \text{Ext}_g^1(\hat{S}, \bar{k}[U]^*/\bar{k}^*)$$

et

$$\partial: \text{Hom}_g(\hat{R}, \bar{k}[U]^*/\bar{k}^*) \rightarrow \text{Ext}_g^1(\hat{S}, \bar{k}[U]^*/\bar{k}^*)$$

sont respectivement définis par les suites exactes du haut et du bas. L'égalité (2.3.5) équivaut donc à

$$\text{Tors}(U, S; \mathfrak{S}, \rho) = \pi^{-1}(\partial(\rho)) \subset H^1(U, S)$$

où π et ∂ sont les morphismes naturels du diagramme commutatif

$$(2.3.6) \quad \begin{array}{ccccc} \text{Hom}_g(\hat{R}, \bar{k}[U]^*) & \xrightarrow{\partial} & \text{Ext}_g^1(\hat{S}, \bar{k}[U]^*) & \hookrightarrow & H^1(U, S) \\ \pi \downarrow & & \downarrow \pi & & \\ \rho \in \text{Hom}_g(\hat{R}, \bar{k}[U]^*/\bar{k}^*) & \xrightarrow{\partial} & \text{Ext}_g^1(\hat{S}, \bar{k}[U]^*/\bar{k}^*) & & \end{array}$$

(β) La suite exacte (2.3.1) définit, d'après le lemme 1.6.5, le diagramme commutatif

$$\begin{array}{ccc} \text{Hom}_{\mathfrak{g}}(\hat{R}, \bar{k}[U]^*) = H^0(U, R) & & \\ \downarrow \partial & & \downarrow \partial' \\ \text{Ext}_{\mathfrak{g}}^1(\hat{S}, \bar{k}[U]^*) \rightarrow H^1(U, S) & & \end{array}$$

dont les flèches ∂' et ∂ sont les bords déduits de la suite exacte (2.3.1) et de la suite exacte duale. Dans ce diagramme, l'image de $\phi \in H^0(U, R)$ par ∂' est la classe du torseur déduit de (2.3.1) par pull-back par le k -morphisme $\phi: U \rightarrow R$, autrement dit le produit fibré $M \times_R U$. D'après la définition (2.3.3), un élément de $H^1(U, S)$ appartient donc à $\text{Tors}(U, S; \mathfrak{S}, \rho)$ si, et seulement si, c'est l'image par ∂' d'un $\phi \in H^0(U, R)$ dont le comorphisme $\hat{\phi} \in \text{Hom}_{\mathfrak{g}}(\hat{R}, \bar{k}[U]^*)$ a pour image $\rho \in \text{Hom}_{\mathfrak{g}}(\hat{R}, \bar{k}[U]^*/\bar{k}^*)$ par le morphisme naturel π . Ainsi, $\text{Tors}(U, S; \mathfrak{S}, \rho)$ s'identifie, sur le diagramme (2.3.6), à l'ensemble des classes d'extensions

$$[E'] \in \text{Ext}_{\mathfrak{g}}^1(\hat{S}, \bar{k}[U]^*)$$

de la forme $[E'] = \partial(\hat{\phi})$ avec $\pi(\hat{\phi}) = \rho$. Autrement dit:

$$\text{Tors}(U, S; \mathfrak{S}, \rho) = \partial(\pi^{-1}(\rho)).$$

(γ) Avec les notations de (2.3.6), l'égalité (2.3.5) équivaut donc à la suivante:

$$\partial(\pi^{-1}(\rho)) = \pi^{-1}(\partial(\rho)).$$

Comme (2.3.6) commute, l'inclusion $\partial(\pi^{-1}(\rho)) \subset \pi^{-1}(\partial(\rho))$ est évidente. Considérons alors (2.3.6) dans le diagramme commutatif suivant, formé de suites exactes naturelles évidentes:

$$\begin{array}{ccccccc} & & & & & & \text{Ext}_{\mathfrak{g}}^1(\hat{M}, \bar{k}^*) = 0 \\ & & & & & & \downarrow \\ \text{Hom}_{\mathfrak{g}}(\hat{M}, \bar{k}[U]^*) & \longrightarrow & \text{Hom}_{\mathfrak{g}}(\hat{R}, \bar{k}[U]^*) & \xrightarrow{\partial} & \text{Ext}_{\mathfrak{g}}^1(\hat{S}, \bar{k}[U]^*) & \longrightarrow & \text{Ext}_{\mathfrak{g}}^1(\hat{M}, \bar{k}[U]^*) \\ \downarrow & & \downarrow \pi & & \downarrow \pi & & \downarrow \\ \text{Hom}_{\mathfrak{g}}(\hat{M}, \bar{k}[U]^*/\bar{k}^*) & \longrightarrow & \text{Hom}_{\mathfrak{g}}(\hat{R}, \bar{k}[U]^*/\bar{k}^*) & \xrightarrow{\partial} & \text{Ext}_{\mathfrak{g}}^1(\hat{S}, \bar{k}[U]^*/\bar{k}^*) & \longrightarrow & \text{Ext}_{\mathfrak{g}}^1(\hat{M}, \bar{k}[U]^*/\bar{k}^*) \\ \downarrow & & & & & & \\ \text{Ext}_{\mathfrak{g}}^1(\hat{M}, \bar{k}^*) = 0 & & & & & & \end{array}$$

Dans ce diagramme, M étant un tore quasi-trivial,

$$\mathrm{Ext}_g^1(\hat{M}, \bar{k}^*) = H^1(k, M) = 0$$

d'après le théorème 90 de Hilbert et le lemme de Shapiro. L'inclusion

$$\pi^{-1}(\partial(\rho)) \subset \partial(\pi^{-1}(\rho))$$

résulte aisément du diagramme ci-dessus: si $\pi([E']) = \partial(\rho)$, la partie droite du diagramme montre que

$$[E'] = \partial(\hat{\phi}) \quad \text{avec} \quad \partial(\pi(\hat{\phi}) - \rho) = 0;$$

la partie gauche du diagramme permet alors de modifier $\hat{\phi}$ de sorte que $\pi(\hat{\phi}) = \rho$.

(δ) L'égalité (2.3.5) étant ainsi établie, montrons que la restriction de X à U définit une application

$$\gamma: \mathrm{Tors}(X, S; \lambda) \rightarrow \mathrm{Tors}(U, S; \mathfrak{N}, \rho).$$

Cela résulte du diagramme du théorème 1.6.1 et du lemme de cohérence 1.6.4. Il s'agit de vérifier sur le diagramme que la restriction $H^1(X, S) \rightarrow H^1(U, S)$ induit une application $\mathrm{Tors}(X, S; \lambda) \rightarrow \pi^{-1}(\partial(\lambda))$. Soit \mathcal{T} un torseur sur X sous S de type λ . Comme

$$\lambda \in \mathrm{Hom}_g(\hat{S}, P_{\bar{X}, \bar{U}}),$$

le diagramme du théorème 1.6.1, plus précisément la portion

$$\begin{array}{ccc} H^1(X, S) & \rightarrow & \mathrm{Hom}_g(\hat{S}, \mathrm{Pic} \bar{X}) \\ & & \downarrow \qquad \qquad \downarrow \\ 0 \rightarrow \mathrm{Ext}_g^1(\hat{S}, \bar{k}[U]^*) & \rightarrow & H^1(U, S) \rightarrow \mathrm{Hom}_g(\hat{S}, \mathrm{Pic} \bar{U}), \end{array}$$

montre aussitôt que l'image de $[\mathcal{T}]$ dans $H^1(U, S)$ vient d'une classe d'extensions

$$\alpha \in \mathrm{Ext}_g^1(\hat{S}, \bar{k}[U]^*).$$

La cohérence du cheminement (1.6.10) affirme alors que

$$\pi(\alpha) = \partial(\lambda) \quad \text{dans} \quad \mathrm{Ext}_g^1(\hat{S}, \bar{k}[U]^*/\bar{k}^*).$$

(ε) La surjectivité de γ résulte aussi du diagramme du théorème 1.6.1 et du lemme 1.6.4. Soit en effet

$$\alpha \in \mathrm{Ext}_g^1(\hat{S}, \bar{k}[U]^*)$$

tel que $\pi(\alpha) = \partial(\lambda)$. Le diagramme du théorème 1.6.1 montre aussitôt que son image dans $H^1(U, S)$ est la restriction d'un $\mathcal{F} \in H^1(X, S)$; on trouve en outre que son type $\chi(\mathcal{F})$ appartient à $\text{Hom}_{\mathfrak{g}}(\hat{S}, P_{\bar{X}, \bar{v}})$ et même, d'après le lemme 1.6.4, qu'il a même image que λ dans $\text{Ext}_{\mathfrak{g}}^1(\hat{S}, \bar{k}[U]^*/\bar{k}^*)$. On peut donc modifier \mathcal{F} par l'image d'un élément venant de $\text{Hom}_{\mathfrak{g}}(\hat{S}, \text{Div}_{\bar{Y}} \bar{X})$ de telle sorte qu'il garde la même restriction à U et qu'il ait pour type λ .

(§) D'après le diagramme du théorème 1.6.1, deux classes de toseurs $[\mathcal{F}]$ et $[\mathcal{F}'] \in H^1(X, S)$ ont même type λ et même restriction à U si, et seulement si, elles diffèrent par l'image d'un élément de

$$\text{Hom}_{\mathfrak{g}}(\hat{S}, \bar{k}[U]^*/\bar{k}^*).$$

Or, d'après le théorème 1.6.1, ce groupe a pour image 0 dans $H^1(X, S)$ si, et seulement si, la flèche

$$\text{Ext}_{\mathfrak{g}}^1(\hat{S}, \bar{k}^*) \rightarrow \text{Ext}_{\mathfrak{g}}^1(\hat{S}, \bar{k}[U]^*)$$

est injective, ou, de façon équivalente, si le morphisme

$$\text{Hom}_{\mathfrak{g}}(\hat{S}, \bar{k}[U]^*) \rightarrow \text{Hom}_{\mathfrak{g}}(\hat{S}, \bar{k}[U]^*/\bar{k}^*)$$

est surjectif. Ceci achève la démonstration du théorème.

Exemple 2.3.2. Un cas particulier important est celui où

$$\lambda = \lambda_U := \text{id}_{P_{\bar{X}, \bar{v}}}.$$

On peut alors prendre pour suite exacte (2.3.7) la suite exacte de k -tores

$$(2.3.7) \quad 1 \rightarrow S_U \rightarrow M \rightarrow R_U \rightarrow 1$$

duale de celle de \mathfrak{g} -modules

$$(2.3.8) \quad 1 \rightarrow \bar{k}[U]^*/\bar{k}^* \rightarrow \text{Div}_{\bar{Y}} \bar{X} \rightarrow P_{\bar{X}, \bar{v}} \rightarrow 0,$$

et pour flèches verticales du diagramme (2.3.2) les flèches "identité", et il existe

un toreur de ce type si, et seulement si, la projection

$$\bar{k}[U]^* \rightarrow \bar{k}[U]^*/\bar{k}^*$$

admet une \mathfrak{g} -section σ (on retrouve ainsi la proposition 2.2.8(v)). D'après le théorème 2.3.1, la flèche de restriction $\text{Tors}(X, S; \lambda) \rightarrow \text{Tors}(U, S; \mathfrak{N}, \rho)$ est alors bijective.

Une telle section σ définit un toreur \mathcal{T}^σ sur X sous S de type λ : il est caractérisé par le fait que sa restriction à U est le pull-back de (2.3.8) par le morphisme $\phi_\sigma: U \rightarrow R_U$ dont le comorphisme

$$\hat{\phi}_\sigma: \bar{k}[R_U] = \bar{k}[\hat{R}_U] \rightarrow \bar{k}[U]$$

est précisément défini par

$$\sigma: \hat{R}_U = \bar{k}[U]^*/\bar{k}^* \rightarrow \bar{k}[U]^*.$$

On obtient ainsi toutes les classes de toreurs sur X de type λ .

Si l'obstruction élémentaire est nulle, toute \mathfrak{g} -section σ de la projection $\bar{k}(X)^* \rightarrow \bar{k}(X)^*/\bar{k}^*$ en induit une pour $\bar{k}[U]^* \rightarrow \bar{k}[U]^*/\bar{k}^*$ et définit donc, comme indiqué ci-dessus, un toreur \mathcal{T}^σ dont la classe appartient à

$$\text{Tors}(X, S, \lambda) \xrightarrow{\cong} \pi^{-1}([E]) = \text{Tors}(U, S; \mathfrak{N}, \text{id}) \subset \text{Ext}_\mathfrak{g}^1(\hat{S}, \bar{k}[U]^*)$$

et donne 0 par la rétraction $\text{Ext}_\mathfrak{g}^1(\hat{S}, \bar{k}[U]^*) \rightarrow \text{Ext}_\mathfrak{g}^1(\hat{S}, \bar{k}^*)$ définie par σ . Comme on l'a vu en 2.2.5 et 2.2.8(iv), la section σ définit des retractions pour les morphismes $H^1(k, S) \rightarrow H^1(X, S)$ et $H^1(k, S) \rightarrow H^1(U, S)$, toutes les deux induites par la rétraction définie de façon évidente par σ :

$$H^1(k(X), S) = \text{Ext}_\mathfrak{g}^1(\hat{S}, \bar{k}(X)^*) \rightarrow \text{Ext}_\mathfrak{g}^1(\hat{S}, \bar{k}^*) = H^1(k, S).$$

Ces diverses retractions r, r' et r'' sont donc compatibles: elles rendent commutatif le diagramme

$$\begin{array}{ccc} \text{Ext}_\mathfrak{g}^1(\hat{S}, \bar{k}^*) = H^1(k, S) & \xleftarrow{r'} & H^1(X, S) \\ \uparrow r & \swarrow r'' & \downarrow \\ \text{Ext}_\mathfrak{g}^1(\hat{S}, \bar{k}[U]^*) & \longrightarrow & H^1(U, S), \end{array}$$

ce qui prouve que, si l'on considère le scindage de la suite exacte (2.2.5) défini par σ , la classe de \mathcal{T}^σ est aussi l'élément de $H^1(X, S)$ de type λ et "fibre triviale en σ ".

Exemple 2.3.3. les toseurs universels.

Supposons

(2.0.3) le \mathfrak{g} -module $\text{Pic } \bar{X}$ de type fini.

On peut alors considérer l'exemple précédent dans le cas particulier où $\text{Pic } \bar{U} = 0$, auquel cas

$$\lambda = \lambda_0 := \text{id}_{\text{Pic } \bar{X}}.$$

On retrouve alors la description locale des toseurs universels donnée dans ([22], assertion 1, p. 227):

COROLLAIRE 2.3.4. *Soit X une k -variété algébrique vérifiant les conditions (2.0.1) et (2.0.3), et soit U un ouvert de Zariski non vide de X , tel que $\text{Pic } \bar{U} = 0$. Une telle variété possède un toseur universel si et seulement si la projection $\bar{k}[U]^* \rightarrow \bar{k}[U]^*/\bar{k}^*$ possède une \mathfrak{g} -section σ .*

Une telle section σ définit un toseur universel \mathcal{T}_0^σ dont la restriction à U est le pull-back par ϕ_σ de la suite exacte de k -tores

$$(2.3.9) \quad 1 \rightarrow S_0 \rightarrow M \rightarrow R_U \rightarrow 1$$

duale de celle de \mathfrak{g} -modules

$$(2.3.10) \quad 1 \rightarrow \bar{k}[U]^*/\bar{k}^* \rightarrow \text{Div}_{\bar{Y}} \bar{X} \rightarrow \text{Pic } \bar{X} \rightarrow 0,$$

le morphisme $\phi_\sigma: U \rightarrow R_U$ étant défini par dualité à partir de $\sigma: \hat{R}_U \rightarrow \bar{k}[U]^$.*

On peut également caractériser \mathcal{T}_0^σ par le fait qu'il a pour image 0 par la rétraction (cf. 2.2.8(iv))

$$H^1(X, S) \rightarrow H^1(k, S)$$

définie par σ ; autrement dit, par le fait que \mathcal{T}_0^σ vaut 0 en σ .

Dans le cas où $U(k) \neq \emptyset$, si $P \in U(k)$, on peut prendre pour section

$$\sigma_P: f \bmod \bar{k}^* \rightarrow f/f(P).$$

On note alors \mathcal{T}_0^P le toseur universel défini par la section σ_P : c'est le toseur universel de fibre triviale en P .

Les résultats énoncés résultent de la discussion de l'exemple précédent. On notera qu'ici toute \mathfrak{g} -section de $\bar{k}[U]^* \rightarrow \bar{k}[U]^*/\bar{k}^*$ provient d'une \mathfrak{g} -section de $\bar{k}(X)^* \rightarrow \bar{k}(X)^*/\bar{k}^*$.

2.4. Exemples d'application au prolongement de toseurs. Le théorème 2.3.1 contient la plupart des énoncés de prolongement de toseurs que nous avons

rencontrés. Joint aux propositions 2.1.1 et 2.1.2, il permet aussi d'établir la trivialité d'invariants liés au groupe de Picard sur tout compactifié lisse de certains toseurs, sans avoir à calculer explicitement une telle compactification lisse.

2.4.1. Soit X une k -variété algébrique vérifiant la condition (2.0.1). Soit n un entier > 0 . Soit $f \in k(X)^*$ une fonction dont le diviseur soit un multiple de n . Il est clair que f définit un toseur sous μ_n au-dessus de l'ouvert U où f est inversible, par pull-back par f du toseur-type

$$1 \rightarrow \mu_{n,k} \rightarrow \mathbf{G}_{m,k} \xrightarrow{\times n} \mathbf{G}_{m,k} \rightarrow 1.$$

L'hypothèse sur le diviseur de f assure que ce toseur se prolonge, de façon unique, en un toseur sur X tout entier sous μ_n : il suffit d'appliquer le théorème 2.3.1 pour le diagramme

$$\begin{array}{ccccccc} 1 & \rightarrow & \bar{k}[U]^*/\bar{k}^* & \rightarrow & \text{Div}_{\bar{Y}} \bar{X} & \rightarrow & P_{\bar{X}, \bar{U}} \rightarrow 0 \\ & & \uparrow & & \uparrow & & \uparrow \\ 0 & \rightarrow & \mathbf{Z} & \longrightarrow & \mathbf{Z} & \longrightarrow & \mathbf{Z}/n \rightarrow 0 \end{array}$$

où la verticale de gauche expédie 1 sur la classe de f et la verticale médiane expédie 1 sur D tel que $\text{div}(f) = nD$ (on notera que k^*/k^{*n} s'injecte dans $k[U]^*/k[U]^{*n} \subset \text{Ext}_{\mathfrak{g}}^1(\mathbf{Z}/n, k[U]^*)$).

2.4.2. Soit X qui vérifie (2.0.1). Soit K/k une extension finie et séparable de corps. Soit $f \in k(X)^*$ une fonction dont le diviseur est une norme pour K/k : $\text{div}(f) = N_{K/k}(D)$ pour $D \in \text{Div } X_K$. Soit U l'ouvert complémentaire du plus petit fermé Y de X tel que Y_K contienne le support de D . Il est clair que f définit sur U un toseur sous le k -tore $R_{K/k}^1 \mathbf{G}_m$ par pull-back par f du toseur-type

$$1 \rightarrow R_{K/k}^1 \mathbf{G}_m \rightarrow R_{K/k} \mathbf{G}_m \xrightarrow{N_{K/k}} \mathbf{G}_{m,k} \rightarrow 1.$$

L'hypothèse sur $\text{div}(f)$ assure que ce toseur se prolonge, de façon unique si k^*/NK^* s'injecte dans $k[U]^*/NK[U]^*$, en un toseur sur X sous le k -tore $S := R_{K/k}^1 \mathbf{G}_m$: il suffit d'appliquer le théorème 2.3.1 au diagramme

$$\begin{array}{ccccccc} 1 & \rightarrow & \bar{k}[U]^*/\bar{k}^* & \rightarrow & \text{Div}_{\bar{Y}} \bar{X} & \rightarrow & P_{\bar{X}, \bar{U}} \rightarrow 0 \\ & & \uparrow & & \uparrow & & \uparrow \\ 0 & \rightarrow & \mathbf{Z} & \xrightarrow{N} & \mathbf{Z}[\mathfrak{g}/\mathfrak{h}] & \longrightarrow & \hat{S} \rightarrow 0 \end{array}$$

où

$$\mathfrak{g} = \text{Gal}(\bar{k}/k), \quad \mathfrak{h} = \text{Gal}(\bar{k}/K), \quad N = N_{\mathfrak{g}/\mathfrak{h}},$$

et où la verticale de gauche envoie 1 sur la classe de f et la verticale médiane envoie 1 sur D .

Pour un exemple de la même veine, mais plus complexe, voir [27] §12 Step IV(f).

2.4.3. *Le cas des toreseurs universels.* On peut interpréter le corollaire 2.3.4 comme un énoncé de prolongement (unique) à tout X du toseur sur U sous S_0 défini explicitement comme le pull-back par $\phi_\sigma: U \rightarrow R_U$ du toseur sur R_U sous S_0 défini par la suite exacte (2.3.9).

2.4.4. *Le cas des tores.* Le case particulier de 2.4.3 où X est une k -compactification lisse d'un k -tore T est particulièrement intéressant. On peut prendre $U = T$. On trouve alors $R_U = T$. Si l'on prend $\sigma = \sigma_O$ où O est l'élément neutre de $T(k)$, le toseur sur T sous S_0 ainsi obtenu n'est autre que celui donné par la suite exacte de k -tores

$$1 \rightarrow S_0 \rightarrow M \rightarrow T \rightarrow 1$$

déduite par dualité de la suite exacte de \mathfrak{g} -modules

$$0 \rightarrow \hat{T} \rightarrow \text{Div}_{\bar{Y}} \bar{X} \rightarrow \text{Pic } \bar{X} \rightarrow 0,$$

et la proposition assure qu'il se prolonge, de façon unique, en un toseur sur X sous S_0 . Comme M est un k -tore quasi-trivial, en particulier une variété k -rationnelle, on obtient ainsi les principaux résultats de [20]. De façon plus générale, la première hypothèse sur les toreseurs universels (cf. §2.8 ci-après) est ici satisfaite, ce qui fait le succès de la méthode de la descente dans ce cas. Pour plus de détails, voir [22], §3.

2.5. *Exemples de calcul d'équations locales de toreseurs universels.*

2.5.1. Soit k un corps de caractéristique $\neq 3$, contenant une racine cubique de l'unité $\theta \neq 1$. Soit $a \in k^* \setminus k^{*3}$. La k -surface cubique X d'équation homogène

$$T_0^3 + T_1^3 + T_2^3 + aT_3^3 = 0,$$

dont on sait qu'elle n'est pas k -rationnelle (Shafarevitch), a été étudiée par Manin [42] du point de vue de l'équivalence de Brauer. On va appliquer la proposition pour trouver des équations locales pour les toreseurs universels sur cette surface cubique sur l'ouvert complémentaire de la réunion des 27 droites (en fait même seulement de 9 d'entre elles). On note

$$\alpha := \sqrt[3]{a}, \quad K = k(\alpha), \quad G = \text{Gal}(K/k) \cong \mathbb{Z}/3.$$

Avec les notations de Manin ([42] chap. VI, 5.4 (= 45.4)), la surface \bar{X} contient les droites suivantes, définies sur K :

$$\begin{aligned} A_i = L_2(1, i): & \quad T_0 + \theta T_1 = 0 & \quad T_2 + \theta^i \alpha T_3 = 0 \\ B_i = L_1(0, i): & \quad T_0 + T_2 = 0 & \quad T_1 + \theta^i \alpha T_3 = 0 \\ C_i = L_2(0, i): & \quad T_0 + T_1 = 0 & \quad T_2 + \theta^i \alpha T_3 = 0, \end{aligned}$$

où $i = 0, 1, 2$.

LEMME 2.5.2. *Chacun des deux systèmes suivants définit une base du groupe abélien libre $\text{Pic } \bar{X}$:*

$$\begin{aligned} & (A_0, A_1, B_0, B_1, C_0, C_1, C_2), \\ & (A_0 - C_0, A_1 - C_1, B_0 - C_0, B_1 - C_1, C_0, C_1, C_2). \end{aligned}$$

Démonstration. Le déterminant de Gram du premier système vaut 1.

Soit U l'ouvert de X complémentaire de la réunion des 9 droites A_i, B_i et C_i . On a $\text{Pic } \bar{U} = 0$. On peut donc appliquer le théorème 2.3.1 au diagramme commutatif de suites exactes

$$\begin{array}{ccccccc} 1 & \rightarrow & \bar{k}[U]^*/\bar{k}^* & \longrightarrow & \text{Div}_{\bar{Y}} \bar{X} & \longrightarrow & \text{Pic } \bar{X} \rightarrow 0 \\ & & \cong \uparrow & & \delta \uparrow & & \uparrow \lambda \\ 0 & \longrightarrow & \mathbb{Z}^2 & \xrightarrow{N} & \mathbb{Z}[G]^2 & \longrightarrow & \hat{S} \rightarrow 0 \end{array}$$

défini comme suit: $N = (N_G, N_G)$; l'isomorphisme de gauche est donné par les classes des fonctions

$$f = (T_0 + \theta T_1)/(T_0 + T_1) \quad \text{et} \quad g = (T_0 + T_2)/(T_0 + T_1);$$

l'injection δ est donnée par

$$\delta(1, 0) = A_0 - C_0 \quad \text{et} \quad \delta(0, 1) = B_0 - C_0,$$

et on a effectivement

$$\text{div}(f) = N(\delta(1, 0)) \quad \text{et} \quad \text{div}(g) = N(\delta(0, 1)),$$

d'où, d'après le lemme:

$$\text{Div}_{\bar{Y}} \bar{X} = \text{im}(\delta) \oplus \mathbb{Z}[G] \cdot C_0 \quad \text{et} \quad \text{Pic } \bar{X} \cong \hat{S} \oplus \mathbb{Z}[G] \cong (\mathbb{Z}[G]/N_G \cdot \mathbb{Z})^2 \oplus \mathbb{Z}[G].$$

Noter qu'on en déduit aussitôt

$$H^1(k, \text{Pic } \bar{X}) \cong (\mathbb{Z}/3)^2.$$

Ainsi, λ est un type admissible et l'application de la proposition au diagramme ci-dessus donne les équations au-dessus de l'ouvert U de X d'un torseur admissible quelconque \mathcal{T}^γ de type λ :

$$0 \neq f(T_0, T_1, T_2, T_3) = \gamma_1 \cdot N_{K/k}(x_0 + \alpha x_1 + \alpha^2 x_2)$$

$$0 \neq g(T_0, T_1, T_2, T_3) = \gamma_2 \cdot N_{K/k}(y_0 + \alpha y_1 + \alpha^2 y_2)$$

$$T_0^3 + T_1^3 + T_2^3 + aT_3^3 = 0,$$

en les variables $(T_0, T_1, T_2, T_3; x_0, x_1, x_2; y_0, y_1, y_2)$, avec $\gamma = (\gamma_1, \gamma_2) \in k^{*2}$ quelconque. Le torseur-type est alors donné par la suite exacte de k -tores

$$1 \rightarrow R_{K/k}^1 \mathbf{G}_m^2 \rightarrow R_{K/k} \mathbf{G}_m^2 \xrightarrow{N_{K/k}} \mathbf{G}_{m,k}^2 \rightarrow 1$$

et l'application $\phi: U \rightarrow \mathbf{G}_{m,k} \times \mathbf{G}_{m,k}$ est donnée par (f, g) . Tout torseur universel est, sur l'ouvert U , le produit direct d'un torseur admissible \mathcal{T}^γ et du facteur "trivial" $R_{K/k} \mathbf{G}_m$.

2.5.3. *La surface cubique diagonale X d'équation*

$$aT_0^3 + bT_1^3 + cT_2^3 + dT_3^3 = 0,$$

en les variables T_0, T_1, T_2, T_3 , avec $a, b, c, d \in k^*$. On fait sur k les mêmes hypothèses qu'en 2.5.1, mais on suppose qu'aucun des nombres ab/cd , ni des a/b n'est un cube dans k^* , ce qui exclut le cas précédent. On considère alors le corps

$$K = k(\alpha, \gamma) \quad \text{où } \alpha = \sqrt[3]{b/a} \text{ et } \gamma = \sqrt[3]{ad/bc}.$$

La surface X est K -rationnelle et on construit dans [15], §10, les torseurs quasi-universels relativement à K/k , i.e. de type l'injection naturelle

$$i: \text{Pic } X_K \rightarrow \text{Pic } \bar{X}.$$

Contrairement au cas précédent, ces torseurs ne sont pas admissibles, le conoyau de i n'étant pas un \mathfrak{g} -module de permutation. Il n'empêche qu'en vertu du théorème 2.1.2(b), ces torseurs peuvent être aussi intéressants que les torseurs admissibles.

Nous renvoyons à [15] pour le détail des calculs: voir en particulier le lemme 17 et le diagramme (143) de [15], qui permet d'appliquer le théorème 2.3.1 et

d'obtenir ainsi des équations locales pour les toseurs de type i . On note

$$K_1 = k(\alpha), K_2 = k(\beta), L_1 = k(\gamma), L_2 = k(\delta) \quad \text{où } \beta = \alpha\gamma \text{ et } \delta = \alpha/\gamma.$$

Le toseur-type est donné par la suite exacte de k -tores

$$1 \rightarrow S \rightarrow \mathbf{G}_{m,k} \times R_{K/k}\mathbf{G}_m \rightarrow S_1 \rightarrow 1$$

où S et S_1 sont respectivement les conoyau de ρ et noyau de π dans la suite exacte

$$1 \rightarrow \mathbf{G}_{m,k} \xrightarrow{\iota} R_{L_1/k}\mathbf{G}_m \times R_{L_2/k}\mathbf{G}_m \xrightarrow{\rho} \mathbf{G}_{m,k} \times R_{K/k}\mathbf{G}_m \xrightarrow{\nu} \\ R_{K_1/k}\mathbf{G}_m \times R_{K_2/k}\mathbf{G}_m \xrightarrow{\pi} \mathbf{G}_{m,k} \rightarrow 1$$

$$\text{où } \iota(x) = (x, x^{-1}), \rho(x, y) = (N_{L_1/k}(x) \cdot N_{L_2/k}(y), 1/xy),$$

$$\nu(x, y) = (x \cdot N_{K/K_1}(y), x \cdot N_{K/K_2}(y)) \text{ et enfin } \pi(x, y) = N_{K_1/k}(x) \cdot N_{K_2/k}(y).$$

Quant au k -morphisme $\phi: U \rightarrow S_1$, il est défini par

$$\phi(T_0, T_1, T_2, T_3) = ((T_0 + \alpha T_1)/\varepsilon_\alpha T_3, (T_2 + \beta T_3)/\varepsilon_\beta T_3),$$

avec $\varepsilon_\alpha \in K_1^*$ et $\varepsilon_\beta \in K_2^*$ tels que $N_{K/L_1}(\varepsilon_\alpha/\varepsilon_\beta) = -c/a$. On obtient ainsi, au-dessus d'un ouvert U non vide de X convenable, comme équations des toseurs quasi-universels, relativement à K/k , les équations suivantes, où $c_i \in K_i$:

$$aT_0^3 + bT_1^3 + cT_2^3 + dT_3^3 = 0,$$

$$(T_0 + \alpha T_1)/T_3 = c_1 u \cdot N_{K/K_1}(\xi) \neq 0$$

$$(T_2 + \beta T_3)/T_3 = c_2 u \cdot N_{K/K_2}(\xi) \neq 0,$$

en les variables $(T_0, T_1, T_2, T_3; u, \xi)$ dans $\mathbf{P}_k^3 \times \mathbf{G}_{m,k} \times R_{K/k}\mathbf{G}_m \hookrightarrow \mathbf{P}_k^3 \times \mathbf{A}_k^{10}$, avec

$$(c_1, c_2) \in K_1^* \times K_2^* \quad \text{tel que } a \cdot N_{K_1/k}(c_1) = -c \cdot N_{K_2/k}(c_2).$$

On peut montrer (cf. [15] §10 proposition 11) qu'un tel toseur admet pour modèle un cône intersection dans \mathbf{A}_k^9 de deux hypersurfaces cubiques d'un type géométrique très particulier.

2.6. Le cas des surfaces fibrées en coniques sur la droite projective. De nombreux exemples de calcul d'équations locales de toseurs universels ou admissibles sur de telles surfaces rationnelles ont déjà été exposés dans d'autres articles, e.g. [22], [13], [50], [2], [27], dans des situations particulières variées. Nous traitons ici le cas général, selon la méthode annoncée dans [25], avant de

mentionner rapidement un certain nombre de cas particuliers donnant parfois lieu à des simplifications.

On suppose k parfait de caractéristique $\neq 2$. On note (u, v) les coordonnées homogènes sur la droite projective \mathbf{P}_k^1 et $x = u/v$ la coordonnée sur la droite affine $\mathbf{A}_k^1 = \mathbf{P}_k^1 - \{\infty\}$. Soit

$$X \xrightarrow{\pi} \mathbf{P}_k^1$$

une k -surface projective et lisse, fibrée en coniques sur \mathbf{P}_k^1 (par quoi l'on entend que chaque fibre est une conique réduite). Une telle surface vérifie (2.0.1) et (2.0.3), et S_0 est même un tore. On suppose la fibre à l'infini lisse. Soient $\{e_i\}_{i=1, \dots, s}$ les points fermés de \mathbf{P}_k^1 en lesquels les fibres de π sont dégénérées, $K_i = k(e_i)$ le corps résiduel en e_i et K'_i/K_i l'algèbre quadratique séparable définie par les composantes irréductibles géométriques de la fibre de e_i . Soient

$$P(x) = \prod_i N_{K_i/k}(x - e_i) \quad \text{et} \quad A = k[x]/(P) = \prod_i K_i.$$

On note $\theta = \{e_i\}$ la classe de x dans A . L'algèbre $A' = \prod_i K'_i$ est quadratique étale sur A et peut s'écrire

$$A' = k[x, \sqrt{a(x)}]/(P(x)) = A[\sqrt{a(\theta)}]$$

avec $a(x)$ séparable (si $b \in B$, on désigne par la notation $B[\sqrt{b}]$ l'algèbre $B[T]/((T^2 - b))$). Ainsi:

$$K'_i = K_i[\sqrt{a_i}] \quad \text{avec} \quad a_i = a(e_i).$$

On note $r = \deg P$ le nombre de fibres géométriques dégénérées de π . La fibration π définit une $k(x)$ -algèbre de quaternions \mathcal{A} dont la classe dans $\text{Br } k(x) = \text{Br } k(\mathbf{P}_k^1)$ a pour résidu en e_i la classe de a_i dans K_i^*/K_i^{*2} .

Soient U'_0 l'ouvert de \mathbf{P}_k^1 complémentaire de la réunion des e_i et $U_0 = U'_0 - \{\infty\}$. On note U l'ouvert $\pi^{-1}(U_0)$ de X . De la suite exacte de g -modules

$$1 \rightarrow \bar{k}[U]^*/\bar{k}^* \rightarrow \text{Div}_{\bar{v}} \bar{X} \rightarrow \text{Pic } \bar{X} \rightarrow \text{Pic } \bar{U} \rightarrow 0$$

on tire (voir [23] (2.1)) des suites exactes naturelles de k -tores:

$$(2.6.1) \quad 1 \rightarrow \mathbf{G}_{m, k} \rightarrow S_0 \rightarrow S \rightarrow 1$$

$$(2.6.2) \quad 1 \rightarrow S \rightarrow \mathbf{G}_{m, k} \times \prod_i R_{K'_i/k} \mathbf{G}_m \xrightarrow{\nu} \prod_i R_{K_i/k} \mathbf{G}_m \rightarrow 1,$$

où $\nu(t, t'_i) = \{t^{-1} \cdot N_i(t'_i)\}$ avec $N_i := N_{K'_i/K_i}$; on réécrit celle-ci

$$(2.6.3) \quad 1 \rightarrow S \rightarrow \mathbf{G}_{m,k} \times R_{A'/k} \mathbf{G}_m \xrightarrow{\nu} R_{A/k} \mathbf{G}_m \rightarrow 1,$$

ou encore

$$(2.6.4) \quad 1 \rightarrow S \rightarrow M \rightarrow R \rightarrow 1.$$

La suite exacte (2.6.1) vient, par dualité, de celle de \mathfrak{g} -modules:

$$(2.6.5) \quad 0 \rightarrow \hat{S} \xrightarrow{\lambda} \text{Pic } \bar{X} \xrightarrow{\omega} Z \rightarrow 0,$$

où ω est la restriction à la fibre générique, ou, ce qui revient au même, à U . Ainsi,

$$P_{\bar{X}, \bar{U}} = \hat{S}.$$

De plus, le \mathfrak{g} -module $\bar{k}[U]^*/\bar{k}^*$ est de permutation, son dual est le k -tore $R = R_{A'/A} \mathbf{G}_m = \prod_i R_{K_i/k} \mathbf{G}_m$ et la famille de fonctions $\{(x - e_i) \in K_i(U)\}$, ou, ce qui revient au même, la fonction $x - \theta \in A[U]$, définit une \mathfrak{g} -section de la projection $\bar{k}[U]^* \rightarrow \bar{k}[U]^*/\bar{k}^*$.

Il existe donc toujours (proposition 2.2.8(v)) des torseurs de type λ sur X et la description locale des torseurs donnée par le théorème 2.3.1 s'applique sur l'ouvert U : pour chaque relèvement $\alpha \in A^* = \prod_i K_i^*$ de

$$\text{cl}(\alpha) = \text{cl}((\alpha_i)) \in H^1(k, S) = A^*/\text{im}(\nu(k)) = \left(\prod_i K_i^* \right) / \text{im}(\nu(k)),$$

la fonction $\varphi_\alpha: U \rightarrow R = R_{A'/k} \mathbf{G}_m = \prod_i R_{K_i/k} \mathbf{G}_m$ définie par $x \mapsto \alpha(x - \theta) = \{\alpha_i(x - e_i)\}$ a pour comorphisme un relèvement de l'identité de $\hat{R} = \bar{k}[U]^*/\bar{k}^*$. Le torseur \mathcal{T}^α de type λ est donc sur U le pull-back par φ_α du torseur-type (2.6.2): c'est la situation de l'exemple 2.3.2. Comme φ_α se factorise clairement par U_0 , on a le diagramme suivant dont les deux carrés sont cartésiens:

$$(2.6.6) \quad \begin{array}{ccccc} \mathcal{T}_U^\alpha & \longrightarrow & W_0 & \longrightarrow & M \\ \downarrow & & \downarrow & & \downarrow \\ U & \xrightarrow{\pi} & U_0 & \longrightarrow & R. \end{array}$$

Les équations de W_0 sont donc données dans $\mathbf{A}_k^2 \times R_{A'/k} \mathbf{A}^1 = \mathbf{A}_k^2 \times \prod_i R_{K'_i/k} \mathbf{A}^1$ par:

$$(2.6.7) \quad \alpha(x - \theta) = t^{-1} \cdot N_{A'/A}(t') \neq 0,$$

ou encore

$$(2.6.8) \quad \alpha_i(x - e_i) = t^{-1} \cdot N_i(t'_i) \neq 0 \quad i = 1, \dots, s,$$

où $(x, t; t') = (x, t; t'_i)$ sont les coordonnées, t' étant à valeurs dans A' et les t'_i dans K'_i . Considérons alors la k -variété W' définie dans le même espace, de coordonnées $(u, v; t') = (u, v; t'_i)$ par l'équation

$$(2.6.9) \quad \alpha(u - \theta v) = N_{A'/A}(t') \neq 0,$$

ou encore par les équations

$$(2.6.10) \quad \alpha_i(u - e_i v) = N_i(t'_i) \neq 0 \quad i = 1, \dots, s.$$

Le changement de variables $x = u/v$ et $t = v$ définit une k -immersion ouverte $W_0 \rightarrow W'$ compatible avec les projections p_0 sur $U_0 \subset \mathbf{A}_k^1$ et p' sur $U'_0 \subset \mathbf{P}_k^1$ données respectivement par x et par (u, v) . On peut ensuite plonger W' dans la k -variété $W = W_\alpha$ définie dans $\mathbf{A}_k^2 \times R_{A'/k} \mathbf{A}^1$ par l'équation

$$(2.6.11) \quad u - \theta v = \alpha^{-1} \cdot N_{A'/A}(t') \quad (u, v) \neq (0, 0),$$

où $\alpha = \alpha(\theta) = \{\alpha_i\} \in A^*$, ou encore, dans $\mathbf{A}_k^2 \times \prod_i R_{K_i/k} \mathbf{A}^2$ par les équations ($i = 1, \dots, s$):

$$(2.6.12) \quad u - e_i v = \alpha_i^{-1} \cdot N_i(t'_i) \quad (u, v) \neq (0, 0),$$

de façon compatible avec les projections sur U'_0 et \mathbf{P}_k^1 respectivement. Soit $\Omega := \mathbf{A}_k^2 - \{0, 0\}$ et soit $\kappa: \Omega \rightarrow \mathbf{P}_k^1$ le morphisme canonique. Soit Ω' l'image réciproque de U'_0 dans Ω . Avec ces notations, on a le diagramme d'inclusions et k -morphismes:

$$(2.6.13) \quad \begin{array}{ccccc} W & \xrightarrow{q} & \Omega & \xrightarrow{\kappa} & \mathbf{P}_k^1 \\ \cup & & \cup & & \cup \\ W' & \longrightarrow & \Omega' & \longrightarrow & U'_0 \\ \cup & & & & \cup \\ W_0 & \longrightarrow & & & U_0. \end{array}$$

Dans ce diagramme, on note $p: W \rightarrow \mathbf{P}_k^1$ la restriction $\kappa \circ q$ de κ à W , et les projections $p': W' \rightarrow U'_0$ et $p_0: W_0 \rightarrow U_0$ sont les restrictions de p à W' et W_0 respectivement.

Dans ce qui suit on utilise la notion de groupe de Brauer-Grothendieck d'une variété. Pour les notations et propriétés utilisées ici, voir 1.5.0 et le début de 3.1. En particulier, si Y est une k -variété algébrique, $\text{Br}_1 Y$ désigne le noyau de la restriction $\text{Br } Y \rightarrow \text{Br } \bar{Y}$, et, si $\bar{k}[Y]^* = \bar{k}^*$, on a la suite exacte

$$(1.5.0) \quad 0 \rightarrow \text{Pic } Y \rightarrow (\text{Pic } \bar{Y})^g \rightarrow \text{Br } k \rightarrow \text{Br}_1 Y \rightarrow H^1(\mathfrak{g}, \text{Pic } \bar{Y}) \rightarrow H^3(\mathfrak{g}, \bar{k}^*).$$

LEMME 2.6.1. *Avec les notations et hypothèses ci-dessus:*

$$\bar{k}[W]^* = \bar{k}^*, \quad \text{Pic } \bar{W} = 0, \quad \text{Br}_1 W = \text{Br } k.$$

Démonstration. L'égalité $\text{Br}_1 W = \text{Br } k$ résulte des deux premières et celles-ci se vérifient aisément, comme on le voit ci-après, en observant que sur \bar{k} les équations (2.6.12) s'écrivent plus simplement:

$$u - e_j v = u'_j v'_j \quad (u, v) \neq (0, 0),$$

où les u'_j, v'_j sont des variables "ordinaires" ($j = 1, \dots, r$). Il est immédiat que \bar{W}' est le produit de $\bar{\Omega}'$ et d'un tore $\cong \mathbb{G}_{m, \bar{k}}^r$. On a donc:

$$\text{Pic } \bar{W}' = \text{Pic } \bar{\Omega}' = 0 \quad \text{et} \quad \bar{k}[W']^*/\bar{k}^* = \bar{k}[\bar{\Omega}']^*/\bar{k}^* \times Z^r,$$

où Z^r admet pour base les classes des u'_j . Autrement dit,

$$\bar{k}[W']^* \text{ est engendré par } \bar{k}[\bar{\Omega}']^* \text{ et par les } u'_j.$$

Soient δ_j (resp. δ'_j) les sous-variétés irréductibles de codimension 1 définies dans \bar{W} par $u'_j = 0$ (resp. $v'_j = 0$). D'après ce qui précède, une fonction inversible sur \bar{W} s'écrit

$$f = g \cdot \prod_j u_j^{n_j}$$

avec $g \in \bar{k}[\bar{\Omega}']^*$. Ce groupe $\bar{k}[\bar{\Omega}']^*$ est engendré mod \bar{k}^* par les classes des fonctions $g_j = u - e_j v$. Comme $\text{div}(u - e_j v) = \delta_j + \delta'_j$, on voit que, si, à une constante près,

$$g = \prod_j g_j^{m_j},$$

alors

$$\text{div}(f) = \sum_j ((n_j + m_j)\delta_j + m_j\delta'_j).$$

Comme f est inversible, $\text{div}(f) = 0$ et $m_j = 0$ pour chaque j , donc aussi $n_j = 0$, et f est donc constante, ce qui prouve

$$\bar{k}[W]^* = \bar{k}^*.$$

Le groupe des diviseurs de \bar{W} à support hors de \bar{W}' admet pour base $\{\delta_j, \delta'_j\}$. Comme chaque δ_j ou δ'_j est un diviseur principal et que $\text{Pic } \bar{\Omega}' = 0$, on en déduit

$$\text{Pic } \bar{W} = 0.$$

A fortiori, $H^1(\mathfrak{g}, \text{Pic } \bar{W}) = 0$ et, comme $\bar{k}[X]^* = \bar{k}^*$, on obtient ainsi $\text{Br}_1 W = \text{Br } k$.

Remarque 2.6.2. Le lemme 2.6.1 assure que, pour toute k -compactification lisse Z de W , le \mathfrak{g} -module $\text{Pic } \bar{Z}$ est de permutation et les obstructions standard à la k -rationalité (voir appendice 2.A ci-après) et au principe de Hasse ([41], [42] chap. VI, et §3 ci-après) disparaissent donc sur Z .

PROPOSITION 2.6.3. Soit $\alpha = (\alpha_i) \in \prod_i K_i^*$ pour $i = 1, \dots, s$. Soit $W = W_\alpha$ la k -variété lisse définie dans $\mathbf{A}_k^2 \times \prod_i R_{K_i/k} \mathbf{A}_k^2$ par les équations ($i = 1, \dots, s$)

$$(2.6.14) \quad \alpha_i(u - e_i v) = u_i^2 - a_i v_i^2 \quad (u, v) \neq (0, 0),$$

en les variables $(u, v; u_i, v_i)$, à valeurs dans $k \times k \times \prod_i (K_i \times K_i)$.

(i) La k -variété W_α s'identifie à un ouvert d'un cône épointé ayant pour base une intersection complète $V = V_\alpha$ de $r - 2$ quadriques dans \mathbf{P}_k^{2r-1} , qui est géométriquement intègre et n'est pas un cône.

(ii) Tout modèle k -birationnel, propre et lisse, Z de W , ou de V , vérifie

$$H^1(\mathfrak{g}, \text{Pic } \bar{Z}) = 0.$$

Démonstration. L'assertion (ii) est un corollaire du lemme 2.6.1 et de (i) comme indiqué dans la remarque 2.6.2. Les équations (2.6.12) donnent (2.6.14) en posant

$$t'_i = u_i + v_i \sqrt{a_i}.$$

Si l'on pose formellement

$$t' = (u_1 + u_2 \theta + \dots + u_r \theta^{r-1}) + (v_1 + v_2 \theta + \dots + v_r \theta^{r-1}) \sqrt{a(\theta)},$$

où les variables u_j, v_j sont à valeurs dans k , il vient:

$$\alpha^{-1} \cdot N_{A'/A}(t') = Q_1(\mathbf{u}, \mathbf{v}) + Q_2(\mathbf{u}, \mathbf{v}) \theta + \dots + Q_r(\mathbf{u}, \mathbf{v}) \theta^{r-1},$$

où $\mathbf{u} = (u_1, \dots, u_r)$ et $\mathbf{v} = (v_1, \dots, v_r)$, et l'équation (2.6.12) équivaut ainsi au système de $r - 2$ équations quadratiques homogènes:

$$Q_3(\mathbf{u}, \mathbf{v}) = \dots = Q_r(\mathbf{u}, \mathbf{v}) = 0,$$

en $2r$ variables "ordinaires," à coefficients dans k , avec $(Q_1(\mathbf{u}, \mathbf{v}), Q_2(\mathbf{u}, \mathbf{v})) \neq (0, 0)$, ce qui prouve (i).

THÉORÈME 2.6.4. Soit X une surface fibrée en coniques sur la droite projective sur un corps parfait k de caractéristique $\neq 2$. Soit r le nombre de fibres géométriques dégénérées et soit

$$\lambda: \hat{S} \rightarrow \text{Pic } \bar{X}$$

le type admissible considéré en (2.6.5), noyau de la restriction à la fibre générique.

- (i) X possède toujours des toiseurs \mathcal{T}^α de type λ .
- (ii) Sous chacune des hypothèses suivantes, tout tel toiseur \mathcal{T}^α admet pour modèle k -birationnel le produit par une conique et par \mathbf{P}_k^1 d'une intersection complète V_α de $r - 2$ quadriques dans \mathbf{P}_k^{2r-1} :
 - (a) k est un corps local, ou un corps de nombres, ou un corps C_1 ;
 - (b) la fibration X/\mathbf{P}_k^1 possède une section sur une extension quadratique de k ;
 - (c) $W_\alpha(k) \neq \emptyset$;
 - (d) \mathcal{T}^α possède un point k -rationnel non situé au-dessus d'un point d'une fibre singulière de la fibration;
 - (e) $\text{car}(k) = 0$ et $\mathcal{T}^\alpha(k) \neq \emptyset$.
- (iii) Soit \mathcal{T} un toiseur universel sur X ; sous (a), sous (b), ou si \mathcal{T} satisfait l'une des conditions (d) ou (e), alors \mathcal{T} admet pour modèle k -birationnel le produit d'une variété V_α par une conique et par \mathbf{P}_k^2 .

Voici d'abord deux remarques avant la démonstration.

Remarque 2.6.5. Si aucune des hypothèses (a), (b), (c), (d) n'est vérifiée, on peut au moins affirmer que \mathcal{T}^α est stablement (i.e. quitte à faire son produit par l'espace projectif d'une dimension convenable) k -birationnellement le produit de V_α par une k -variété de Severi-Brauer.

Remarque 2.6.6. L'assertion (iii) n'affirme pas l'existence automatique d'un toiseur universel, mais n'a d'intérêt que s'il en existe!

Démonstration. (i) a déjà été établi au début de la section 2.6. D'après la description locale qu'on a déjà donnée, le toiseur \mathcal{T}^α a pour restriction sur l'ouvert U de X le produit fibré de U et de l'ouvert W_0 de $W = W_\alpha$ au-dessus de l'ouvert U_0 de \mathbf{A}_k^1 . Il admet donc pour modèle le pull-back par $W \rightarrow \mathbf{P}_k^1$ de la fibration en coniques $X \rightarrow \mathbf{P}_k^1$, qui est lisse au-dessus de U'_0 , et ramifiée en $\{e_i\}$ tout comme le morphisme $W \rightarrow \mathbf{P}_k^1$. Le point-clé de la démonstration est que la ramification "mange" la ramification ("lemme d'Abhyankar"): le passage de \mathbf{P}_k^1 à W a pour effet de tuer la ramification de la fibration en coniques, comme on va le voir.

D'après le théorème de Tsen, la classe de la $k(x)$ -algèbre de quaternions \mathcal{A} associée à la conique générique de la fibration π est trivialisée par passage à \bar{k} . Elle se prolonge en une algèbre d'Azumaya, encore notée \mathcal{A} , au-dessus de U'_0 , et sa classe $[\mathcal{A}]$ appartient donc à $\text{Br}_1 U'_0$. Son image réciproque $p'^*([\mathcal{A}])$ sur W' par $p': W' \rightarrow U'_0$ appartient donc à $\text{Br}_1 W'$. Or, on a la suite exacte (cf. [34], §1) et le diagramme commutatif:

$$\begin{array}{ccccc}
 0 \rightarrow \text{Br}_1 W & \rightarrow & \text{Br}_1 W' & \xrightarrow{\{\partial_{2,w}\}} & \bigoplus_w H^1(k(w), \mathbf{Q}/\mathbf{Z}) \\
 & & \uparrow p'^* & & \uparrow p^* \\
 & & \text{Br}_1 U'_0 & \xrightarrow{\{\partial_{2,i}\}} & \bigoplus_i H^1(k(x_i), \mathbf{Q}/\mathbf{Z}),
 \end{array}$$

où w parcourt l'ensemble des points de codimension 1 de $W - W'$, où $i = 1, \dots, s$, où $\partial_{2,w}$ désigne le "second résidu" en w et $\partial_{2,i}$ le second résidu en e_i , et où $k(w)$ désigne le corps résiduel de w et $k(e_i)$ celui de e_i . Dans le diagramme ci-dessus, l'application p^* est exactement induite par les inclusions naturelles des $k(e_i)$ dans $k(w)$, pour tous les couples (e_i, w) avec w au-dessus de e_i . L'absence de coefficients de ramification tient au fait que la fibre de p en chacun des e_i est un diviseur réduit. Fixons (e_i, w) avec w au-dessus de e_i . La fibration en coniques $X \rightarrow \mathbf{P}_k^1$ admet, au voisinage de e_i , une écriture locale du type

$$y^2 - a(x)z^2 = b(x) \cdot P_i(x)t^2 \quad \text{où } P_i(x) = N_{K_i/k}(x - e_i),$$

et où a et b sont des unités dans l'anneau local de e_i . Au voisinage de e_i , l'algèbre \mathcal{A} équivaut donc à l'algèbre de quaternions $(a(x), b(x) \cdot P_i(x))$ et, par suite,

$$\partial_{2,i}(\mathcal{A}) \text{ est la classe de } a_i := a(e_i) \text{ dans } k(e_i)^*/k(e_i)^{*2} \cong H^1(k(e_i), \mathbf{Z}/2).$$

On en déduit que

$$\partial_{2,w}(p'^*(\mathcal{A})) \text{ est la classe de } a_i \text{ dans } k(w)^*/k(w)^{*2} \cong H^1(k(w), \mathbf{Z}/2).$$

Or, compte tenu du fait que u_i et v_i sont inversibles en w , l'équation

$$u - e_i v = \alpha_i (u_i^2 - a_i v_i^2)$$

montre que

$$a_i = u_i^2/v_i^2 \quad \text{dans } k(w)^*,$$

ce qui prouve finalement que

$$\partial_{2,w}(p'^*(\mathcal{A})) = 1.$$

Ainsi, la classe de l'algèbre d'Azumaya $p'^*(\mathcal{A})$ appartient à $\text{Br}_1 W$, autrement dit l'algèbre $p'^*(\mathcal{A})$ est "non ramifiée" sur la variété W tout entière. D'après le lemme 2.6.1, $\text{Br}_1 W = \text{Br } k$. Il existe donc une algèbre constante \mathcal{A}_0 semblable à $p'^*(\mathcal{A})$ dans $\text{Br } k(W)$. Comme \mathcal{A} est une algèbre de quaternions, sa classe appartient au sous-groupe ${}_2\text{Br } k(x)$ des éléments annulés par 2 dans $\text{Br } k(x)$. Ainsi $p'^*(\mathcal{A})$ appartient à ${}_2\text{Br}_1 W \subset {}_2\text{Br } k(W)$, et la classe de \mathcal{A}_0 appartient à ${}_2\text{Br } k$.

Pour établir l'assertion (ii), il suffit de prouver que, dans chacun des cas (a) à (d), on a:

(ii') la classe de \mathcal{A}_0 est celle d'une k -algèbre de quaternions, c'est-à-dire celle d'une k -conique C . En effet les deux fibrations en coniques $\mathcal{T}_U^\alpha \rightarrow W_0$ et $C \times_k W_0 \rightarrow W_0$ ont alors des fibres génériques isomorphes.

Dans le cas (a), tout élément de ${}_2\text{Br } k$ est la classe d'une algèbre de quaternions, qui est même nulle dans le cas C_1 .

Sous l'hypothèse (b), la classe de \mathcal{A} dans $\text{Br } k(x)$ est trivialisée par passage à une extension quadratique $k(\sqrt{a})/k$. Il en est donc de même de la classe de \mathcal{A}_0 dans $\text{Br } k$. D'où (ii').

Le cas (c) résulte immédiatement du lemme suivant appliqué à l'anneau local d'un point k -rationnel de la k -variété lisse W_α :

LEMME 2.6.7. *Soit k un corps de caractéristique $\neq 2$. Soit A une k -algèbre locale régulière de corps des fractions K et de corps résiduel κ . Si un élément $\beta \in \text{Br } k$ a pour image dans $\text{Br } K$ la classe d'une conique, il en est de même de son image dans $\text{Br } \kappa$.*

Démonstration. Supposons d'abord A de valuation discrète complet. Comme toute classe d'algèbre de quaternions dans $\text{Br } K$, la restriction de β à K peut s'écrire comme un symbole $(a, b)_2$ avec $a, b \in A^*$, ou bien $a \in A^*$ et b uniformisante. Dans le premier cas, comme $\text{Br } A$ s'injecte dans $\text{Br } K$, l'image de β dans $\text{Br } A$ coïncide avec $(a, b)_2$. Par spécialisation à κ , on obtient le lemme. Dans le second cas, la classe de a dans κ^*/κ^{*2} est triviale, car c'est le résidu de l'algèbre non ramifiée $(a, b)_2 = \beta_K$. Ainsi, A étant complet, a est un carré dans A^* et la classe de $(a, b)_2$ dans $\text{Br } K$ est nulle, donc aussi celle de β dans $\text{Br } A$, puis, par spécialisation, dans $\text{Br } k$.

Le cas où A est de valuation discrète résulte du précédent par complétion. Le cas général s'obtient par récurrence. En effet, si t est un paramètre régulier de A , le corps résiduel du localisé $A_{(t)}$, qui est un anneau de valuation discrète, est le corps des fractions de la k -algèbre locale régulière A/t , qui est de dimension $\dim(A) - 1$.

Considérons le cas (d). Vu (a), on peut se limiter à k infini. Quitte à faire un automorphisme de \mathbf{P}_k^1 , on peut alors supposer que \mathcal{T}^α possède un point k -rationnel dont la projection sur \mathbf{P}_k^1 appartient, avec les notations précédentes, à U_0 , donc dont la projection M sur X appartient à $W_0(k)$. La fibration en coniques $\mathcal{T}_U^\alpha \rightarrow W_0$ est lisse, de fibre triviale en M . Par spécialisation en M , on voit donc que la classe de \mathcal{A}_0 dans $\text{Br } k$ est nulle, si bien que \mathcal{T}^α est k -birationnel à $\mathbf{P}_k^1 \times_k W_\alpha$.

Dans (e), la caractéristique de k étant nulle, on peut considérer une k -compactification lisse W_1 de W_0 . On dispose alors d'une k -application rationnelle de la k -variété lisse \mathcal{T}^α dans la k -variété propre W_1 . D'après le lemme de Nishimura ([45], [13] lemme 3.1) l'hypothèse $\mathcal{T}^\alpha(k) \neq \emptyset$ entraîne $W_1(k) \neq \emptyset$. On peut alors appliquer le lemme 2.6.7 aux données suivantes: A l'anneau local d'un k -point de W_1 , β la classe de \mathcal{A}_0 dans $\text{Br } k$ et la classe dans $\text{Br } k(W_0) = \text{Br } k(W_1)$ de la fibre générique de la fibration $\mathcal{T}_U^\alpha \rightarrow W_0$.

Il reste (iii). L'application $H^1(X, S_0) \rightarrow H^1(X, S)$ transforme, par produit contracté via (2.6.1), un torseur universel \mathcal{T} en un torseur \mathcal{T}^α de type λ et on a ainsi, d'après (2.6.1) et le théorème 90 de Hilbert, une fibration $\mathcal{T} \rightarrow \mathcal{T}^\alpha$ localement triviale de groupe $G_{m, k}$, d'où (iii).

Remarque 2.6.8. Notons qu'on peut prouver que la classe de $p'^*(\mathcal{A})$ vient de k sans passer par le lemme 2.6.1. L'argument est essentiellement dû à P. Salberger. On prouve, par un calcul de résidus sur Ω analogue à celui de la démonstration précédente, que, dans $\text{Br } \Omega$,

$$\mathcal{B}_0 := \kappa^*(\mathcal{A}) - \sum_i N_{K_i/k}(a_i, \alpha_i(u - e_i v)) \in {}_2 \text{Br}_1 \Omega = {}_2 \text{Br } k,$$

la dernière égalité résultant, d'après (1.5.0), de la nullité de $\text{Pic } \bar{\Omega}$, puis on montre (voir (2.6.14)) que dans $\text{Br } W'$:

$$q^* \left(\sum_i N_{K_i/k}(a_i, \alpha_i(u - e_i v)) \right) = 0.$$

Ainsi, $\mathcal{A}_0 := p^*(\mathcal{A}) = q^*(\mathcal{B}_0) \in {}_2 \text{Br } k$. On trouve de plus, en spécialisant en $(u, v) = (1, 0)$:

$$\mathcal{A}_0 = \mathcal{A}(\infty) - \sum_i N_{K_i/k}((a_i, \alpha_i)) \in {}_2 \text{Br } k.$$

Remarque 2.6.9. Ce théorème généralise aux surfaces fibrées en coniques quelconques sur \mathbb{P}_k^1 la description des toiseurs universels obtenue dans le cas des surfaces de Châtelet "généralisées"

$$y^2 - az^2 = P(x),$$

avec $a \in k^*$ et $P \in k[x]$ séparable de degré 4 ([27], [2]). Plus précisément, le théorème 2.6.4(ii)(b) explique la "séparation de variables" qui se produit lors des calculs explicites dans ce cas particulier ([27], (7.14) et (7.15)).

Exemple 2.6.10. C'est le cas d'une surface fibrée en coniques d'équation

$$y^2 - az^2 = P(x) \quad \text{avec } a \in k^* \text{ non carré et } P \text{ séparable de degré impair.}$$

Ce cas est traité en détail dans ([2], §2, remarques 5 et 6). L'hypothèse sur le degré de P implique que la fibre à l'infini de la fibration $X \rightarrow \mathbb{P}_k^1$ définie par x est singulière et possède en particulier un point k -rationnel. Ce cas est plus simple que le cas général; on peut en effet alors décrire directement les toiseurs universels, car il existe dans ce cas une suite exacte de g -modules

$$0 \rightarrow P_1 \rightarrow P_2 \rightarrow \text{Pic } \bar{X} \rightarrow 0,$$

où les P_i sont de permutation, coïncidant avec la suite (2.3.10). Une telle suite n'existe pas dans le cas général, comme on le voit sur l'exemple de Tsfasman (cf. [50], [40]) sur $k = \mathbb{Q}$:

$$y^2 - 221z^2 = (x^2 - 13)(x^2 - 17).$$

Pour cette surface, $H^1(\mathbf{Q}, \text{Pic } \bar{X}) = \mathbf{Z}/2$, alors que, X étant \mathbf{Q}_v -rationnelle pour chaque place v de \mathbf{Q} , on a $H^1(\mathbf{Q}_v, \text{Pic } \bar{X}) = 0$ pour toute place v , ce qui, vu le théorème de Tchebotarev, est incompatible avec l'existence d'une suite de g -modules du type ci-dessus.

Exemple 2.6.11. Si, dans le cas précédent, P admet une racine dans k , on peut donner une description encore plus simple des toseurs universels. Le cas où P est scindé sur k est traité dans ([22], §4); ce cas inclut l'exemple des surfaces de Châtelet originelles

$$y^2 - az^2 = (x - e_1)(x - e_2)(x - e_3).$$

Exemple 2.6.12. Le cas d'une surface fibrée en coniques d'équation

$$y^2 - az^2 = P_1(x) \cdots P_s(x)$$

où les P_i sont tous de degré pair et irréductibles sur $k' := k(\sqrt{a})$.

Dans ce cas, comme X est k' -rationnelle, on a considéré dans [13] et [24] des toseurs quasi-universels relativement à k'/k . On construit alors des variétés de descente intermédiaires:

$$P_i(x) = \alpha_i(u_i^2 - av_i^2) \quad \alpha_i \in k^* \text{ et } \alpha_1 \cdots \alpha_s = 1$$

par simple factorisation sur le corps de base. Cette méthode a l'avantage de fournir des variétés dont on arrive à trouver plus facilement des équations. L'exemple

$$y^2 - az^2 = P(x) \quad \text{avec } P \text{ irréductible}$$

montre les limites de cette méthode qui, en l'occurrence, ne donne rien, alors que la considération des véritables toseurs universels ou admissibles peut donner des informations supplémentaires (cf. [27]).

2.7. Accouplements avec les points rationnels. On s'intéresse ici à une k -variété algébrique X telle que $X(k) \neq \emptyset$, qui sera souvent rationnelle ou proche d'une variété rationnelle, et à la "différence" qui peut exister entre X et l'espace projectif de même dimension.

En particulier, faute de pouvoir paramétrer de façon essentiellement biunivoque les points rationnels de X , on aimerait trouver une partition de $X(k)$, indexée par $i \in I$, en classes paramétrées par des "cartes k -rationnelles," i.e. par des k -morphisms dominants

$$\Psi_i: Z_i \rightarrow X$$

où Z_i soit une variété k -rationnelle. On aimerait même en trouver une optimale, i.e. avec $\#I$ minimal.

A défaut, on aimerait au moins calculer la R -équivalence sur $X(k)$. Cette relation, introduite par Manin ([42] chap. II, §4 (= II.14)), est ainsi définie: deux points P_0 et $P_1 \in X(k)$ sont directement R -équivalents s'il existe une k -application rationnelle $\gamma: \mathbf{P}_k^1 \cdots \rightarrow X$ définie en 0 et ∞ , telle que $\gamma(0) = P_0$ et $\gamma(\infty) = P_1$, et ils sont R -équivalents s'il existe une chaîne finie de points directement R -équivalents, qui relie P_0 à P_1 .

2.7.0. Une approche de ces questions est fournie par la considération des partitions de $X(k)$ définies par les accouplements avec des toiseurs sur X sous un k -groupe algébrique de type multiplicatif S . Ces accouplements

$$(2.7.1) \quad X(k) \times H^1(X, S) \rightarrow H^1(k, S)$$

$$(P, [\mathcal{T}]) \mapsto \mathcal{T}(P) := [\mathcal{T}_P]$$

où $\mathcal{T}_P = \mathcal{T} \times_X \text{Spec } k(P)$, et où $\mathcal{T}(P)$ désigne la classe de ce toiseur dans $H^1(k(P), S)$, dérivent de la functorialité contravariante en X du groupe $H^1(X, S)$ et sont additifs à droite et fonctoriels en S . On note $q_{\mathcal{T}}: \mathcal{T} \rightarrow X$ le morphisme structural du toiseur \mathcal{T} . On a le lemme suivant, évident, mais essentiel:

LEMME 2.7.1. Avec les notations ci-dessus, les conditions suivantes, qui ne dépendent que de la classe $[\mathcal{T}]$ de \mathcal{T} dans $H^1(X, S)$ sont équivalentes:

- (i) $\mathcal{T}(P) = 0$ dans $H^1(k, S)$;
- (ii) $\mathcal{T}_P(k) \neq \emptyset$;
- (iii) P appartient à $q_{\mathcal{T}}(\mathcal{T}(k))$.

Compte tenu de ce lemme, il nous arrivera, dans l'étude des points rationnels de X , de ne pas faire la distinction entre un toiseur \mathcal{T} et sa classe $[\mathcal{T}] \in H^1(X, S)$.

La *partition* définie par un toiseur \mathcal{T} est constituée des fibres de l'application

$$\theta_{\mathcal{T}}: X(k) \rightarrow H^1(k, S)$$

qu'il définit par $\theta_{\mathcal{T}}(P) = \mathcal{T}(P)$. Pour $\alpha \in H^1(k, S)$, notons $q_{\alpha}: \mathcal{T}^{\alpha} \rightarrow X$ un toiseur de classe $[\mathcal{T}] - \alpha$ dans $H^1(X, S)$. La *partition* définie par \mathcal{T} s'écrit

$$(2.7.2) \quad X(k) = \bigcup_{\alpha \in \text{im } \theta_{\mathcal{T}}} q_{\alpha}(\mathcal{T}^{\alpha}(k)).$$

L'ensemble $\text{Tors}(X, S)$ des classes de toiseurs sur X sous un S donné définit une partition, a priori plus fine, formée des fibres de l'application

$$X(k) \rightarrow \text{Hom}(H^1(X, S), H^1(k, S))$$

$$P \rightarrow ([\mathcal{T}] \mapsto \mathcal{T}(P)).$$

Comme on le voit ci-après, si X est propre sur k , ces partitions sont a priori plus grossières que celle de la R -équivalence, mais, dans certains cas, il y a coïncidence, ce qui donne alors un excellent moyen d'étude de la R -équivalence. D'autre part, si X est propre et lisse sur k de caractéristique 0, et si l'une de ces partitions est non triviale, X ne peut être k -rationnelle ([20] proposition 10), ce qui donne parfois un test très commode et calculatoire de non- k -rationalité.

PROPOSITION 2.7.2. *Si X est une k -variété algébrique propre et S un k -groupe de type multiplicatif, l'accouplement (2.7.1) passe au quotient par la R -équivalence:*

$$(X(k)/R) \times H^1(X, S) \rightarrow H^1(k, S).$$

Autrement dit, l'équivalence définie par les toiseurs sous S est plus grossière que la R -équivalence. Pour le démontrer, il suffit de considérer deux points P_0 et $P_1 \in X(k)$ directement R -équivalents, ce qui, par functorialité en X , X étant propre, revient à traiter le cas $X = \mathbf{P}_k^1$. Il suffit même de savoir traiter le cas, non propre, $X = \mathbf{A}_k^1$. Or, le théorème 1.5.1 et la proposition 1.4.3 montrent que, si Y est une k -variété qui vérifie

$$(2.7.3) \quad \bar{k}[Y]^* = \bar{k}^* \quad \text{et} \quad \text{Pic } \bar{Y} = 0,$$

ce qui est le cas pour \mathbf{A}_k^1 , alors

$$H^1(k, S) = H^1(Y, S),$$

ce qui achève la preuve.

THÉORÈME 2.7.3. *Soient X une k -variété algébrique propre et \mathcal{T} un toiseur sur X sous un k -groupe de type multiplicatif S . Si k est de type fini sur le corps premier, l'image de l'application*

$$X(k) \xrightarrow{\mathcal{T}} H^1(k, S)$$

$$P \mapsto \mathcal{T}(P),$$

est finie.

Autrement dit, la partition de $X(k)$ définie par le toiseur \mathcal{T} est finie. La démonstration donnée dans ([22], proposition 2) dans le cas où S est un tore vaut aussi bien pour S de type multiplicatif.

Si X est une k -variété algébrique propre géométriquement intègre telle que $X(k) \neq \emptyset$, le début de la suite exacte (2.0.2) forme une suite exacte dont tout point $P \in X(k)$ définit un scindage:

$$(2.2.5) \quad 0 \rightarrow H^1(k, S) \rightarrow H^1(X, S) \rightarrow \text{Hom}_g(\hat{S}, \text{Pic } \bar{X}) \rightarrow 0.$$

On en déduit que deux torseurs de même type λ diffèrent par un élément de $H^1(k, S)$ et définissent donc la même partition de $X(k)$. Parmi toutes les partitions de $X(k)$ ainsi définies—toutes plus grossières que la R -équivalence—celle définie par un torseur universel, lorsqu'il y en a, est la plus fine:

PROPOSITION 2.7.4. *Soit X une k -variété algébrique propre et géométriquement intègre. On suppose $X(k) \neq \emptyset$ et le \mathfrak{g} -module $\text{Pic } \bar{X}$ de type fini. La relation d'équivalence définie sur $X(k)$ par un torseur universel est plus fine que celle définie par tout autre torseur sous un k -groupe de type multiplicatif.*

Démonstration. Les hypothèses entraînent l'existence de torseurs universels et leur groupe structural S_0 est un k -groupe de type multiplicatif. Deux torseurs d'un même type

$$\lambda: \hat{S} \rightarrow \text{Pic } \bar{X},$$

par exemple deux torseurs universels, définissent la même partition de $X(k)$. Soit $P \in X(k)$. Soient \mathcal{T}_0^P le torseur universel de fibre triviale en P , et \mathcal{T}^P le torseur de type λ , de fibre triviale en P . Soit $D(\lambda)$ le k -morphisme $S_0 \rightarrow S$ dual de λ . Il induit une application $H^1(X, S_0) \rightarrow H^1(X, S)$ qui, par fonctorialité des scindages des suites (2.2.5) définis par P , envoie \mathcal{T}_0^P sur \mathcal{T}^P . L'application composée

$$X(k) \xrightarrow{\mathcal{T}_0^P} H^1(k, S_0) \xrightarrow{D(\lambda)} H^1(k, S)$$

est donc l'application définie par \mathcal{T}^P , ce qui prouve la proposition.

PROPOSITION 2.7.5. *Soit X une k -variété algébrique intègre de corps des fonctions $k(X)$, et soit S un k -groupe de type multiplicatif. Soit $[\mathcal{T}] \in H^1(X, S)$ la classe d'un torseur sur X sous S . Si $P \in X(k)$ est lisse, la fibre $\mathcal{T}(P) = [\mathcal{T}_P] \in H^1(k, S)$ de \mathcal{T} en P ne dépend que de l'image de \mathcal{T} dans $H^1(k(X), S)$.*

Démonstration. Soit $\mathcal{O}_{X, P}$ l'anneau local de X en P . L'application $H^1(X, S) \rightarrow H^1(k(X), S)$ se factorise en

$$H^1(X, S) \rightarrow H^1(\mathcal{O}_{X, P}, S) \rightarrow H^1(k(X), S).$$

La fibre $\mathcal{T}(P)$ de \mathcal{T} en P ne dépend évidemment que de l'image de \mathcal{T} dans $H^1(\mathcal{O}_{X, P}, S)$. Pour établir la proposition, il suffit de montrer que, $\mathcal{O}_{X, P}$ étant régulier, donc géométriquement localement factoriel, l'application $H^1(\mathcal{O}_{X, P}, S) \rightarrow H^1(k(X), S)$ est injective (voir aussi [21] et [26] §4). Par passage à la limite dans le diagramme (1.6.2), ceci se ramène à établir l'injectivité de l'application.

$$\text{Ext}_{\mathfrak{g}}^1(\hat{S}, \mathcal{O}_{\bar{X}, P}^*) \rightarrow \text{Ext}_{\mathfrak{g}}^1(\hat{S}, \bar{k}(X)^*).$$

Or l'extension de \mathfrak{g} -modules $1 \rightarrow \mathcal{O}_{\bar{X}, P}^* \rightarrow \bar{k}(X)^* \rightarrow \text{Div}_{\{P\}} \bar{X} \rightarrow 0$ est scindée, car $\text{Div}_{\{P\}} \bar{X}$ étant un \mathfrak{g} -module de permutation, le théorème 90 de Hilbert implique

$$\text{Ext}_{\mathfrak{g}}^1(\text{Div}_{\{P\}} \bar{X}, \mathcal{O}_{\bar{X}, P}^*) = 0.$$

On déduit de cette proposition une version “fonctionnelle” et “calculatoire” de l'accouplement de $X(k)$ avec $H^1(X, S)$ en introduisant, sous les hypothèses de 2.7.5, le groupe

$$(2.7.4) \quad D^S(X) := \text{im}(H^1(X, S) \rightarrow H^1(k(X), S)).$$

La proposition assure l'existence, pour X géométriquement intègre et lisse, d'un accouplement

$$(2.7.5) \quad X(k) \times D^S(X) \rightarrow H^1(k, S),$$

induit par (2.7.1), linéaire à droite. Le lemme qui suit “calcule” $D^S(X)$ de façon “fonctionnelle”:

LEMME 2.7.6. *Si X est une k -variété algébrique géométriquement intègre et S un k -groupe de type multiplicatif,*

$$D^S(X) = \ker(\text{Ext}_{\mathfrak{g}}^1(\hat{S}, \bar{k}(X)^*) \rightarrow \text{Ext}_{\mathfrak{g}}^1(\hat{S}, \text{Div } \bar{X})).$$

Démonstration. D'après la proposition 1.4.3, le morphisme naturel $H^1(X, S) \rightarrow H^1(k(X), S)$ s'écrit encore

$$\text{Ext}_{X_{\text{ét}}}^1(\hat{S}, \mathbf{G}_{m, X}) \rightarrow \text{Ext}_{\eta_{\text{ét}}}^1(\hat{S}, \mathbf{G}_{m, \eta})$$

où η désigne le point générique de X . L'edge de la suite spectrale de Leray pour le morphisme $i: \eta \rightarrow X$ donne une injection

$$\text{Ext}_{X_{\text{ét}}}^1(\hat{S}, i_* \mathbf{G}_{m, \eta}) \rightarrow \text{Ext}_{\eta_{\text{ét}}}^1(\hat{S}, \mathbf{G}_{m, \eta}),$$

si bien que $D^S(X)$ est encore l'image de l'application naturelle

$$\text{Ext}_{X_{\text{ét}}}^1(\hat{S}, \mathbf{G}_{m, X}) \rightarrow \text{Ext}_{X_{\text{ét}}}^1(\hat{S}, i_* \mathbf{G}_{m, \eta}).$$

La suite exacte de faisceaux étales sur X

$$1 \rightarrow \mathbf{G}_{m, X} \rightarrow i_* \mathbf{G}_{m, \eta} \rightarrow \mathcal{D}iv_X \rightarrow 0,$$

qui définit le faisceau étale $\mathcal{D}iv_X$, identifie donc $D^S(X)$ au noyau de

$$\text{Ext}_{X_{\text{ét}}}^1(\hat{S}, i_* \mathbf{G}_{m, \eta}) \rightarrow \text{Ext}_{X_{\text{ét}}}^1(\hat{S}, \mathcal{D}iv_X).$$

Soit alors $p: X \rightarrow \text{Spec } k$ le morphisme structural. L'edge de la suite spectrale

$$\text{Ext}_{k_{\text{ét}}}^p(\hat{S}, R^q p_* \mathcal{G}) \Rightarrow \text{Ext}_{k_{\text{ét}}}^{p+q}(p^* \hat{S}, \mathcal{G}),$$

où \mathcal{G} est un faisceau étale sur X , donne, pour $\mathcal{G} = i_* \mathbf{G}_{m, \eta}$ et $\mathcal{G} = \mathcal{D}iv_X$, le carré commutatif

$$\begin{array}{ccc} \text{Ext}_{k_{\text{ét}}}^1(\hat{S}, p_* i_* \mathbf{G}_{m, \eta}) & \xrightarrow{\delta} & \text{Ext}_{k_{\text{ét}}}^1(\hat{S}, p_* \mathcal{D}iv_X) \\ \cong \downarrow & & \downarrow \\ \text{Ext}_{X_{\text{ét}}}^1(\hat{S}, i_* \mathbf{G}_{m, \eta}) & \longrightarrow & \text{Ext}_{X_{\text{ét}}}^1(\hat{S}, \mathcal{D}iv_X), \end{array}$$

dont la verticale de droite est injective—c'est un edge i_1 —et dont la verticale de gauche est un isomorphisme parce que $R^1 p_*(i_* \mathbf{G}_{m, \eta}) = 0$, par application du théorème 90 de Hilbert. Finalement, $D^S(X) = \ker(\delta)$. La suite exacte définissant $\mathcal{D}iv_X$ restant exacte par restriction à X_{Zar} puisque $H^1(A, \mathbf{G}_m) = \text{Pic } A = 0$ pour un anneau local A , le faisceau $p_* \mathcal{D}iv_X$ s'identifie au module galoisien $\text{Div } \bar{X}$, ce qui achève la démonstration.

Remarque 2.7.7. Si S est déployé par une extension galoisienne K/k , on peut remplacer dans le lemme \bar{k}/k par K/k , puis $\mathfrak{g} = \text{Gal}(\bar{k}/k)$ par $G = \text{Gal}(K/k)$, et $\bar{k}(X)$ par $K(X)$, enfin $\text{Div } \bar{X}$ par $\text{Div } X_K$.

Exemples 2.7.8.

(a) $S = \mu_{n, k}$ pour n entier > 0 . On trouve

$$D^S(X) = \ker(k(X)^*/k(X)^{*n} \rightarrow \text{Div}(X)/n),$$

i.e. le groupe des fonctions rationnelles, dont le diviseur est un multiple de n , modulo celles qui sont des puissances n -ièmes. Ce groupe apparaît naturellement dans l'étude des isogénies de courbes elliptiques.

(b) $S = R_{K/k}^1 \mathbf{G}_m$ pour K/k une extension de corps, séparable et finie. On trouve

$$D^S(X) = \ker(k(X)^*/N_{K/k} K(X)^* \rightarrow \text{Div}(X)/N_{K/k}(\text{Div } X_K)),$$

i.e. le groupe des fonctions rationnelles, dont le diviseur est une norme d'un diviseur de X_K , modulo celles qui sont des normes de $K(X)^*$.

(c) $S = R_{K/k} \mathbf{G}_m / \mathbf{G}_{m, k}$ pour K/k une extension finie de corps, galoisienne de groupe G . On trouve

$$D^S(X) = \ker(H^2(G, K(X)^*) \rightarrow H^2(G, \text{Div}(X_K))),$$

qui n'est autre que le groupe $\text{Br}(X, K)$ considéré par Manin dans ([42], VI 1.3

(= VI 41.3)). Pour X lisse sur k ,

$$\mathrm{Br}(X, K) = \ker(\mathrm{Br} X \rightarrow \mathrm{Br} X_K)$$

(cf. [20], lemme 14, p. 213).

Exemples 2.7.9. Nous allons expliciter, pour X/k lisse, l'accouplement (2.7.5) dans chacun des exemples 2.7.8. La méthode de calcul utilise la proposition 2.7.5 et le lemme 2.7.6.

(a) L'accouplement

$$X(k) \times D^S(X) \rightarrow k^*/k^{**}$$

s'obtient ainsi: soient $P \in X(k)$ et $\alpha \in D^S(X) = \ker(k(X)^*/n \rightarrow \mathrm{Div}(X)/n)$, représenté par $f \in k(X)^*$, il existe $g \in \mathcal{O}_{X,P}^*$ telle que $g/f \in k(X)^{**}$, et alors $\langle P, \alpha \rangle = \mathrm{cl}(g(P)) \in k^*/k^{**}$.

(b) L'accouplement

$$X(k) \times D^S(X) \rightarrow k^*/N(K^*)$$

s'obtient ainsi: soient $P \in X(k)$ et $\alpha \in D^S(X) = \ker(k(X)^*/N(K(X)^*) \rightarrow \mathrm{Div}(X)/N(\mathrm{Div} X_K))$, représenté par $f \in k(X)^*$, il existe $g \in \mathcal{O}_{X,P}^*$ telle que $g/f \in N(K(X)^*)$, et alors $\langle P, \alpha \rangle = \mathrm{cl}(g(P)) \in k^*/N(K^*)$.

(c) L'accouplement

$$X(k) \times D^S(X) \rightarrow \mathrm{Br}(k, K) = \ker(\mathrm{Br} k \rightarrow \mathrm{Br} K)$$

s'obtient ainsi: soient $P \in X(k)$ et $\alpha \in D^S(X) = \ker(H^2(G, K(X)^*) \rightarrow H^2(G, \mathrm{Div} X_K))$; on peut représenter α par un 2-cocycle a de G à valeurs dans $\mathcal{O}_{X_K, P}^*$, et $\langle P, \alpha \rangle$ est alors la classe dans $\mathrm{Br}(k, K)$ de $a(P)$. On retrouve ainsi l'accouplement avec des algèbres d'Azumaya considéré par Manin ([42] VI 1.7 et 1.8 (= VI 41.7 et 41.8)). Ceux-ci apparaissent donc comme des cas particuliers d'accouplements définis par des torseurs sous des tores.

(d) Pour d'autres calculs explicites, faisant intervenir d'autres groupes S , voir par exemple [50], §3, et, pour le cas des surfaces de Châtelet d'équation $y^2 - az^2 = (x - e_1)(x - e_2)(x - e_3)$, [22] (§IV), et [30] (proposition 4.7).

La proposition suivante sera utilisée de façon cruciale au §3 dans la démonstration du théorème 3.5.1.

PROPOSITION 2.7.10. *Soit X une k -variété algébrique, lisse et géométriquement intègre, telle que*

$$\bar{k}[X]^* = \bar{k}^*.$$

Soit σ une \mathfrak{g} -rétraction de la flèche naturelle $\bar{k}^ \rightarrow \bar{k}(X)^*$. Soit S un k -groupe de type multiplicatif. Soit \mathcal{T}^σ le torseur sur X sous S , de type λ , trivial "en σ ". Soit*

enfin

$$t_\sigma: H^1(\mathfrak{g}, \text{Pic } \bar{X}) \rightarrow \text{Br}_1 X$$

la section de la flèche naturelle, définie par σ . Le diagramme suivant est commutatif, au signe près:

$$\begin{array}{ccccc}
 P & X(k) & \times & \text{Br}_1 X & \\
 \downarrow & \downarrow \mathcal{T}^\sigma & & \uparrow t_\sigma & \searrow \text{ev} \\
 \mathcal{T}^\sigma(P) & H^1(k, S) & \times & H^1(\mathfrak{g}, \text{Pic } \bar{X}) & \rightarrow \text{Br } k. \\
 & & & \uparrow \lambda & \nearrow \text{cup-produit} \\
 & & & H^1(k, \hat{S}) &
 \end{array}$$

Démonstration. Par définition, l'existence d'une \mathfrak{g} -rétraction σ signifie que l'obstruction élémentaire est nulle. On sait en outre, d'après la proposition 2.2.8(iv)—voir aussi 2.3.4—que σ définit un torseur \mathcal{T}^σ de type λ , trivial “en σ ,” et un seul dans $H^1(X, S)$. Dans le diagramme commutatif suivant, les verticales sont des suites exactes naturelles: l'exactitude de celle de droite résulte de $H^1(\mathfrak{g}, \text{Div } \bar{X}) = 0$ (lissité de X et lemme de Shapiro), pour celle du milieu voir 1.5.0:

$$\begin{array}{ccccccc}
 & & 0 & & 0 & & \\
 & & \downarrow & & \downarrow & & \\
 0 & \longrightarrow & \text{Br } k & \longrightarrow & \text{Br}_1 X & \longrightarrow & H^1(\mathfrak{g}, \text{Pic } \bar{X}) \longrightarrow 0 \\
 & & \parallel & & \downarrow & & \downarrow \\
 0 & \longrightarrow & H^2(\mathfrak{g}, \bar{k}^*) & \longrightarrow & H^2(\mathfrak{g}, \bar{k}(X)^*) & \longrightarrow & H^2(\mathfrak{g}, \bar{k}(X)^*/\bar{k}^*) \longrightarrow 0 \\
 & & & & \downarrow & & \downarrow \\
 & & & & H^2(\mathfrak{g}, \text{Div } \bar{X}) & \equiv & H^2(\mathfrak{g}, \text{Div } \bar{X}).
 \end{array}$$

La nullité de l'obstruction élémentaire assure que, dans ce diagramme, dont la première ligne est extraite de (1.5.0), la deuxième suite exacte horizontale est scindée par σ , ce qui induit la rétraction t_σ et établit l'exactitude de la première.

Soit $P \in X(k)$. La flèche $\text{Br}_1 X \rightarrow H^2(\mathfrak{g}, \bar{k}(X)^*)$ se factorise par $H^2(\mathfrak{g}, \mathcal{O}_{\bar{X}, P}^*)$, et l'évaluation $\text{ev}_P: \text{Br}_1 X \rightarrow \text{Br } k$ en P est induite par l'évaluation $\text{ev}_P: H^2(\mathfrak{g}, \mathcal{O}_{\bar{X}, P}^*) \rightarrow H^2(\mathfrak{g}, \bar{k}^*)$.

Considérons l'extension naturelle de \mathfrak{g} -modules

$$1 \rightarrow \mathcal{O}_{\bar{X}, P}^*/\bar{k}^* \rightarrow \text{Div}_{\bar{X} - \{P\}} \bar{X} \rightarrow \text{Pic } \bar{X} \rightarrow 0,$$

et celle qui s'en déduit en poussant par la section $\mathcal{O}_{\bar{X}, P}^*/\bar{k}^* \rightarrow \mathcal{O}_{\bar{X}, P}^*$ définie par σ et en prenant le pull-back par $\lambda: \hat{S} \rightarrow \text{Pic } \bar{X}$, soit:

$$1 \rightarrow \mathcal{O}_{\bar{X}, P}^* \rightarrow E \rightarrow \hat{S} \rightarrow 0.$$

En passant à la limite sur les ouverts U contenant P dans le diagramme (1.6.2) et dans le lemme 1.6.4, on vérifie sans peine que la restriction de \mathcal{F}^σ à $\text{Spec } \mathcal{O}_{X, P}$, qui appartient à $H^1(\mathcal{O}_{X, P}, \mathcal{S}) = \text{Ext}_{\mathfrak{g}}^1(\hat{S}, \mathcal{O}_{\bar{X}, P}^*)$ s'interprète, au signe près, comme l'extension E ci-dessus. La valeur $\mathcal{F}^\sigma(P)$ de \mathcal{F}^σ en P appartient à $H^1(k, \mathcal{S}) = \text{Ext}_{\mathfrak{g}}^1(\hat{S}, \bar{k}^*)$ et s'obtient donc, en tant qu'extension, en poussant l'extension E par l'évaluation ev_P en $P: \mathcal{O}_{\bar{X}, P}^* \rightarrow \bar{k}^*$. On a ainsi le diagramme commutatif

$$\begin{array}{ccccccc} 1 & \rightarrow & \mathcal{O}_{\bar{X}, P}^* & \rightarrow & E_0 & \rightarrow & \text{Pic } \bar{X} \rightarrow 0 \\ & & \parallel & & \uparrow & & \uparrow \lambda \\ 1 & \rightarrow & \mathcal{O}_{\bar{X}, P}^* & \rightarrow & E & \rightarrow & \hat{S} \rightarrow 0 \\ & & \downarrow & & \downarrow & & \parallel \\ 1 & \rightarrow & \bar{k}^* & \rightarrow & E_P & \rightarrow & \hat{S} \rightarrow 0, \end{array}$$

et, étant donné $\beta \in H^1(k, \hat{S})$, le cup-produit $\mathcal{F}^\sigma(P) \cup \beta$ coïncide au signe près, d'après la définition du cup-produit à la Yoneda, avec $\partial_{E_P}(\beta)$, donc aussi avec l'image de β par l'application composée:

$$H^1(k, \hat{S}) \rightarrow H^1(\mathfrak{g}, \text{Pic } \bar{X}) \xrightarrow{\partial_{E_0}} H^2(\mathfrak{g}, \mathcal{O}_{\bar{X}, P}^*) \xrightarrow{\text{ev}_P} H^2(\mathfrak{g}, \bar{k}^*).$$

Or, par définition même de t_σ , on a le diagramme commutatif:

$$\begin{array}{ccc} H^1(\mathfrak{g}, \text{Pic } \bar{X}) & \xrightarrow{t_\sigma} & \text{Br}_1 X \\ \downarrow \partial_0 & & \downarrow \\ H^2(\mathfrak{g}, \mathcal{O}_{\bar{X}, P}^*/\bar{k}^*) & \xrightarrow{\sigma} & H^2(\mathfrak{g}, \mathcal{O}_{\bar{X}, P}^*). \end{array}$$

D'où, finalement, en utilisant $\sigma\partial_0 = \partial_{E_0}$, les égalités:

$$(t_\sigma\lambda(\beta))(P) = (\sigma(\partial_0(\lambda(\beta)))(P) = \text{ev}_P(\partial_{E_0}(\lambda(\beta))) = \mathcal{F}^\sigma(P) \cup \beta,$$

ce qui achève la démonstration.

Remarque 2.7.11. Il est facile de déduire de ce qui précède les résultats suivants pour une k -variété algébrique X , lisse et géométriquement intègre, telle

que $X(k) \neq \emptyset$:

(i) l'équivalence de Brauer sur $X(k)$ définie par $\text{Br}_1 X$ est moins fine que celle définie par les accouplements avec les toseurs sur X sous les k -tores (utiliser 2.7.5, 2.7.6 et 2.7.8(c));

(ii) si $\bar{k}[X]^* = \bar{k}^*$ et si $\text{Pic } \bar{X}$ est un groupe abélien de type fini, l'équivalence de Brauer associée à $\text{Br}_1 X$ est moins fine que celle définie par un toseur universel (résulte de (i) et de 2.7.4);

(iii) sous les hypothèses de (ii), si, en outre, k est un corps p -adique, l'équivalence de Brauer et celle définie par un toseur universel coïncident.

On doit cependant noter que ce dernier résultat (iii), qui résulte du fait que, pour k p -adique, le cup-produit

$$H^1(k, S_0) \times H^1(k, \hat{S}_0) \rightarrow \text{Br}(k) = \mathbb{Q}/\mathbb{Z}$$

est une dualité parfaite de groupes finis ([52] II.40) et de la compatibilité établie dans la proposition précédente, n'est plus vrai en général. On trouvera dans [20], proposition 21, p. 224, et dans [50] V.2.c, des exemples de k -variétés rationnelles X propres et lisses pour lesquelles l'équivalence de Brauer sur $X(k)$ est triviale, alors que celle définie par un toseur universel ne l'est pas.

Il se trouve que dans le cas d'un modèle projectif et lisse X de la k -surface d'équation affine

$$y^2 - az^2 = P(x),$$

où $P \in k[x]$ est un polynôme *scindé* sur k , ou dans le cas de la surface cubique X d'équation homogène

$$x^3 + y^3 + z^3 + at^3 = 0, \quad \sqrt[3]{1} \in k,$$

l'équivalence de Brauer et celle définie par un toseur universel coïncident, cela étant dû au fait que dans ces cas S_0 est, à des facteurs quasi-triviaux près, un produit de k -tores $R_{K/k}^1 \mathbb{G}_m$ pour K/k cyclique, auquel cas $R_{K/k}^1 \mathbb{G}_m \cong R_{K/k} \mathbb{G}_m / \mathbb{G}_{m,k}$, ce qui ramène à l'équivalence de Brauer (cf. 2.7.8(c)). C'est le cas en particulier pour les surfaces de Châtelet d'équation affine

$$y^2 - az^2 = (x - e_1)(x - e_2)(x - e_3),$$

ce qui explique le rôle particulier que joue dans ce cas-là l'équivalence de Brauer, comme introduite et utilisée par Manin ([42] chap. VI). Mais dans beaucoup d'autres situations, l'équivalence de Brauer est trop grossière et celle définie par un toseur universel peut alors la remplacer de façon utile (cf. [20], [40], [50]).

2.8. La première hypothèse sur les toseurs universels. Soit X une k -variété rationnelle propre et lisse définie sur un corps k de caractéristique zéro, de clôture algébrique \bar{k} . On note $\mathfrak{g} = \text{Gal}(\bar{k}/k)$ et S_0 le k -tore dual du \mathfrak{g} -module

\mathbb{Z} -libre de type fini $\text{Pic } \bar{X}$ (voir appendice 2.A). Dans ce paragraphe, nous discutons l'hypothèse suivante et ses conséquences:

(H1) *Les toorseurs universels \mathcal{T} sur X qui possèdent un point k -rationnel sont des variétés k -rationnelles.*

Il y a aussi intérêt à considérer l'hypothèse plus faible:

(H1') *Les toorseurs universels \mathcal{T} sur X qui possèdent un point k -rationnel sont des variétés stablement k -rationnelles (i.e. qui deviennent k -rationnelles après multiplication avec un k -espace projectif convenable).*

De fait, il est également utile de considérer les hypothèses analogues pour les toorseurs d'autres types $\lambda \in \text{Hom}_{\mathfrak{g}}(\hat{S}, \text{Pic } \bar{X})$ pour S un k -tore quelconque.

(H1) $_{\lambda}$ *Les toorseurs \mathcal{T} sur X de type λ qui possèdent un point k -rationnel sont des variétés k -rationnelles.*

(H1') $_{\lambda}$ *Les toorseurs \mathcal{T} sur X de type λ qui possèdent un point k -rationnel sont des variétés stablement k -rationnelles.*

Notons que \mathcal{T} est une k -variété rationnelle: ceci résulte du fait que c'est un toorseur sous un k -tore sur une k -variété rationnelle: sur \bar{k} , $\bar{\mathcal{T}}$ est un toorseur sur \bar{X} sous un tore \mathbb{G}_m^n , donc localement trivial et $\bar{\mathcal{T}}$ est \bar{k} -birationnellement équivalent au produit de \bar{X} et de \mathbb{G}_m^n .

L'hypothèse (H1) est motivée par le théorème 2.1.2(a), qui assure que, pour toute k -compactification lisse \mathcal{T}^c de \mathcal{T} , le \mathfrak{g} -module $\text{Pic } \bar{\mathcal{T}}^c$ est de permutation. Ainsi l'obstruction à la k -rationalité décrite dans l'appendice 2.A disparaît-elle sur la k -variété rationnelle \mathcal{T}^c . Il en est de même pour les toorseurs admissibles.

Dans les énoncés conditionnels ci-après, on fait les hypothèses (H1) $_{\lambda}$ ou (H1') $_{\lambda}$. Mais c'est seulement pour les toorseurs universels, ou pour les toorseurs admissibles, que le théorème 2.1.2(a) donne quelque espoir de validité pour (H1) $_{\lambda}$ ou (H1') $_{\lambda}$. Même pour ces toorseurs, ces hypothèses ne valent pas en général (voir 2.8.18 ci-après) mais on ne connaît pas de contre-exemple lorsque X est une k -surface rationnelle projective et lisse.

L'hypothèse (H1) a été vérifiée lorsque X est une surface de Châtelet généralisée [27] ou une surface fibrée en coniques avec 4 fibres géométriques dégénérées [28], c'est-à-dire que (H1) vaut pour les surfaces rationnelles non-triviales les plus simples (du point de vue de la classification d'Enriques-Manin-Iskovskih, cf. [43] §3). Cette hypothèse vaut aussi pour X une k -compactification lisse d'un k -tore ([20]; [22], §III). Il n'est donc pas déraisonnable de décrire des conséquences concrètes de (H1) et (H1').

PROPOSITION 2.8.1. *Si X vérifie (H1') $_{\lambda}$, et si $X(k)$ est non vide, X est k -unirationnelle et $X(k)$ est Zariski-dense dans X .*

Démonstration. Il existe alors un torseur \mathcal{T} de type λ sur X , de fibre triviale en un k -point M de X , donc tel que $\mathcal{T}(k)$ soit non vide (lemme 2.7.1).

Remarque 2.8.2. La première de ces conséquences impliquerait que toute variété algébrique complexe de dimension trois fibrée en coniques sur le plan projectif complexe est unirrationnelle, ce qui est un problème ouvert bien connu. La seconde de ces conséquences, plus faible, est inconnue déjà pour des surfaces rationnelles très simples sur \mathbb{Q} (voir [24], où dans certains cas l'on déduit cette conséquence d'une hypothèse bien connue en théorie des nombres). La k -unirationalité a récemment été établie par Yančevskiĭ [56] dans le cas où X est une surface fibrée en coniques sur la droite projective sur un corps k p -adique (le cas $k = \mathbb{R}$ avait été obtenu par Iskovskih).

PROPOSITION 2.8.3. *Si X vérifie (H1') et $X(k) \neq \emptyset$, et si le \mathfrak{g} -module $\text{Pic } \bar{X}$ est stablement de permutation, resp. est facteur direct d'un module de permutation, la k -variété X est stablement k -rationnelle, resp. est facteur direct k -birational d'une k -variété k -rationnelle.*

Démonstration. Il existe un k -tore quasi-trivial S_1 , resp. un k -tore S_1 , tel que le k -tore $S_2 = S_0 \times_k S_1$ soit quasi-trivial. Le théorème 90 de Hilbert sous la forme de Grothendieck implique qu'alors tout torseur sous S_0 est localement trivial pour la topologie de Zariski. Si donc \mathcal{T} est un torseur universel sur X , la k -variété \mathcal{T} est k -birationnelle au produit $X \times_k S_0$. Sous (H1'), ceci suffit à conclure que X est facteur direct k -birational d'une variété k -rationnelle. Par ailleurs $\mathcal{T} \times_k S_1$ est k -birational à $X \times_k S_2$. Si S_1 et S_2 sont quasi-triviaux, ce qui implique que ce sont des variétés k -rationnelles, (H1') implique que la k -variété X est stablement k -rationnelle.

Remarque 2.8.4. La réciproque de cette proposition résulte de l'appendice 2.A et de [20] lemme 11, p. 188.

PROPOSITION 2.8.5. *Si X vérifie l'hypothèse (H1) $_\lambda$, chaque classe pour la R -équivalence sur $X(k)$ est paramétrée par les k -points k -rationnels d'une k -variété lisse k -rationnelle, qu'on peut supposer propre.*

Démonstration. Soit M dans $X(k)$, et soit \mathcal{T} le torseur de type λ sur X de fibre triviale en M . D'après la proposition 2.7.2, la fibre de \mathcal{T} en tout point N de $X(k)$ qui est R -équivalent à M est triviale. Ainsi l'image de la projection naturelle $\mathcal{T}(k) \rightarrow X(k)$ contient la classe pour la R -équivalence de M . Montrons que cette image coïncide avec la classe de M pour la R -équivalence. Tout d'abord il existe une k -compactification lisse \mathcal{T}^c de \mathcal{T} telle que la projection $q: \mathcal{T} \rightarrow X$ se prolonge en un k -morphisme propre $q^c: \mathcal{T}^c \rightarrow X$; comme la caractéristique de k est nulle, ceci résulte du théorème d'Hironaka, mais cela résulte déjà, en toute caractéristique, de l'existence, due à Brylinski [5], de k -compactifications toriques lisses S^c d'un k -tore S , ce qui permet, par produit contracté, de compactifier q dans ses fibres. Si (H1) $_\lambda$ vaut, la k -variété \mathcal{T}^c est k -rationnelle. Il résulte alors de l'hypothèse $\text{car}(k) = 0$ et du théorème d'Hironaka

(voir [20], prop. 10 p. 195) que deux points quelconques de $\mathcal{T}^c(k)$ sont R -équivalents, et donc que leurs projections par q^c sur X sont deux points R -équivalents de $X(k)$. Ceci établit que la R -classe de M sur $X(k)$ coïncide avec $q(\mathcal{T}(k))$ d'une part, avec $q^c(\mathcal{T}^c(k))$ d'autre part.

Remarque 2.8.6. Dans la proposition 2.8.5 ci-dessus, l'hypothèse $\text{car}(k) = 0$ sert uniquement pour assurer que les points d'une R -classe sont *exactement* paramétrés par les k -points d'une k -variété k -rationnelle (que sous $(H1)_\lambda$ les k -points d'une R -classe proviennent tous des k -points d'une k -variété k -rationnelle est clair; ce qui ne l'est pas, c'est que si Y est une k -variété lisse k -rationnelle ouverte, et si $f: Y \rightarrow X$ est un k -morphisme vers une k -variété propre, alors $f(Y(k))$ est constitué de points R -équivalents).

PROPOSITION 2.8.7. *Le même énoncé vaut sous l'hypothèse $(H1')_\lambda$.*

Démonstration. Soit n un entier tel que la k -variété propre et lisse $Y = \mathcal{T}^c \times_k \mathbf{P}_k^n$ soit k -rationnelle. On considère alors la projection composée $r: Y \rightarrow \mathcal{T}^c \rightarrow X$. Il est clair que la R -classe de M , qui est contenue dans l'image de $\mathcal{T}^c(k)$ (voir ci-dessus), est contenue dans l'image de $Y(k)$. Par ailleurs tous les points de $Y(k)$ sont R -équivalents sur Y (même argument que dans la proposition 2.8.5), et donc l'image de $Y(k)$ par r est formée de points R -équivalents sur X .

Remarque 2.8.8. Cette démonstration montre que sous $(H1')_\lambda$ il est encore vrai que chaque classe pour la R -équivalence coïncide avec l'image $q(\mathcal{T}(k))$ des k -points d'un k -torseur convenable \mathcal{T} de type λ par la projection structurale $q: \mathcal{T} \rightarrow X$.

Remarque 2.8.9. Cette démonstration permet de renforcer la proposition 2.8.1: sous $(H1')_\lambda$, toute R -classe sur $X(k)$ est Zariski-dense dans X .

PROPOSITION 2.8.10. *Si X vérifie $(H1')_\lambda$ et \mathcal{T} est un toseur de type λ sur X , l'application de $X(k)$ dans $H^1(k, S)$ qui à un k -point M associe la fibre de \mathcal{T} en M induit une injection*

$$i: X(k)/R \rightarrow H^1(k, S).$$

Démonstration. Nous avons déjà vu (proposition 2.7.2) que l'application fibre induit une application $i: X(k)/R \rightarrow H^1(k, S)$. Si deux k -points de X ont même image par cette application, il existe un toseur de type λ sur X de fibre triviale en chacun de ces k -points. On conclut alors comme dans la proposition précédente.

PROPOSITION 2.8.11. *Sous chacune des conditions suivantes, la R -équivalence sur $X(k)$ est triviale:*

- (i) X vérifie $(H1')$ et $\text{Pic } \bar{X}$ est un facteur direct d'un \mathfrak{g} -module de permutation;
- (ii) X vérifie $(H1')_\lambda$ et la dimension cohomologique cd k de k est au plus 1.

Démonstration. Dans le premier cas, il existe un k -tore S_1 tel que le produit $S_0 \times_k S_1$ soit un tore quasi-trivial. Il résulte donc du théorème 90 de Hilbert et du lemme de Shapiro que le groupe $H^1(k, S_0)$ est nul, ce qui implique (i) d'après

la proposition 2.8.10. Dans le cas (ii), pour tout k -tore S , le groupe $H^1(k, S)$ est nul, ce qui permet encore de conclure.

PROPOSITION 2.8.12. *Si X vérifie $(H1')_\lambda$, l'application naturelle*

$$X(k)/R \rightarrow \text{CH}_0(X)$$

des classes de points rationnels sur X modulo la R -équivalence dans le groupe de Chow de dimension zéro est injective: deux k -points qui sont rationnellement équivalents sont R -équivalents.

Démonstration. Supposons les k -points M et N rationnellement équivalents sur X . Si \mathcal{T} est un torseur sur X sous un k -tore, les fibres de \mathcal{T} en M et N sont égales ([20], prop. 12, p. 198). Si \mathcal{T} est le torseur sur X de type λ trivial en M , sa fibre est aussi triviale en N , et M et N appartiennent tous deux à l'image de $\mathcal{T}(k)$ par la projection naturelle. En raisonnant comme dans les propositions 2.8.5 et 2.8.7, on voit qu'alors M et N sont R -équivalents sur X .

PROPOSITION 2.8.13. *Si k est un corps de type fini sur \mathbf{Q} , et si X vérifie l'hypothèse $(H1')_\lambda$, alors la R -équivalence sur $X(k)$ est finie ($X(k)/R$ est fini), et il existe un nombre fini de k -morphisms*

$$q_i: X_i \rightarrow X,$$

où chaque X_i est une k -variété lisse k -rationnelle, tels que $X(k)$ soit la réunion des $q_i(X_i(k))$.

Démonstration. Soit \mathcal{T} un torseur de type λ sur X . L'image de l'application $X(k) \rightarrow H^1(k, S_0)$ qui à un k -point M associe la fibre de \mathcal{T} en M est finie (proposition 2.7.3). L'énoncé résulte alors des propositions 2.8.7 et 2.8.10.

Remarque 2.8.14. En termes vagues mais plus imagés, cette proposition dit que les points k -rationnels de X peuvent être décrits au moyen d'un nombre fini de paramétrisations, chacune d'entre elles utilisant en général plus de paramètres que la dimension de X . On notera que la partie de la proposition qui ne porte pas sur la R -équivalence vaut plus généralement pour k de type fini sur le corps premier (cf. remarque 2.8.6).

PROPOSITION 2.8.15. *Si k est un corps local (p -adique ou réel) et si X vérifie $(H1')_\lambda$, la R -équivalence sur $X(k)$ est finie, chaque R -classe est ouverte et fermée dans $X(k)$ pour la topologie induite par celle de k . Si $k = \mathbf{R}$, les classes pour la R -équivalence coïncident avec les composantes connexes de l'espace topologique $X(\mathbf{R})$.*

Démonstration. Que la R -équivalence soit finie résulte de la proposition 2.8.10 et de la finitude du groupe $H^1(k, S)$ pour k local et S un k -tore quelconque. D'après la remarque 2.8.8, chaque R -classe peut s'écrire $q(\mathcal{T}(k))$, et le théorème des fonctions implicites implique que cet ensemble est ouvert dans $X(k)$. Chaque R -classe est donc ouverte dans $X(k)$, et par suite fermée. Pour $k = \mathbf{R}$, ceci implique que chaque R -classe est union de composantes connexes

réelles de $X(\mathbf{R})$. Mais deux \mathbf{R} -points qui sont R -équivalents sur la \mathbf{R} -variété propre X appartiennent à la même composante connexe de $X(\mathbf{R})$ (puisque $\mathbf{P}^1(\mathbf{R})$ est connexe), ce qui suffit à conclure.

Remarque 2.8.16. Les \mathbf{R} -surfaces fibrées en coniques sur $\mathbf{P}_{\mathbf{R}}^1$ admettent des modèles explicites très simples (modèle affine $y^2 + z^2 = \prod_i(x - e_i)$) sur lesquels on vérifie aisément la coïncidence des classes pour la R -équivalence avec les composantes connexes.

Remarque 2.8.17. Toujours sous $(H1')_{\lambda}$, on peut voir que, si k est un corps local, la R -équivalence coïncide avec l'équivalence de Brauer sur $X(k)$: il suffit d'utiliser les propositions 2.7.10, 2.8.10 et le fait que, pour k local, le cup-produit

$$H^1(k, S_0) \times H^1(k, \text{Pic } \bar{X}) \xrightarrow{\cup} \text{Br } k \rightarrow \mathbf{Q}/\mathbf{Z}$$

est une dualité parfaite de groupes abéliens finis ([52] II.40).

Remarque 2.8.18. Pour $k = \mathbf{R}$, il résulte alors de la proposition 2.8.10 que le nombre de composantes connexes réelles de $X(\mathbf{R})$ est borné par l'ordre de $H^1(\mathbf{R}, S_0)$, et en particulier au plus égal à 1 si $\text{Pic } \bar{X}$ est un facteur direct d'un module de permutation, ce qui permet de construire des contre-exemples à $(H1')$ lorsque la dimension de X est au moins 3: on peut facilement écrire les équations d'une intersection lisse X de deux quadriques dans $\mathbf{P}_{\mathbf{R}}^5$ (alors $\text{Pic } \bar{X} = \mathbf{Z}$ avec action triviale de $\mathfrak{g} = \text{Gal}(\mathbf{C}/\mathbf{R})$) telle que $X(\mathbf{R})$ possède deux composantes connexes réelles ([22], p. 228). De tels exemples n'existent pas en dimension deux. Soit en effet X une \mathbf{R} -surface rationnelle propre et lisse, soit $O \in X(\mathbf{R})$ et soit \mathcal{T} le torseur universel sur X de fibre triviale en O . De façon générale (cf. [23]), la flèche

$$i: X(k)/R \rightarrow H^1(k, S_0)$$

définie par \mathcal{T} peut s'écrire comme la composée de l'application naturelle de $X(k)/R$ dans $A_0(X)$, induite par l'application qui à un point M associe la classe de $(M - O)$ dans le groupe $A_0(X)$ des 0-cycles de degré zéro sur X , et d'une application

$$\Phi: A_0(X) \rightarrow H^1(k, S_0),$$

qui est injective si $X(k)$ est non vide [10]. Si donc deux \mathbf{R} -points de X ont même image par i , ils sont rationnellement équivalents sur X . Mais ceci implique [14] qu'ils appartiennent à la même composante connexe de la \mathbf{R} -variété X . En utilisant les mêmes arguments, on peut montrer que pour toute compactification lisse \mathcal{T}^c d'un torseur universel \mathcal{T} sur X , $\mathcal{T}^c(\mathbf{R})$ est soit vide, soit connexe, et l'on peut aussi voir que la décomposition en composantes connexes est donnée par l'équivalence de Brauer sur $X(\mathbf{R})$.

PROPOSITION 2.8.19. *Si k est un corps de nombres et si X vérifie $(H1')_{\lambda}$ et possède un point k -rationnel, il existe un ensemble fini Σ de places de k tel que pour toute place v non dans Σ , tous les points de $X(k_v)$ soient R -équivalents sur la k_v -variété $X \times_k k_v$.*

Démonstration. Soit M dans $X(k)$, et soit \mathcal{T} le torseur sur X de type λ et de fibre triviale en M . Il existe un ouvert affine $\text{Spec } A$ du spectre de l'anneau des entiers de k tel que (X, S, \mathcal{T}) possède un modèle $(\tilde{X}, \tilde{S}, \tilde{\mathcal{T}})$ sur $\text{Spec } A$, avec \tilde{X}/A propre et lisse, \tilde{S} un A -tore et $\tilde{\mathcal{T}}$ un torseur sur \tilde{X} sous \tilde{S} . Pour toute place finie v de l'anneau des entiers de k correspondant à un idéal premier de l'anneau A , notons A_v le complété de A en ce premier, k_v le corps des fractions de A_v et κ_v le corps résiduel de A ou A_v en v . On a le diagramme commutatif:

$$\begin{array}{ccc} X(k_v) & \rightarrow & H^1(k_v, S) \\ \uparrow & & \uparrow \\ \tilde{X}(A_v) & \rightarrow & H^1(A_v, \tilde{S}), \end{array}$$

où les flèches horizontales sont obtenues par accouplement avec \mathcal{T} et $\tilde{\mathcal{T}}$. La flèche verticale de gauche est une bijection car \tilde{X} est propre sur l'anneau A . Par ailleurs, le lemme de Hensel dit que le groupe $H^1(A_v, \tilde{S})$ s'identifie au groupe $H^1(\kappa_v, \tilde{S} \times_A \kappa_v)$, et ce groupe est nul car $\tilde{S} \times_A \kappa_v$ est un tore sur le corps fini κ_v (théorème de Lang). Ainsi l'image de $X(k_v)$ par la flèche horizontale supérieure est réduite à l'élément 0, c'est-à-dire que l'application $\mathcal{T}(k_v) \rightarrow X(k_v)$ induite par la projection structurale est surjective. Sous $(H1')_\lambda$, on conclut $X(k_v)/R = \{M\}$, en utilisant les mêmes arguments que dans les propositions 2.8.5 et 2.8.7.

PROPOSITION 2.8.20. *Soit k un corps local. Soit X une k -surface rationnelle qui vérifie $(H1')_\lambda$. Si k est un corps p -adique et X a bonne réduction, ou si $k = \mathbb{R}$ et $X(\mathbb{R})$ est connexe, tous les points de $X(k)$ sont R -équivalents.*

Démonstration. Soit O un k -point de X , et soit \mathcal{T} le torseur sur X de type λ et de fibre triviale en O . D'après la proposition 2.8.12 et la remarque 2.8.18, l'application $X(k)/R \rightarrow H^1(k, S)$ définie par \mathcal{T} se factorise par le groupe $A_0(X)$ des zéro-cycles de degré zéro modulo l'équivalence rationnelle, l'application $i: X(k)/R \rightarrow A_0(X)$ associant à un k -point P la classe de $(P - O)$, et, sous $(H1')_\lambda$, cette application i est injective. Sous chacune des hypothèses de l'énoncé, le groupe $A_0(X)$ est nul (pour le cas p -adique, voir [4] et [10], pour $k = \mathbb{R}$, voir [14]).

2.9. Comportement des torseurs universels par transformations k -birationnelles. La proposition suivante permet d'établir la k -rationalité stable des torseurs universels sur une k -variété rationnelle X qui possède un k -point rationnel, lorsqu'on la connaît pour un torseur universel particulier et que la k -variété X possède suffisamment d'automorphismes k -birationnels pour passer d'un k -point à un autre. Cette dernière propriété est par exemple satisfaite par les surfaces de Del Pezzo de degré 4 (intersections lisses de deux quadriques dans \mathbb{P}^4) et les surfaces cubiques lisses dans \mathbb{P}^3 (voir [42] II 6.1 (= II 16.1)).

PROPOSITION 2.9.1. *Soit k un corps de caractéristique zéro. Soient X et Y deux k -variétés rationnelles, propres et lisses. Si $f: X \rightarrow Y$ est une application k -birationnelle qui induit un k -isomorphisme d'un voisinage ouvert de $P \in X(k)$ avec un*

voisinage ouvert de $Q \in Y(k)$, le torseur universel sur X de fibre triviale en P est stablement k -birationnellement équivalent au torseur universel sur Y de fibre triviale en Q .

Démonstration. Considérons d'abord le cas où f est un k -morphisme birationnel. Puisque X est rationnelle, et donc $\text{Pic } \bar{X}$ de type fini sur Z (appendice 2.A), il existe des voisinages ouverts U de P dans X et V de Q dans Y tels que f induise un isomorphisme de U sur V et que de plus $\text{Pic } \bar{U} = \text{Pic } \bar{V} = 0$. Puisque X est propre et Y est lisse, il y a un ouvert Y_1 de Y qui contient tous les points de codimension 1 et tel que l'inverse f^{-1} de f définisse un k -morphisme de Y_1 vers X . On a alors le diagramme commutatif de \mathfrak{g} -modules:

$$\begin{array}{ccccccc} 1 \rightarrow \bar{k}[U]^*/\bar{k}^* & \rightarrow & \text{Div}_{\bar{X}-\bar{U}}\bar{X} & \rightarrow & \text{Pic } \bar{X} & \rightarrow & 0 \\ & \cong \downarrow & & \downarrow & & \downarrow & \\ 1 \rightarrow \bar{k}[V]^*/\bar{k}^* & \rightarrow & \text{Div}_{\bar{Y}-\bar{V}}\bar{Y} & \rightarrow & \text{Pic } \bar{Y} & \rightarrow & 0, \end{array}$$

où les flèches verticales sont définies au moyen de $(f^{-1})^*$ (puisque Y est lisse, les groupes des diviseurs de Cartier sur Y et Y_1 coïncident ainsi que les groupes de Picard). Dans ce diagramme tous les \mathfrak{g} -modules sont Z -libres de type fini. Nous pouvons donc le réécrire comme un diagramme de groupes de caractères de k -tores:

$$(2.9.1) \quad \begin{array}{ccccccc} 0 \rightarrow \hat{T}_1 & \rightarrow & \hat{M}_1 & \rightarrow & \hat{S}_1 & \rightarrow & 0 \\ & \cong \downarrow & & \downarrow & & \downarrow & \\ 0 \rightarrow \hat{T}_2 & \rightarrow & \hat{M}_2 & \rightarrow & \hat{S}_2 & \rightarrow & 0. \end{array}$$

Remarquons que le torseur M_1 sur $T_1 \cong T_2$ se déduit du torseur M_2 sur T_2 par le changement de groupe structural $\rho: S_2 \rightarrow S_1$, lui-même dual de l'application $(f^{-1})^*: \text{Pic } \bar{X} \rightarrow \text{Pic } \bar{Y}$. On a aussi le diagramme commutatif de \mathfrak{g} -modules:

$$\begin{array}{ccccccc} & & 0 & & 0 & & \\ & & \downarrow & & \downarrow & & \\ 1 \rightarrow \bar{k}[V]^*/\bar{k}^* & \rightarrow & \text{Div}_{\bar{Y}-\bar{V}}\bar{Y} & \rightarrow & \text{Pic } \bar{Y} & \rightarrow & 0 \\ & f^* \downarrow & & f^* \downarrow & & f^* \downarrow & \\ 1 \rightarrow \bar{k}[U]^*/\bar{k}^* & \rightarrow & \text{Div}_{\bar{X}-\bar{U}}\bar{X} & \rightarrow & \text{Pic } \bar{X} & \rightarrow & 0 \\ & & \downarrow & & \downarrow \alpha & & \\ & & \hat{P} & \xlongequal{\quad} & \hat{P} & & \\ & & \downarrow & & \downarrow & & \\ & & 0 & & 0, & & \end{array}$$

que l'on peut réécrire:

$$\begin{array}{ccccccc}
 & & 0 & & 0 & & \\
 & & \downarrow & & \downarrow & & \\
 0 & \rightarrow & \hat{T}_2 & \rightarrow & \hat{M}_2 & \rightarrow & \hat{S}_2 \rightarrow 0 \\
 & & \downarrow & & \downarrow f^* & & \downarrow f^* \\
 0 & \rightarrow & \hat{T}_1 & \rightarrow & \hat{M}_1 & \rightarrow & \hat{S}_1 \rightarrow 0 \\
 & & & & \downarrow & & \downarrow \alpha \\
 & & & & \hat{P} & \equiv & \hat{P} \\
 & & & & \downarrow & & \downarrow \\
 & & & & 0 & & 0.
 \end{array}$$

L'application $(f^{-1})^*$ définit une rétraction de chaque application f^* dans les suites exactes verticales (il s'agit là d'un fait simple mais essentiel). En particulier, le \mathfrak{g} -module \hat{P} est \mathbb{Z} -libre de type fini, c'est le module des caractères d'un k -tore P qui vérifie:

$$(2.9.2) \quad M_1 \cong M_2 \times_k P$$

$$(2.9.3) \quad S_1 \cong S_2 \times_k P,$$

ce dernier isomorphisme étant donné sur les modules des caractères par l'application:

$$\begin{aligned}
 \hat{S}_1 &\rightarrow \hat{S}_2 \oplus \hat{P} \\
 \chi &\mapsto ((f^{-1})^*(\chi), \alpha(\chi)).
 \end{aligned}$$

On vérifie alors que le composé de l'application $\rho: S_2 \rightarrow S_1$ avec l'isomorphisme (2.9.3) est l'application évidente $x \rightarrow (x, 1)$.

Soit alors \mathcal{T} le tore universel sur X de fibre triviale en P , et soit \mathcal{T}' le tore universel sur Y de fibre triviale en Q . Il résulte de la description locale des tores universels (proposition 2.3.1) que la restriction de \mathcal{T} à U et celle de \mathcal{T}' à V sont données par les produits fibrés respectifs:

$$\begin{array}{ccc}
 \mathcal{T}_U \rightarrow M_1 & & \mathcal{T}'_V \rightarrow M_2 \\
 \downarrow & \downarrow & \downarrow \\
 U \rightarrow T_1 & \text{et} & V \rightarrow T_2,
 \end{array}$$

où les applications $U \rightarrow T_1$ et $V \rightarrow T_2$ correspondent aux g -sections des projections

$$\bar{k}[U]^* \rightarrow \bar{k}[U]^*/\bar{k}^* \quad \text{et} \quad \bar{k}[V]^* \rightarrow \bar{k}[V]^*/\bar{k}^*$$

définies respectivement par les points k -rationnels P et Q . Maintenant les remarques suivant le diagramme (2.9.1) impliquent qu'il y a un isomorphisme de toiseurs sur U sous S_1 :

$$\mathcal{T}_U \cong f^*(\mathcal{T}'_V) \times^{S_2} S_1,$$

où le changement de groupe structural est donné par ρ . Cet isomorphisme et l'isomorphisme (2.9.3) donnent naissance à un isomorphisme de k -variétés

$$\mathcal{T}_U \cong f^*(\mathcal{T}'_V) \times_k P,$$

et donc, puisque f est un isomorphisme de U avec V , à un k -isomorphisme

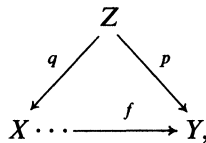
$$\mathcal{T}_U \cong \mathcal{T}'_V \times_k P.$$

On peut maintenant utiliser (2.9.2) et obtenir le k -isomorphisme

$$\mathcal{T}_U \times_k M_2 \cong \mathcal{T}'_V \times_k M_1.$$

Puisque \hat{M}_1 et \hat{M}_2 sont des modules de permutation, les k -tores M_1 et M_2 sont quasi-triviaux, donc sont des k -variétés k -rationnelles, et ceci achève la démonstration de la proposition 2.9.1 quand f est un k -morphisme.

Pour établir le résultat dans le cas général, on utilise l'hypothèse $\text{car}(k) = 0$ et le théorème de désingularisation d'Hironaka pour insérer l'application k -birationnelle f dans un diagramme commutatif de k -applications rationnelles



où Z est propre et lisse, et où il existe un point $M \in Z(k)$ et des voisinages ouverts U, V, W de P, Q, M , tels que p , resp. q , induise un k -isomorphisme de W avec U , resp. V . L'argument donné ci-dessus montre que le toiseur universel sur X de fibre triviale en P est stablement k -birationnellement équivalent au toiseur universel sur Z de fibre triviale en M , lui-même stablement k -birationnellement équivalent au toiseur universel sur Y de fibre triviale en Q , ce qui achève d'établir la proposition 2.9.1.

De fait, on peut établir, essentiellement par les mêmes arguments, l'énoncé suivant:

PROPOSITION 2.9.2. *Soit k un corps de caractéristique zéro, et soient X et Y deux k -variétés rationnelles propres et lisses k -birationnellement équivalentes, et soit \mathcal{T} un torseur universel sur X . Il existe alors un torseur universel \mathcal{T}' sur Y qui est k -stablement birationnellement équivalent à \mathcal{T} .*

Démonstration. Voici simplement l'idée de la démonstration. Soient U , resp. V , des ouverts de X , resp. Y , qui sont k -isomorphes et tels que $\text{Pic } \bar{U} = \text{Pic } \bar{V} = 0$. L'existence de \mathcal{T} assure (corollaire 2.3.4) que le \mathfrak{g} -homomorphisme naturel $\bar{k}^* \rightarrow \bar{k}[U]^*$ admet une \mathfrak{g} -section, qui définit ainsi une \mathfrak{g} -section de l'homomorphisme $\bar{k}^* \rightarrow \bar{k}[V]^*$. Comme $\text{Pic } \bar{V} = 0$, l'obstruction élémentaire à l'existence d'un k -point sur Y est vide et plus précisément on peut considérer le torseur universel \mathcal{T}' sur Y associé à la \mathfrak{g} -section ci-dessus par le corollaire 2.3.4. On raisonne alors exactement comme dans la proposition 2.9.1 précédente.

2.A. *Appendice: Invariance k -birationnelle stable du \mathfrak{g} -module $\text{Pic } \bar{X}$.* La proposition suivante a été obtenue pour les surfaces par Manin [42] et en dimension quelconque, mais en caractéristique 0, par Voskresenskiĭ ([55] théorème 4.35).

PROPOSITION 2.A.1. *Soient X et Y deux k -variétés propres, lisses et géométriquement intègres, k -birationnellement équivalentes. Soit K/k une extension galoisienne, finie ou non, de groupe G . Il existe deux G -modules de permutation P_1 et P_2 et un isomorphisme de G -modules:*

$$\text{Pic } X_K \oplus P_1 \cong \text{Pic } Y_K \oplus P_2.$$

Avant d'indiquer la démonstration, dégageons deux conséquences, dont la première est immédiate.

COROLLAIRE 2.A.2. *Si X est une k -variété propre, lisse, géométriquement intègre et \bar{k} -rationnelle, alors le \mathfrak{g} -module $\text{Pic } \bar{X}$ est un groupe abélien libre, de type fini, et le groupe $H^1(\mathfrak{g}, \text{Pic } \bar{X})$ est fini.*

COROLLAIRE 2.A.3. *Si X est une k -variété propre, lisse, géométriquement intègre et K/k est une extension galoisienne finie, ou non, de groupe G , si X_K est K -rationnelle et si $H^1(G, \text{Pic } X_K) = 0$, alors*

$$H^1(\mathfrak{g}, \text{Pic } \bar{X}) = 0.$$

Démonstration. Il suffit d'écrire la suite exacte d'inflation-restriction, d'utiliser la proposition 2.A.1 et d'observer que $\text{Pic } X_K = (\text{Pic } \bar{X})^{\mathfrak{h}}$, où $\mathfrak{h} = \text{Gal}(\bar{k}/K)$, ce qui résulte du fait que X_K est propre, géométriquement intègre et possède un K -point.

Démonstration de la proposition (suggérée par L. Moret-Bailly). Il existe une k -variété propre, géométriquement intègre et normale Z et des k -morphisms propres k -birationnels $p: Z \rightarrow X$ et $q: Z \rightarrow Y$: il suffit pour cela de définir Z

comme la normalisation du graphe d'une k -application k -birationnelle de X vers Y . Considérons le k -morphisme p . Comme Z est normal et que p est k -birationnel et propre, il existe un ouvert U de X qui contienne l'ensemble $X^{(1)}$ des points de codimension 1 de X et qui soit tel que p induise un k -isomorphisme entre $V = p^{-1}(U)$ et U . Considérons alors le diagramme:

$$\begin{array}{ccccccc}
 0 & \longrightarrow & \bigoplus_{\substack{x \in Z_K^{(1)} \\ x \notin V_K}} Zx & \longrightarrow & \text{CH}^1(Z_K) & \xrightarrow{\text{Res}} & \text{CH}^1(V_K) \longrightarrow 0 \\
 & & & & \uparrow & & \uparrow \cong \\
 & & & & \text{Pic } Z_K & \xrightarrow{\text{Res}} & \text{Pic } V_K \\
 & & & & \uparrow p^* & & \uparrow p^* \cong \\
 & & & & \text{Pic } X_K & \xrightarrow[\cong]{\text{Res}} & \text{Pic } U_K.
 \end{array}$$

Dans ce diagramme, les groupes CH^1 sont les groupes de Chow de codimension 1, i.e. les quotients par l'équivalence rationnelle des groupes abéliens libres ayant pour base l'ensemble des points de codimension 1. La ligne horizontale supérieure est une suite exacte. L'injectivité à gauche est le seul point à vérifier. Soit $\sum_x n_x x$ un cycle de codimension 1 dans ce noyau. Il existe alors une fonction f dans le corps des fonctions rationnelles $K(Z)$ de Z_K dont le diviseur $\text{div}(f)$ est égal à $\sum_x n_x x$. Comme V_K est isomorphe à U_K et que U_K contient tous les points de codimension 1 de la K -variété propre et géométriquement intègre X_K , ceci implique que f , vue comme fonction sur X_K , est une constante dans K^* . Il en est donc aussi ainsi sur Z_K , et $\sum_x n_x x = 0$. Les flèches verticales $\text{Pic} \rightarrow \text{CH}^1$ sont les flèches naturelles. Sur V_K , qui est lisse, cette flèche est un isomorphisme. Que la restriction en bas soit un isomorphisme résulte du fait que X_K est lisse et que l'ouvert U_K contient tous les points de codimension 1. Il résulte alors immédiatement du diagramme que la suite exacte de G -modules apparaissant à la première ligne est G -scindée, et qu'on a un isomorphisme de G -modules:

$$\text{Pic } X_K \oplus P_1 \cong \text{CH}^1(Z_K),$$

où P_1 est le G -module de permutation défini par le terme de gauche de la suite exacte horizontale. Comme on obtient un isomorphisme similaire

$$\text{Pic } Y_K \oplus P_2 \cong \text{CH}^1(Z_K)$$

en analysant le morphisme $q: Z \rightarrow Y$, ceci établit la proposition.

2.B. *Appendice: Calcul du g -module $\text{Pic } \bar{X}$ en l'absence de point rationnel.* On observe souvent que lorsqu'une classe de k -variétés rationnelles propres et lisses satisfait la propriété:

(P) *si une variété de cette famille possède un point k -rationnel, alors elle est k -rationnelle,*

la même classe satisfait le principe de Hasse.

Compte tenu de l'appendice 2.A, l'énoncé suivant, qui a été annoncé dans ([27], proposition 3.5) et utilisé dans ce même article, indique au moins que lorsque la propriété (P) est satisfaite, l'obstruction de Brauer-Manin au principe de Hasse (voir §3) s'annule.

THÉORÈME 2.B.1. *Soit k un corps de caractéristique zéro. Soit \mathcal{C} une classe, stable par extension arbitraire du corps de base, de variétés X/K pour K extension de k , propres, lisses, géométriquement intègres, et satisfaisant $H^1(X, \mathcal{O}_X) = 0$. Si, pour X/K dans \mathcal{C} avec $X(K) \neq \emptyset$, le $\text{Gal}(\bar{K}/K)$ -module $\text{Pic } X_{\bar{K}}$ est de permutation, resp. stablement de permutation, resp. facteur direct d'un module de permutation, resp. satisfait $H^1(\text{Gal}(\bar{K}/K), \text{Pic } X_{\bar{K}}) = 0$, alors il en est de même pour tout X/K dans \mathcal{C} .*

Démonstration. Donnons d'abord la démonstration sous la première hypothèse. Soit X/K dans \mathcal{C} . Quitte à changer les notations, on peut supposer $K = k$. Soient $E = k(X)$ le corps des fonctions de X , puis $F = \bar{k}(X)$ le corps des fonctions de $\bar{X} = X \times_k \bar{k}$, et enfin F une clôture algébrique de F . Soient

$$G = \text{Gal}(\bar{k}/k) = \text{Gal}(F/E), \quad \text{puis } G_1 = \text{Gal}(\bar{F}/E) \text{ et } H_1 = \text{Gal}(\bar{F}/F).$$

Le groupe H_1 est distingué dans G_1 , et $G = G_1/H_1$. La E -variété X_E possède un E -point rationnel, à savoir celui donné par le point générique de X . Par hypothèse, le G_1 -module $\text{Pic } X_{\bar{F}}$ est un G_1 -module de permutation. Comme H_1 est distingué dans G_1 , on en déduit que le G -module $(\text{Pic } X_{\bar{F}})^{H_1}$ est un G -module de permutation. De $X(F) \neq \emptyset$ (de fait $X(\bar{k}) \neq \emptyset$), on déduit $\text{Pic } X_F = (\text{Pic } X_{\bar{F}})^{H_1}$. Ainsi le G -module $\text{Pic } X_F$ est de permutation. L'hypothèse $H^1(X, \mathcal{O}_X) = 0$ assure que l'injection naturelle

$$\text{Pic } \bar{X} \rightarrow \text{Pic } X_F$$

est un isomorphisme de G -modules. Ainsi, $\text{Pic } \bar{X}$ est-il un G -module de permutation. La démonstration sous les deuxième et troisième hypothèses est essentiellement la même. Sous la quatrième hypothèse, il convient d'utiliser la suite exacte d'inflation-restriction, qui, en utilisant les arguments ci-dessus, donne une injection

$$H^1(G, \text{Pic } \bar{X}) \hookrightarrow H^1(G_1, \text{Pic } X_{\bar{F}}),$$

et donc la nullité annoncée.

§3. Arithmétique des torseurs. Pour une variété algébrique X définie sur un corps de nombres k , le groupe de Brauer-Grothendieck de X permet de définir des obstructions au principe de Hasse (Manin [41],[42]) et à l'approximation faible. L'objet de ce paragraphe est de montrer que la théorie de la descente fournit, pour les variétés rationnelles, une interprétation géométrique de ces obstructions. On peut ainsi montrer, pour certaines classes de variétés, que les

obstructions définies au moyen du groupe de Brauer sont les seules. Ceci donne alors des critères effectifs pour décider si une variété X de la classe considérée a un point rationnel ou non, ou pour décrire l'adhérence de $X(k)$ dans le produit des $X(k_v)$.

3.0. *Notations et rappels.* Dans toute la suite, sauf mention contraire, k désigne un corps de nombres, Ω_k l'ensemble des places de k et k_v le complété de k en la place v . On note \mathcal{O}_k l'anneau des entiers de k , et $\mathcal{O}_{(v)}$ son localisé en v et \mathcal{O}_v l'anneau des entiers de k_v , complété du précédent, enfin $\kappa(v)$ le corps résiduel en v . On note \bar{k} une clôture algébrique de k , puis $g = \text{Gal}(\bar{k}/k)$ le groupe de Galois de \bar{k}/k et g^v le groupe de décomposition d'une place de k prolongeant v , groupe qui s'identifie à $\text{Gal}(\bar{k}_v/k_v)$. On note enfin

$$\text{inv}_v: \text{Br } k_v \rightarrow \mathbb{Q}/\mathbb{Z}$$

l'invariant local en v .

On dit d'une k -variété algébrique X qu'elle *ne vérifie pas le principe de Hasse* si elle a un point dans chaque complété k_v de k sans en avoir dans k :

$$(3.0.1) \quad X(k) = \emptyset \quad \text{et pourtant} \quad \prod_{v \in \Omega_k} X(k_v) \neq \emptyset.$$

On connaît de multiples exemples de telles variétés: il y en a parmi les courbes elliptiques (Reichardt-Lind, cf. [7]), les tores algébriques (Hasse), les surfaces rationnelles (Swinnerton-Dyer [53], Iskovskih [39], Cassels et Guy [8], Birch et Swinnerton-Dyer [3]). Au congrès international de Nice en 1970, Manin [41] a introduit une obstruction au principe de Hasse définie au moyen du groupe de Brauer-Grothendieck de X et censée englober les diverses obstructions particulières utilisées dans les contre-exemples considérés auparavant.

On dit d'une k -variété algébrique X qui a un point rationnel qu'elle *vérifie l'approximation faible* si

$$(3.0.2)$$

$$X(k) \text{ est dense, par l'application diagonale, dans le produit } \prod_{v \in \Omega_k} X(k_v).$$

Là aussi on connaît de multiples exemples de variétés qui ne vérifient pas l'approximation faible.

On dit d'une classe \mathcal{C} de k -variétés algébriques qu'elle vérifie *le principe de Hasse*, s'il n'y a pas dans \mathcal{C} de variété qui vérifie (3.0.1), autrement dit, si pour X dans \mathcal{C} ,

$$(3.0.3) \quad \prod_{v \in \Omega_k} X(k_v) \neq \emptyset \Rightarrow X(k) \neq \emptyset.$$

On dit que \mathcal{C} vérifie l'*approximation faible* si, pour X dans \mathcal{C} ,

$$(3.0.4) \quad X(k) \neq \emptyset \Rightarrow X(k) \text{ dense dans le produit } \prod_{v \in \Omega_k} X(k_v).$$

On peut évidemment associer les deux propriétés: \mathcal{C} vérifie le *principe de Hasse* et l'*approximation faible*, si pour tout X dans \mathcal{C} ,

$$(3.0.5) \quad X(k) \text{ est dense dans le produit } \prod_{v \in \Omega_k} X(k_v).$$

Il s'agit là d'une condition très simple et naturelle. Néanmoins, on préfère souvent en pratique dissocier les deux conditions (3.0.3) et (3.0.4).

Voici enfin quelques rappels sur la dualité de Tate-Nakayama (cf. [54], [55]), et quelques notations supplémentaires. Tout d'abord, si A est un groupe abélien fini, on note

$$\tilde{A} = \text{Hom}_{\mathbb{Z}}(A, \mathbb{Q}/\mathbb{Z})$$

son dual. Si M est un \mathfrak{g} -module continu et Σ une partie de Ω_k , on note

$$\text{III}_{\Sigma}^i(k, M) := \ker\left(H^i(k, M) \rightarrow \prod_{v \notin \Sigma} H^i(k_v, M)\right)$$

le noyau de l'application naturelle de restriction: on écrit $H^i(k, M)$ pour $H^i(\mathfrak{g}, M)$, et $H^i(k_v, M)$ pour $H^i(\mathfrak{g}^v, M)$. On pose

$$\text{III}^i(k, M) := \text{III}_{\emptyset}^i(k, M) = \ker\left(H^i(k, M) \rightarrow \prod_{v \in \Omega_k} H^i(k_v, M)\right).$$

Etant donné un k -tore S , on note

$$\mathfrak{V}^1(k, S) := \text{coker}\left(H^1(k, S) \rightarrow \bigoplus_{v \in \Omega_k} H^1(k_v, S)\right).$$

Pour un tel S , on désigne de plus par τ_v l'application duale de la restriction de groupes abéliens finis

$$(3.0.6) \quad H^1(k_v, S) \rightarrow H^1(k, \hat{S})^{\sim},$$

obtenue en composant la dualité de Tate-Nakayama locale

$$H^1(k_v, S) \cong H^1(k_v, \hat{S})^{\sim}$$

avec l'application duale de la restriction

$$H^1(k, \hat{S}) \rightarrow H^1(k_v, \hat{S}).$$

Les dualités de Tate-Nakayama, locales et globale, définissent alors la suite exacte de groupes abéliens finis (cf. [20] §8):

$$(3.0.7) \quad H^1(k, S) \rightarrow \bigoplus_v H^1(k_v, S) \xrightarrow{\Sigma\tau_v} H^1(k, \hat{S})^\sim \longrightarrow H^2(k, S) \\ \rightarrow \bigoplus_v H^2(k_v, S),$$

qui donne en particulier la suite exacte de groupes abéliens finis

$$(3.0.8) \quad 0 \rightarrow \mathfrak{P}^1(k, S) \xrightarrow{\Sigma\tau_v} H^1(k, \hat{S})^\sim \longrightarrow \mathfrak{H}^2(k, S) \rightarrow 0.$$

3.1. *L'obstruction de Manin au principe de Hasse.* Voici d'abord quelques rappels sur le groupe de Brauer-Grothendieck (cf. [34], [35], [41], [42], chap. VI, voir aussi [20], §7, et [48]). Soient k un corps *quelconque*, \bar{k} une clôture séparable et \mathfrak{g} le groupe de Galois de \bar{k}/k . Soient X une k -variété algébrique géométriquement intègre et $\bar{X} = X \times_k \bar{k}$. Le groupe de Brauer $\text{Br } X$ formé des classes d'algèbres d'Azumaya sur X est un sous-groupe du groupe de Brauer cohomologique $\text{Br}' X := H_{\text{ét}}^2(X, \mathbb{G}_m)$. On note $\text{Br}_1 X$ le noyau de la restriction $\text{Br } X \rightarrow \text{Br } \bar{X}$, et de même $\text{Br}'_1 X$ pour le groupe de Brauer-Grothendieck Br' . On démontre (cf. [20] lemme 14 et [42], VI 41.7 (= VI 1.7)) que

$$(3.1.1) \quad \text{Br}_1 X = \text{Br}'_1 X = \ker(H^2(\mathfrak{g}, \bar{k}(X)^*) \rightarrow H^2(\mathfrak{g}, \text{Div } \bar{X})).$$

On en déduit que, pour k de caractéristique 0 et X *rationnelle*, complète et lisse, auquel cas $\text{Br}' \bar{X} = 0$,

$$(3.1.2) \quad \text{Br } X = \text{Br}' X = \ker(H^2(\mathfrak{g}, \bar{k}(X)^*) \rightarrow H^2(\mathfrak{g}, \text{Div } \bar{X})).$$

Si k est un corps de nombres ou un corps local complété d'un tel corps de nombres,

$$H^3(k, \mathbb{G}_m) = H^3(\mathfrak{g}, \bar{k}^*) = 0.$$

Si X est une variété algébrique *complète* et géométriquement intègre sur un tel corps k , la suite exacte (1.5.0) s'écrit:

$$(3.1.3) \quad 0 \rightarrow \text{Pic } X \rightarrow (\text{Pic } \bar{X})^\mathfrak{g} \rightarrow \text{Br } k \rightarrow \text{Br}_1 X \xrightarrow{X} H^1(\mathfrak{g}, \text{Pic } \bar{X}) \rightarrow 0.$$

Rappelons qu'au signe près l'application χ est définie comme suit: soit $\mathcal{A} \in \text{Br}_1 X$; on peut la représenter par un 2-cocycle $f = (f_{s,t}) \in Z^2(\mathfrak{g}, \bar{k}(X)^*)$, de telle sorte que $\text{div}(f) = \partial D$ où $D = (D_s) \in C^1(\mathfrak{g}, \text{Div } \bar{X})$; au signe près, $\chi(\mathcal{A})$ est la classe de D dans $Z^1(\mathfrak{g}, \text{Pic } \bar{X})$.

Soit X une variété algébrique définie sur le corps de nombres k , et telle que

$$\prod_{v \in \Omega_k} X(k_v) \neq \emptyset.$$

On appelle point adélique $x = \{x_v\}_{v \in \Omega_k}$ de X un élément du produit $\prod_{v \in \Omega_k} X(k_v)$ pour lequel il existe un ouvert non vide U de $\text{Spec } \mathcal{O}_k$ au-dessus duquel X se prolonge en un U -schéma \tilde{X} et, pour toute place v définie par un point fermé de U , le point x_v se prolonge en un point $\tilde{x}_v \in \tilde{X}(\mathcal{O}_v)$. On note $X(\mathbf{A}_k)$ l'ensemble des points adéliques de X . Si X est *complète*,

$$X(\mathbf{A}_k) = \prod_{v \in \Omega_k} X(k_v).$$

On a un accouplement naturel, introduit par Manin:

$$X(\mathbf{A}_k) \times \text{Br}' X \rightarrow \mathbf{Q}/\mathbf{Z}$$

défini par

$$(3.1.4) \quad \langle \{x_v\}, \mathcal{A} \rangle = \sum_v \text{inv}_v(\mathcal{A}(x_v)),$$

et noté également

$$i_{\mathcal{A}}(\{x_v\}) := \langle \{x_v\}, \mathcal{A} \rangle.$$

Cette définition a un sens car, pour presque tout v , toute la situation se prolonge au-dessus de \mathcal{O}_v , et $\mathcal{A}(x_v)$ vient donc de $\text{Br}' \mathcal{O}_v$, qui vaut 0.

Définition 3.1.1. Soit B un sous-groupe de $\text{Br}' X$. On appelle *obstruction de Manin associée à B* la condition suivante:

(3.1.5)

pour tout $\{x_v\} \in X(\mathbf{A}_k)$, il existe $\mathcal{A} \in B$ telle que $\sum_v \text{inv}_v(\mathcal{A}(x_v)) \neq 0$,

et on appelle *obstruction de Manin au principe de Hasse* celle associée à $\text{Br}' X$ tout entier. Chacune de ces conditions est une obstruction à l'existence d'un point k -rationnel pour X . Le fondement même de cette obstruction est la loi de réciprocité:

$$\mathcal{A} \in \text{Br } k \Rightarrow \sum_v \text{inv}_v(\mathcal{A}(x_v)) = 0.$$

Toute classe d'algèbres d'Azumaya $\mathcal{A} \in \text{Br } X$ définit un diagramme commutatif

$$(3.1.6) \quad \begin{array}{ccc} X(k) & \longrightarrow & X(\mathbf{A}_k) \\ \mathcal{A} \downarrow & & \downarrow \mathcal{A} \\ \text{Br } k & \longrightarrow & \bigoplus_{v \in \Omega_k} \text{Br } k_v \end{array} \begin{array}{c} \searrow i_{\mathcal{A}} \\ \xrightarrow{\Sigma_v \text{inv}_v} \mathbf{Q}/\mathbf{Z} \end{array}$$

dont la suite du bas est un complexe—en fait exact—de sorte que $i_{\mathcal{A}}$ vaut 0 sur $X(k)$. Ainsi:

$$(3.1.7) \quad X(k) \subset \bigcap_{\mathcal{A}} \ker i_{\mathcal{A}} \quad \text{où } \mathcal{A} \text{ parcourt } \text{Br}' X.$$

Avec ces notations, comme $i_{\mathcal{A}}$ ne dépend que de la classe de \mathcal{A} modulo $\text{Br } k$, i.e. modulo l'image $\text{Br}_0 X$ de $\text{Br } X$ dans $\text{Br}' X$, l'obstruction de Manin—ou de Brauer-Manin—au principe de Hasse est la condition suivante:

$$(3.1.8) \quad \bigcap_{\mathcal{A}} \ker i_{\mathcal{A}} = \emptyset \quad \text{où } \mathcal{A} \text{ parcourt } \text{Br}' X / \text{Br}_0 X.$$

On peut aussi bien l'écrire

$$(3.1.9) \quad \ker i_{\text{Br}} = \emptyset,$$

où

$$i_{\text{Br}}: X(\mathbf{A}_k) \rightarrow \text{Hom}(\text{Br}' X / \text{Br}_0 X, \mathbf{Q}/\mathbf{Z})$$

est définie par la collection des $i_{\mathcal{A}}$. Pour une variété rationnelle X propre et lisse sur le corps de nombres k ,

$$\text{Br}' X / \text{Br}_0 X = H^1(\mathfrak{g}, \text{Pic } \bar{X}),$$

et c'est ainsi un groupe abélien fini. Si $\{\mathcal{A}_1, \dots, \mathcal{A}_r\}$ engendre $\text{Br}' X / \text{Br}_0 X$, on peut se limiter dans (3.1.8) à $\mathcal{A} = \mathcal{A}_1, \dots, \mathcal{A}_r$. On voit qu'alors cette obstruction de Manin est théoriquement calculable de façon effective (cf. [42], chap. VI, voir aussi corollaire 3.4.5 ci-après). Elle est, de fait, très simple à calculer dans certains cas, comme celui des surfaces de Châtelet généralisées [13], mais son calcul est déjà délicat pour les surfaces cubiques diagonales (cf. [15]).

On dira que l'obstruction de Manin est "vide", si la condition (3.1.8) n'est pas vérifiée, i.e. si

$$\bigcap_{\mathcal{A}} \ker i_{\mathcal{A}} \neq \emptyset,$$

autrement dit s'il existe $\{x_v\} \in X(\mathbf{A}_k)$ tel que $i_{\mathcal{A}}(\{x_v\}) = 0$ pour tout $\mathcal{A} \in \text{Br}' X$, i.e. si l'application

$$i_{\text{Br}} = (i_{\mathcal{A}})_{\mathcal{A} \in \text{Br}' X} \text{ atteint la valeur } 0.$$

3.2. *Obstructions au principe de Hasse définies par des toiseurs sous des tores.* On commence par quelques préliminaires.

3.2.0. Si $[\mathcal{T}]$ est la classe dans $H^1(X, S)$ d'un toiseur \mathcal{T} sur X sous un k -tore S , et si K/k est une extension quelconque, l'expression $[\mathcal{T}](K) \neq \emptyset$ a un sens: elle signifie $\mathcal{T}(K) \neq \emptyset$, cette condition étant indépendante du représentant \mathcal{T} choisi. Si $\alpha \in H^1(k, S)$, on note \mathcal{T}^α un toiseur sur X sous S dont la classe vérifie (pour i_1 comme en (2.0.2)):

$$(3.2.1) \quad [\mathcal{T}^\alpha] = [\mathcal{T}] - i_1(\alpha) \text{ dans } H^1(X, S).$$

Supposons que X vérifie (2.0.1). La définition même, en 2.0, d'un toiseur \mathcal{T} sur X de type λ et la suite exacte (2.0.2) montrent le résultat suivant, sur lequel repose essentiellement ce paragraphe:

PROPOSITION 3.2.1. *Soit X une k -variété algébrique vérifiant (2.0.1). Soit λ un type donné de toiseur sur X sous S .*

(i) *Tors(X, S, λ) est soit vide, soit affine (= principal homogène) sous le groupe $H^1(k, S)$.*

(ii) *$\{q_{\mathcal{T}}(\mathcal{T}(k))\}$ pour $[\mathcal{T}] \in \text{Tors}(X, S, \lambda)$ est une partition de $X(k)$.*

(iii) *Si \mathcal{T} est un toiseur de type λ , $\{q_\alpha(\mathcal{T}^\alpha(k))\}$ pour $\alpha \in H^1(k, S)$ est une partition de $X(k)$.*

Démonstration. Précisons d'abord que $q_{\mathcal{T}}: \mathcal{T} \rightarrow X$ est le morphisme structural, qu'on note simplement q_α pour $\mathcal{T} = \mathcal{T}^\alpha$. L'assertion (i) résulte aussitôt de (2.0.2). Si $P \in X(k)$, il existe une classe et une seule $[\mathcal{T}^P] \in \text{Tors}(X, S, \lambda)$ telle que $\mathcal{T}^P(P) = 0 \in H^1(k, S)$, ce qui prouve (ii), et (iii) résulte de (i) et (ii).

3.2.2. Etant donné une variété algébrique X définie sur le corps de nombres k , et supposée complète, un k -tore S et un toiseur \mathcal{T} sur X sous S , on appelle *place de bonne réduction* de \mathcal{T} toute place finie v de k telle que (X, S, \mathcal{T}) admette, au-dessus de $\text{Spec } \mathcal{O}_{(v)}$, un prolongement $(\tilde{X}, \tilde{S}, \tilde{\mathcal{T}})$ où \tilde{X} est un $\mathcal{O}_{(v)}$ -schéma propre, \tilde{S} un $\mathcal{O}_{(v)}$ -tore et $\tilde{\mathcal{T}}$ un toiseur sur \tilde{X} sous \tilde{S} . D'après ([33], §8) l'ensemble des places finies de k où \mathcal{T} n'a pas bonne réduction est *fini*. On note $\Sigma(\mathcal{T})$ l'ensemble des places finies de mauvaise réduction de \mathcal{T} et des places à l'infini.

LEMME 3.2.3. *Sous les hypothèses ci-dessus, si \mathcal{T} a bonne réduction en v , et si $P_v \in X(k_v)$, alors*

$$\mathcal{T}(P_v) = 0 \text{ dans } H^1(k_v, S).$$

Démonstration. Soit en effet $(\tilde{X}, \tilde{S}, \tilde{\mathcal{F}})$ un prolongement de (X, S, \mathcal{F}) au-dessus de $\mathcal{O}_{(v)}$. Soit

$$(X', S', \mathcal{F}') = (\tilde{X}, \tilde{S}, \tilde{\mathcal{F}}) \times_{\text{Spec } \mathcal{O}_{(v)}} \text{Spec } \mathcal{O}_v.$$

Comme X' est propre sur \mathcal{O}_v , qui est un anneau de valuation discrète, le point $P_v \in X(k_v)$ se prolonge en $P'_v \in X'(\mathcal{O}_v)$. Ainsi $\mathcal{F}(P_v)$ vient de $\mathcal{F}'(P'_v) \in H^1(\mathcal{O}_v, S')$ qui est égal à $H^1(\kappa(v), \tilde{S}_{\kappa(v)})$ par bonne réduction et par le lemme de Hensel, et vaut donc 0 par le théorème de Lang.

COROLLAIRE 3.2.4. *Pour (X, S, \mathcal{F}) comme ci-dessus, il existe un ensemble fini Σ de places tel que, pour toute place $v \notin \Sigma$, et tout $P_v \in X(k_v)$, on ait:*

$$\mathcal{F}(P_v) = 0 \quad \text{dans } H^1(k_v, S).$$

3.2.5. Pour simplifier, on suppose désormais

(3.2.2) X est une variété algébrique lisse sur le corps de nombres k , complète et rationnelle.

On note alors S_0 le k -tore dual du \mathfrak{g} -module $\text{Pic } \bar{X}$ et λ_0 l'identité du \mathfrak{g} -module $\hat{S}_0 = \text{Pic } \bar{X}$. Soient S un k -tore, $\lambda \in \text{Hom}_{\mathfrak{g}}(\hat{S}, \hat{S}_0)$ et $D(\lambda): S_0 \rightarrow S$ le k -morphisme dual.

PROPOSITION-DÉFINITION 3.2.6. *Soit X une k -variété vérifiant les hypothèses (3.2.2) et soit λ comme ci-dessus. On suppose $X(\mathbb{A}_k) \neq \emptyset$. Chacune des conditions suivantes est une obstruction à l'existence d'un point k -rationnel de X :*

- \mathcal{O}_λ : pour tout torseur \mathcal{F} de type λ , il existe une place v telle que $\mathcal{F}(k_v) = \emptyset$;
- \mathcal{O}'_λ : il n'existe pas de torseur de type λ ;
- \mathcal{O}''_λ : il existe un torseur \mathcal{F} de type λ , et, pour tout $\alpha \in H^1(k, S)$, il existe une place v telle que

$$\mathcal{F}^\alpha(k_v) = \emptyset.$$

De plus:

$$\mathcal{O}_\lambda \Leftrightarrow \mathcal{O}'_\lambda \text{ ou } \mathcal{O}''_\lambda.$$

L'obstruction \mathcal{O}'_{λ_0} est la plus fine des obstructions \mathcal{O}'_λ ; elle est à valeurs dans $\text{III}^2(k, S_0)$, et on l'appelle la première obstruction au principe de Hasse. L'obstruction \mathcal{O}_{λ_0} est la plus fine des obstructions \mathcal{O}_λ ; on l'appelle l'obstruction de Picard au principe de Hasse.

Démonstration. Si $P \in X(k)$, le torseur \mathcal{F}^P de type λ et fibre nulle en P a, par définition même, un point dans k , au-dessus de P : $\mathcal{F}^P(k) \neq \emptyset$ (proposition

3.2.1). A fortiori $\mathcal{T}^P(k_v) \neq \emptyset$ quelle que soit v . La condition \mathcal{O}_λ est donc une obstruction à $X(k) \neq \emptyset$.

L'équivalence $\mathcal{O}_\lambda \Leftrightarrow \mathcal{O}'_\lambda$ ou \mathcal{O}''_λ est immédiate, car l'ensemble des toiseurs de type λ est soit vide, soit un espace affine sous $H^1(k, S)$: si \mathcal{T} est un toiseur de type λ , tout autre toiseur de type λ est de la forme \mathcal{T}^α pour $\alpha \in H^1(k, S)$ et inversement.

D'après la proposition 2.2.8, l'obstruction \mathcal{O}'_λ se traduit par $\partial(\lambda) \neq 0$. De l'hypothèse $X(\mathbf{A}_k) \neq \emptyset$ résulte que cette obstruction est à valeurs dans $\mathbf{III}^2(k, S)$. Toujours d'après cette proposition, l'obstruction \mathcal{O}'_{λ_0} est la plus fine des obstructions \mathcal{O}'_λ et elle coïncide avec l'obstruction élémentaire étudiée au §2.2.

Que l'obstruction \mathcal{O}_{λ_0} soit la plus fine des obstructions \mathcal{O}_λ est une conséquence de la remarque suivante:

SCHOLIE 3.2.7. *Si l'obstruction de Picard est vide, il existe un toiseur universel \mathcal{T}_0 qui a des points dans tous les complétés de k :*

$$\prod_{v \in \Omega_k} \mathcal{T}_0(k_v) \neq \emptyset,$$

et, de même, pour tout type λ , il existe un toiseur de ce type qui a des points dans tous les complétés de k .

Démonstration. C'est immédiat sur la définition de \mathcal{O}_λ : la négation de \mathcal{O}_λ signifie qu'il existe un toiseur \mathcal{T} de type λ qui a des points dans chaque complété de k . Si \mathcal{T}_0 est un toiseur universel ayant cette propriété, et si λ est un type quelconque, on peut alors prendre pour \mathcal{T} le produit contracté de \mathcal{T}_0 et S sous l'action de S_0 agissant sur \mathcal{T}_0 comme groupe du toiseur et sur S via $D(\lambda)$: $S_0 \rightarrow S$.

3.3. *La première obstruction et l'obstruction de Manin associée à \mathbf{B} .* On suppose toujours que X est une variété rationnelle propre et lisse sur un corps de nombres k et que l'on a $X(\mathbf{A}_k) \neq \emptyset$.

PROPOSITION 3.3.1. *La première obstruction est nulle dans chacun des cas suivants:*

- (i) $\mathbf{III}^2(k, S_0) = 0$;
- (ii) $\mathbf{III}^1(k, \hat{S}_0) = 0$;
- (iii) $H^1(k, \text{Pic } \bar{X}) = 0$.

Démonstration. Le cas (i) résulte immédiatement de la proposition 3.2.6. La condition (i) équivaut à (ii) d'après la dualité de Poitou-Tate [52], qui affirme que les deux groupes abéliens finis $\mathbf{III}^2(k, S_0)$ et $\mathbf{III}^1(k, \hat{S}_0)$ sont en dualité. Quant à (iii), elle implique évidemment (ii).

PROPOSITION 3.3.2. *La première obstruction au principe de Hasse coïncide avec l'obstruction de Manin associée au sous-groupe*

$$\mathbf{B}(X) := \mathbf{III}(\text{Br}_a X),$$

formé des classes d'algèbres localement constantes.

Autrement dit, la trivialité de l'obstruction de Manin associée à $\mathfrak{B}(X)$ équivaut à l'existence d'un torseur universel sur X .

Dans l'énoncé ci-dessus, $\text{Br}_a X$ désigne $\text{Br}_1 X / \text{Br}_0 X$ et $\mathfrak{B}(X)$ est l'image dans $\text{Br}_a X$ du noyau B de la restriction

$$\text{Br}_1 X \longrightarrow \prod_{v \in \Omega_k} (\text{Br}_1 X_{k_v} / \text{Br } k_v),$$

noyau formé des classes d'algèbres localement constantes.

Démonstration. Comme indiqué au lemme 6.2 de [48], l'accouplement de Manin (3.1.4) définit un homomorphisme

$$(3.3.1) \quad \gamma: \mathfrak{B}(X) \rightarrow \mathbb{Q}/\mathbb{Z}$$

par

$$\gamma(\mathcal{A}) = \sum_v \text{inv}_v(\mathcal{A}(P_v))$$

où $\{P_v\}$ désigne un point quelconque de $X(\mathbb{A}_k)$, l'expression $\text{inv}_v(\mathcal{A}(P_v))$ étant indépendante de P_v puisque, par hypothèse, l'image \mathcal{A}_v de \mathcal{A} dans $\text{Br } X_v$ vient de $\text{Br } k_v$. Autrement dit, si $\mathcal{A} \in \mathfrak{B}(X)$, l'application $i_{\mathcal{A}}$ est constante. L'obstruction de Manin associée à $\mathfrak{B}(X)$ est la condition suivante:

$$(3.3.2) \quad \text{il existe } \mathcal{A} \in \mathfrak{B}(X) \text{ telle que } \gamma(\mathcal{A}) \neq 0.$$

La dualité de Poitou-Tate est donnée par l'accouplement

$$\text{III}^2(k, S_0) \times \text{III}^1(k, \hat{S}_0) \xrightarrow{\tau} \mathbb{Q}/\mathbb{Z}$$

défini par

$$(3.3.3) \quad \tau(\beta, \alpha) = \sum_v \text{inv}_v(\varepsilon_v),$$

où $\varepsilon_v \in \text{Br } k_v$ est défini de la façon suivante (cf. [48] p. 58): on représente α et β par des cocycles a et b , puis, compte tenu de $H^3(k, \mathbf{G}_m, k) = 0$, on écrit

$$\alpha \cup \beta = dh \quad \text{où } h \in C^2(\mathfrak{g}, \bar{k}^*);$$

pour chaque place v , on peut écrire

$$b = d\xi_v \quad \text{dans } Z^2(k_v, S_0) \text{ où } \xi_v \in C^1(k_v, S_0);$$

on vérifie aussitôt que, pour chaque place v ,

$$\xi_v \cup a - h \in Z^2(\mathfrak{g}^v, \bar{k}_v^*),$$

ce qui permet de poser

$$\varepsilon_v = \text{cl}((\xi_v \cup a) - h) \in \text{Br } k_v.$$

Comme $H^3(k, G_{m,k}) = 0$, l'application

$$\chi: \text{Br}_1 X \rightarrow H^1(k, \text{Pic } \bar{X})$$

induit des isomorphismes

$$\bar{\chi}: \text{Br}_a X \xrightarrow{\cong} H^1(k, \hat{S}_0) \quad \text{et} \quad \bar{\chi}: \mathbb{B}(X) \xrightarrow{\cong} \mathbb{I}^1(k, \hat{S}_0).$$

LEMME 3.3.3. *Si \mathcal{A} est une algèbre dont la classe appartient à $\mathbb{B}(X)$, on a l'égalité*

$$\gamma(\mathcal{A}) = \tau(\partial(\lambda_0), \chi(\mathcal{A})).$$

Autrement dit, le triangle ci-dessous

$$\begin{array}{ccc} \mathbb{B}(X) & \xrightarrow{\cong} & \mathbb{I}^1(k, \hat{S}_0) \\ \gamma \searrow & & \swarrow \tau' \\ & \mathbb{Q}/\mathbb{Z} & \end{array}$$

où τ' est définie par $\tau'(\alpha) = \tau(\partial(\lambda_0), \alpha)$, est un triangle commutatif.

Ce lemme étant admis, la proposition résulte du fait que τ est une dualité parfaite de groupes finis; on a en effet les équivalences:

$$\partial(\lambda_0) \neq 0 \Leftrightarrow \tau' \neq 0 \Leftrightarrow \gamma \neq 0;$$

autrement dit, la première obstruction est non vide si, et seulement si, l'obstruction de Manin (3.3.2) est non vide. Pour achever la démonstration de la proposition, il reste à démontrer le lemme.

Démonstration du lemme. Elle se fait en plusieurs étapes.

1. On représente \mathcal{A} par un 2-cocycle $f = (f_s, t) \in Z^2(\mathfrak{g}, \bar{k}(X)^*)$ tel que

$$\text{div}(f) = dD \quad \text{où} \quad D = (D_s) \in C^1(\mathfrak{g}, \text{Div } \bar{X}).$$

On sait qu'alors

$$\chi(\mathcal{A}) = \text{classe dans } H^1(k, \hat{S}_0) \text{ de } \text{cl}(D) \in Z^1(\mathfrak{g}, \text{Pic } \bar{X}),$$

autrement dit, avec les notations ci-dessus, on peut représenter $\alpha := \chi(\mathcal{A})$ par le 1-cocycle $a = \text{cl}(D)$.

2. Soit $P \in X(\bar{k})$ tel que les fonctions $f_{s,t}$ soient toutes définies en P , ce qui est possible, X étant lisse. On sait que $\partial(\lambda_0)$ est la classe de la 2-extension de \mathfrak{g} -modules

$$1 \rightarrow \bar{k}^* \rightarrow \bar{k}(X)^* \rightarrow \text{Div } \bar{X} \rightarrow \text{Pic } \bar{X} \rightarrow 0.$$

Comme P est lisse, il existe un scindage de l'extension de groupes abéliens

$$1 \rightarrow \bar{k}^* \rightarrow \bar{k}(X)^* \rightarrow \text{Div}_0 \bar{X} \rightarrow 0$$

provenant de la rétraction

$$\mathcal{O}_{\bar{X}, P}^* \rightarrow \bar{k}^*$$

donnée par $g \mapsto g(P)$. On a ainsi une section de groupes abéliens $\sigma_P: \text{Div}_0 \bar{X} \rightarrow \bar{k}(X)^*$ dont le bord $d\sigma_P$ est à valeurs dans \bar{k}^* et s'étend à $\text{Div } \bar{X}$ en un morphisme de groupes abéliens ψ :

$$\begin{array}{ccc} \text{Div}_0 \bar{X} & \rightarrow & \text{Div } \bar{X} \\ d\sigma_P \downarrow & \swarrow \psi & \\ \bar{k}^* & & \end{array}$$

L'obstruction élémentaire $\partial(\lambda_0)$ peut alors être représentée par

$$b := d\psi \in Z^2(\mathfrak{g}, \text{Pic } \bar{X}).$$

3. On continue à appliquer la méthode indiquée en (3.3.3) pour calculer $\tau(\partial(\lambda_0), \chi(\mathcal{A}))$. Montrons qu'on peut prendre pour $h \in C^2(\mathfrak{g}, \bar{k}^*)$ tel que

$$b \cup a = d\psi \cup D = dh$$

la 2-cochaîne $h = \psi \cup D + e_P \cup f$ où $e_P \in \text{Hom}(\bar{k}(X)^*, \bar{k}^*)$ est définie par $e_P(g) = g/\sigma_P(g)$.

$$\begin{aligned} \text{En effet: } de_P &= d\sigma_P \text{ et } dh = (d\psi \cup D) - (\psi \cup dD) + (d\sigma_P \cup f) \\ &= (d\psi \cup D) - (\psi \cup f) + (d\sigma_P \cup f) = b \cup a. \end{aligned}$$

4. Pour chaque place v , on peut fixer $P_v \in X(k_v)$ de telle sorte que le 2-cocycle f soit défini en P_v : c'est possible d'après la lissité de X , par application du théorème des fonctions implicites local. Soit

$$\theta_v = \sigma_P/\sigma_{P_v}: \text{Div}_0 \bar{X} \rightarrow \bar{k}^*;$$

c'est un morphisme de groupes abéliens tel que, si $g \in \bar{k}(X)^*$ est une fonction définie en P et en P_v :

$$\theta_v(\operatorname{div} g) = g(P_v)/g(P).$$

On suppose, ce qui est possible, car $\operatorname{Div}_{\{P_v\}} \bar{X}$ est un \mathfrak{g}^v -module de permutation, que σ_P est un \mathfrak{g}^v -morphisme. Dès lors

$$d\theta_v = d\sigma_P \in B^1(\mathfrak{g}^v, \operatorname{Hom}(\operatorname{Div}_0 \bar{X}, \bar{k}^*)).$$

On peut prolonger θ_v en un morphisme de groupes abéliens μ_v :

$$\begin{array}{ccc} \operatorname{Div}_0 \bar{X} & \rightarrow & \operatorname{Div} \bar{X} \\ \theta_v \downarrow & \searrow \mu_v & \\ & & \bar{k}^* \end{array}$$

et on peut alors prendre

$$\xi_v = \psi - d\mu_v \in C^1(\mathfrak{g}^v, S_0),$$

car, d'une part, $(\psi - d\mu_v)|_{\operatorname{Div}_0 \bar{X}} = d\sigma_P - d\theta_v = 0$, d'autre part $d\xi_v = d\psi = b$ dans $Z^2(\mathfrak{g}^v, S_0)$.

5. Ces divers choix étant faits, ε_v est la classe dans $\operatorname{Br} k_v$ du 2-cocycle

$$\begin{aligned} \xi_v \cup a - h &= \psi \cup D - d\mu_v \cup D - \psi \cup D - e_P \cup f \\ &= -d(\mu_v \cup D) + \mu_v \cup dD - e_P \cup f. \end{aligned}$$

Comme $\mu_v \cup D$ appartient à $C^1(\mathfrak{g}^v, \bar{k}^*)$, ε_v est aussi la classe du 2-cocycle

$$\mu_v \cup f - e_P \cup f = (\theta_v/e_P) \cup f = f(P_v).$$

C'est donc $\mathcal{A}(P_v)$, ce qui montre que les termes locaux intervenant dans le calcul de $\gamma(\mathcal{A})$ et dans celui de $\tau(\partial(\lambda_0), \chi(\mathcal{A}))$ sont les mêmes, ce qui achève la démonstration du lemme, et donc celle de la proposition.

A propos de cette première obstruction, voir aussi [41], ([42], chap. VI, 1.23 et 1.24) et [48].

3.4. *La deuxième obstruction: la traduction fonctionnelle.* Soit X comme en 3.3, soit S un k -tore, et soit $\lambda \in \operatorname{Hom}_{\mathfrak{g}}(\hat{S}, \operatorname{Pic} \bar{X})$.

Définition 3.4.1. S'il existe un torseur de type λ , on a également une application

$$i_\lambda: X(\mathbf{A}_k) \rightarrow H^1(k, \hat{S})^\sim$$

définie par

$$i_\lambda(\{P_v\}) = \sum_{v \in \Omega_k} \tau_v(\mathcal{F}(P_v)),$$

et cette application ne dépend pas du choix du torseur \mathcal{F} de type λ , car deux tels torseurs diffèrent par un élément $\alpha \in H^1(k, S)$, et pour un tel élément on a encore, d'après la suite exacte (3.0.7), une loi de réciprocité $\sum_v \tau_v(\alpha) = 0$.

PROPOSITION 3.4.2. *On suppose $\text{Tors}(X, S, \lambda) \neq \emptyset$. Chacune des conditions suivantes équivaut à \mathcal{O}_λ'' :*

- (i) *pour tout torseur \mathcal{F} de type λ , il existe une place v telle que $\mathcal{F}(k_v) = \emptyset$;*
- (ii) *pour un torseur \mathcal{F} de type λ , pour tout $\alpha \in \text{III}_{\Sigma(\mathcal{F})}^1(k, S)$, il existe $v \in \Sigma(\mathcal{F})$ telle que $\mathcal{F}^\alpha(k_v) = \emptyset$;*
- (iii) *$\ker i_\lambda = \emptyset$, i.e. i_λ ne prend pas la valeur 0;*
- (iv) *pour un torseur \mathcal{F} de type λ , et pour tout $\{P_v\} \in X(\mathbf{A}_k)$,*

$$\sum_v \tau_v(\mathcal{F}(P_v)) \neq 0.$$

Remarque 3.4.3. Dans (ii) et (iv), l'expression "pour un torseur \mathcal{F} de type λ " signifie aussi bien "il existe un torseur \mathcal{F} de type λ " que "pour tout torseur \mathcal{F} de type λ " ou encore "étant donné un torseur \mathcal{F} de type λ ", la validité des conditions (ii) et (iv) ne dépendant pas du choix de \mathcal{F} dans $\text{Tors}(X, S, \lambda)$.

Le fait que dans la somme figurant dans la condition (iv) presque tous les termes soient nuls résulte de l'énoncé de bonne réduction 3.2.3 comme indiqué ci-après au pas n° 3 de la démonstration du lemme 3.4.4.

La condition (i) constitue la version géométrique de \mathcal{O}_λ'' , la condition (ii) en est la version géométrique "effective", les expressions (iii) et (iv) en sont les versions algébriques qui permettent de faire le lien, dans les exemples, avec les versions "calculatoires" fonctionnelles.

Démonstration. L'énoncé (i) est la définition même de \mathcal{O}_λ'' . Comme à la proposition 3.2.1, il équivaut à

- (i') *pour un torseur \mathcal{F} de type λ , et pour tout $\alpha \in H^1(k, S)$, il existe v telle que $\mathcal{F}^\alpha(k_v) = \emptyset$.*

La définition même de i_λ montre que l'énoncé (iii) équivaut à (iv). L'équivalence de (i'), (ii), et (iv) résulte alors du lemme suivant:

LEMME 3.4.4. *Soit \mathcal{F} un torseur de type λ . Les conditions suivantes sont équivalentes:*

- (a) *Pour tout $\alpha \in H^1(k, S)$, il existe une place v telle que $\mathcal{F}^\alpha(k_v) = \emptyset$.*
- (b) *Pour tout $\alpha \in \text{III}_{\Sigma(\mathcal{F})}^1(k, S)$, il existe une place $v \in \Sigma(\mathcal{F})$ telle que $\mathcal{F}^\alpha(k_v) = \emptyset$.*
- (c) *Pour tout $\{P_v\} \in X(\mathbf{A}_k)$, on a: $\sum_v \tau_v(\mathcal{F}(P_v)) \neq 0$.*

Démonstration.

1. Notons d'abord que (a) équivaut de façon immédiate à

(a') Pour tout $\alpha \in H^1(k, S)$, il existe une place v telle que, pour tout $P_v \in X(k_v)$, on ait

$$\mathcal{F}^\alpha(P_v) \neq 0.$$

2. Ensuite, compte tenu de la suite exacte

$$H^1(k, S) \longrightarrow \bigoplus_{v \in \Omega_k} H^1(k_v, S) \xrightarrow{\Sigma_v \tau_v} H^1(k, \hat{S})^\sim$$

rappelée en (3.0.7), on voit que la condition (c) équivaut à celle-ci: pour tout $\{P_v\} \in X(\mathbf{A}_k)$, la famille $\{\mathcal{F}(P_v)\}$ n'appartient pas à l'image de $H^1(k, S)$, autrement dit, pour tout $\alpha \in H^1(k, S)$, il existe une place v telle que $\mathcal{F}(P_v) \neq \text{res}_v(\alpha)$, où res_v désigne la restriction de \mathfrak{g} à \mathfrak{g}^v ; ainsi, la condition (c) équivaut à

(c') Pour tout $\{P_v\} \in X(\mathbf{A}_k)$ et pour tout $\alpha \in H^1(k, S)$, il existe une place v telle que $\mathcal{F}^\alpha(P_v) \neq 0$.

3. On va montrer le résultat auxiliaire suivant:

(br) Pour tout $\alpha \in \text{III}_{\Sigma(\mathcal{F})}^1(k, S)$ et tout $w \notin \Sigma(\mathcal{F})$, on a $\mathcal{F}^\alpha(k_w) \neq \emptyset$.

Soit $w \notin \Sigma(\mathcal{F})$. Par hypothèse, il existe $P_w \in X(k_w)$. Comme w est une place de bonne réduction pour \mathcal{F} , on a $\mathcal{F}(P_w) = 0$ d'après 3.2.3. De plus, les hypothèses sur α et sur w impliquent $\text{res}_w(\alpha) = 0$ dans $H^1(k_w, S)$. Finalement

$$\mathcal{F}^\alpha(P_w) = \mathcal{F}(P_w) - \text{res}_w(\alpha) = 0,$$

ce qui établit le résultat annoncé.

4. (a) \Rightarrow (b). Conséquence immédiate du résultat de bonne réduction (br) ci-dessus: la place v de (a) appartient nécessairement à $\Sigma(\mathcal{F})$.

5. (b) \Rightarrow (a). Pour vérifier (a), il suffit de considérer $\alpha \notin \text{III}_{\Sigma(\mathcal{F})}^1(k, S)$. Il existe alors une place de bonne réduction w telle que $\text{res}_w(\alpha) \neq 0$ dans $H^1(k_w, S)$. Quel que soit $P_w \in X(k_w)$, on a donc, w étant de bonne réduction, $\mathcal{F}(P_w) = 0$ d'après 3.2.3, et par suite:

$$\mathcal{F}^\alpha(P_w) = \mathcal{F}(P_w) - \text{res}_w(\alpha) = -\text{res}_w(\alpha) \neq 0.$$

Ceci implique $\mathcal{F}^\alpha(k_w) \neq \emptyset$.

6. (a') \Rightarrow (c'). Soient $\{P_v\} \in X(\mathbf{A}_k)$ et $\alpha \in H^1(k, S)$. D'après (a'), il existe une place v telle que, en tout point de $X(k_v)$, en particulier en P_v , la valeur de \mathcal{F}^α soit $\neq 0$.

On note (a'') la négation de (a') et (c'') celle de (c').

7. (a'') \Rightarrow (c''). Par hypothèse, il existe $\alpha \in H^1(k, S)$ ayant la propriété suivante: pour toute place v de k , il existe $P_v \in X(k_v)$ tel que $\mathcal{F}^\alpha(P_v) = 0$. On a

ainsi trouvé $\{P_v\} \in X(\mathbf{A}_k)$ et $\alpha \in H^1(k, S)$ tels que, pour toute place v ,

$$\mathcal{T}^\alpha(P_v) = 0.$$

Autrement dit, la condition (c'') est vérifiée.

On a ainsi fini de prouver l'équivalence (a) \Leftrightarrow (c), ce qui achève la démonstration du lemme, et donc celle de la proposition.

COROLLAIRE 3.4.5. *Il suffit d'un nombre fini d'opérations élémentaires pour déterminer si l'obstruction \mathcal{O}'_λ est vide ou non.*

On a conservé les mêmes hypothèses sur X et suppose $\text{Tors}(X, S, \lambda) \neq \emptyset$, i.e. $\partial(\lambda) = 0$. Pour déterminer si \mathcal{O}'_λ est vide ou non, on part d'un torseur \mathcal{T} de type λ quelconque. On détermine un ensemble fini Σ de places contenant $\Sigma(\mathcal{T})$, autrement dit tel que \mathcal{T} ait bonne réduction en dehors de Σ . Comme le groupe $\text{III}^1_\Sigma(k, S)$ est fini, on doit considérer un nombre fini de torseurs \mathcal{T}^α , à savoir pour $\alpha \in \text{III}^1_\Sigma(k, S)$, et vérifier pour chacune de ces variétés, si elle a un point dans k_v pour $v \in \Sigma$, ou non. Par application du lemme de Hensel, ceci conduit à un nombre fini d'opérations "élémentaires", qui peuvent être évidemment difficiles à mettre en oeuvre dans les exemples.

COROLLAIRE 3.4.6. *Si $\Psi^1(k, S) = 0$, l'obstruction \mathcal{O}'_λ est vide.*

Démonstration. C'est une conséquence de la version 3.4.2(iii) de l'obstruction, car d'après la suite exacte (3.0.7), l'application $i_\lambda(\{P_v\}) = \sum_v \tau_v(\mathcal{T}(P_v))$ se factorise par $\Psi^1(k, S)$ et vaut donc nécessairement 0.

COROLLAIRE 3.4.7. *Soit X une k -variété rationnelle, complète et lisse, telle que $\prod_v X(k_v) \neq \emptyset$. Si $H^1(\mathfrak{g}, \text{Pic } \bar{X}) = 0$, l'obstruction de Picard au principe de Hasse est vide. Autrement dit, il existe un torseur universel \mathcal{T} tel que $\prod_v \mathcal{T}(k_v) \neq \emptyset$, et de même il existe un torseur de tout type λ ayant la même propriété.*

Démonstration. Par hypothèse, le terme médian de la suite exacte (3.0.8)

$$0 \rightarrow \Psi^1(k, S_0) \rightarrow H^1(k, \hat{S}_0) \rightarrow \text{III}^2(k, S_0) \rightarrow 0$$

est nul. On a donc $\text{III}^2(k, S_0) = 0$, ce qui assure l'existence d'un torseur universel \mathcal{T} , et $\Psi^1(k, S_0) = 0$, ce qui assure que la deuxième obstruction est également vide.

3.5. Obstruction de Picard et obstruction de Manin au principe de Hasse. Le résultat principal du §3 est le suivant:

THÉORÈME 3.5.1. *Soient k un corps de nombres et X une k -variété rationnelle, complète et lisse, telle que $\prod_v X(k_v) \neq \emptyset$. L'obstruction de Picard au principe de Hasse coïncide avec celle de Manin. En particulier, si l'obstruction de Manin est*

vide, il existe un toreur universel \mathcal{T} sur X tel que

$$\mathcal{T}(k_v) \neq \emptyset \quad \text{pour toute place } v \text{ de } k,$$

et de même pour tout autre type λ de toreur.

Démonstration. Elle utilise essentiellement la proposition 3.3.2 sur la première obstruction et la proposition 2.7.10.

S'il n'existe pas de toreur universel, l'obstruction de Picard est "non vide" par définition même, et celle de Manin est "non vide" d'après la proposition 3.3.2.

On peut donc supposer qu'il existe un toreur universel. D'après la proposition 2.2.8, l'obstruction élémentaire est nulle et le g -morphisme naturel $\bar{k}^* \rightarrow k(X)^*$ admet ainsi une rétraction σ . Il est alors utile de dériver de la proposition 2.7.10 l'énoncé suivant:

LEMME 3.5.2. *Soient k un corps quelconque et X une k -variété rationnelle, complète et lisse. Etant donné un toreur universel \mathcal{T} sur X et $\mathcal{A} \in \text{Br } X$, il existe $a_0 \in \text{Br } k$ tel que, pour toute extension K/k , on ait, pour tout $P \in X(K)$, l'égalité*

$$(3.5.1) \quad \mathcal{T}(P) \cup \chi_K(\mathcal{A}) = \mathcal{A}(P) + \text{Res}_k a_0 \quad \text{dans } \text{Br } K.$$

Démonstration du lemme. Dans cet énoncé, $\mathcal{T}(P) \in H^1(K, S_K)$, et la notation Res_K désigne la restriction $\text{Br } k \rightarrow \text{Br } K$, tandis que

$$\chi_K: \text{Br } X_K \rightarrow H^1(K, \text{Pic } X_{\bar{K}})$$

désigne l'application naturelle donnée par (1.5.0).

Comme deux toreurs universels \mathcal{T} et \mathcal{T}' diffèrent par un élément $\alpha \in H^1(k, S_0)$, les expressions $\mathcal{T}(P) \cup \chi_K(\mathcal{A})$ et $\mathcal{T}'(P) \cup \chi_K(\mathcal{A})$ diffèrent par $\text{Res}_K(a)$ où $a = \alpha \cup \chi(\mathcal{A})$ est un élément fixe de $\text{Br } k$. Il suffit donc de montrer le lemme pour un toreur universel particulier. Soit $\mathcal{T}_0 := \mathcal{T}_0^\sigma$ le toreur universel trivial par σ . On peut appliquer la proposition 2.7.10 en prenant $S = S_0$ et $\lambda = \lambda_0$. Le diagramme de 2.7.10 s'écrit alors au niveau de K :

$$\begin{array}{ccc} X(K) \times \text{Br } X_K & & \text{Br } K. \\ \mathcal{T}_0 \downarrow & \chi_K \downarrow \uparrow t_\sigma & \uparrow \cup \\ H^1(K, S_0) \times H^1(K, \text{Pic } \bar{X}) & & \end{array}$$

D'après la proposition 2.7.10,

$$\mathcal{T}_0(P) \cup \beta = (t_\sigma(\beta))(P) \quad \text{pour tout } \beta \in H^1(K, \text{Pic } \bar{X}).$$

Comme

$$t_\sigma \chi(\mathcal{A}) - \mathcal{A} =: a_0 \in \text{Br } k,$$

on obtient, pour $\beta = \chi(\mathcal{A})$:

$$\mathcal{T}_0(P) \cup \chi_K(\mathcal{A}) = \mathcal{A}(P) + \text{Res}_K a_0.$$

COROLLAIRE 3.5.3. *Sous les mêmes hypothèses,*

$$(3.5.2) \quad i_{\mathcal{A}} = \langle i_{\lambda_0}, \chi(\mathcal{A}) \rangle \quad \text{pour tout } \mathcal{A} \in \text{Br } X,$$

autrement dit

$$(3.5.3) \quad i_{\text{Br}} = \langle i_{\lambda_0}, \chi \rangle.$$

De plus,

$$(3.5.4) \quad \ker i_{\text{Br}} = \ker i_{\lambda_0}.$$

La notation $\langle \ , \ \rangle$ désigne l'accouplement

$$H^1(k, \hat{S}_0)^\sim \times H^1(k, \text{Pic } \bar{X}) \rightarrow \mathbf{Q}/\mathbf{Z},$$

et $i_{\text{Br}} = \{i_{\mathcal{A}}\}: X(\mathbf{A}_k) \rightarrow \text{Hom}(\text{Br } X, \mathbf{Q}/\mathbf{Z})$. Autrement dit, le corollaire affirme qu'on a un triangle commutatif

$$(3.5.5) \quad \begin{array}{ccc} X(\mathbf{A}_k) & \xrightarrow{i_{\text{Br}}} & \text{Hom}(\text{Br } X, \mathbf{Q}/\mathbf{Z}) \\ & \searrow i_{\lambda_0} & \nearrow \bar{\chi} \\ & & H^1(k, \text{Pic } \bar{X})^\sim. \end{array}$$

Démonstration du corollaire. Il s'agit de voir que, pour tout $\{P_v\} \in X(\mathbf{A}_k)$,

$$\langle i_{\lambda_0}, \chi(\mathcal{A}) \rangle(P_v) = i_{\mathcal{A}}(P_v),$$

autrement dit, si \mathcal{T}_0 est un torseur universel:

$$(3.5.6) \quad \sum_v (\tau_v(\mathcal{T}_0(P_v))) (\chi(\mathcal{A})) = \sum_v \text{inv}_v(\mathcal{A}(P_v)).$$

Par définition de τ_v ,

$$(3.5.7) \quad (\tau_v(\mathcal{T}_0(P_v))) (\chi(\mathcal{A})) = \text{inv}_v(\mathcal{T}_0(P_v) \cup \chi(\mathcal{A})).$$

Or, d'après le lemme 3.5.2, étant donnés \mathcal{T}_0 et \mathcal{A} , il existe $a_0 \in \text{Br } k$ telle que, pour tout $P_v \in X(k_v)$:

$$(3.5.8) \quad \mathcal{T}_0(P_v) \cup \chi(\mathcal{A}) = \mathcal{A}(P_v) + \text{Res}_v a_0 \quad \text{dans } \text{Br } k_v.$$

Comme, par la loi de réciprocité, $\sum_v \text{inv}_v(a_0) = 0$, les formules (3.5.8) et (3.5.7) établissent (3.5.6), donc les assertions (3.5.2) et (3.5.3) du corollaire. Comme enfin χ est surjective, $\tilde{\chi}$ est injective et l'égalité (3.5.4) résulte alors aussitôt du triangle commutatif (3.5.5).

Fin de la démonstration du théorème. Par définition, l'obstruction de Manin équivaut à $\ker i_{\text{Br}} = \emptyset$. Comme on a supposé la première obstruction "vide", l'obstruction de Picard équivaut à la seconde obstruction, autrement dit à $\ker i_{\lambda_0} = \emptyset$. L'équivalence des obstructions de Manin et de Picard est alors une conséquence immédiate de l'égalité (3.5.4) de ces deux noyaux dans $X(\mathbf{A}_k)$. Notons enfin que, par définition même, l'obstruction de Picard signifie qu'il n'y a pas de torseur universel ayant des points dans chaque complété de k . Si au contraire il en existe un \mathcal{T}_0 et si λ est un type quelconque, le torseur \mathcal{T} sur X sous S obtenu par produit contracté de \mathcal{T}_0 et S sous S_0 agissant sur \mathcal{T}_0 comme groupe du torseur et sur S via $D(\lambda): S_0 \rightarrow S$ a évidemment aussi des points dans chaque complété de k .

Remarque 3.5.4. On vérifie facilement que si $\lambda \in \text{Hom}_{\mathfrak{g}}(\hat{S}, \hat{S}_0)$ est un type quasi-admissible, la flèche naturelle $H^1(k, \hat{S}_0) \sim \rightarrow H^1(k, \hat{S}) \sim$ est injective, d'où il suit que, si la première obstruction au principe de Hasse est vide, l'obstruction \mathcal{O}_{λ} équivaut à l'obstruction \mathcal{O}_{λ_0} . On peut aussi montrer en toute généralité que si λ est un type admissible, l'obstruction \mathcal{O}_{λ} équivaut à l'obstruction \mathcal{O}_{λ_0} , et donc à l'obstruction de Manin.

3.6. Exemples.

PROPOSITION 3.6.1. *Les variétés suivantes vérifient le principe de Hasse:*

- (a) les variétés de Severi-Brauer;
- (b) les k -formes de $\mathbf{P}^1 \times \mathbf{P}^1$, en particulier les quadriques lisses dans \mathbf{P}_k^3 ;
- (c) les k -formes des surfaces F_n ($n \geq 2$);
- (d) les surfaces de del Pezzo de degré 6.

Démonstration. Pour chacune des ces variétés, la propriété $X(k) \neq \emptyset$ entraîne que X est k -rationnelle. D'après l'appendice 2.B, le \mathfrak{g} -module $\text{Pic } \bar{X}$ est stablement de permutation, d'où $\text{III}^2(k, S_0) = 0$. Si $\prod_v X(k_v) \neq \emptyset$, l'obstruction élémentaire est donc nulle pour X . Or, pour ces variétés-là, l'obstruction élémentaire est, sur un corps quelconque, la seule obstruction à l'existence d'un point rationnel (cf. 2.2.11).

Le principe de Hasse pour les espaces homogènes principaux des groupes semi-simples simplement connexes sans facteur de type E_8 (Kneser-Harder) permet de déduire aisément de [48] le résultat suivant:

THÉORÈME 3.6.2. *Pour un k -compactifié lisse d'un espace homogène principal sous un groupe algébrique linéaire connexe sans facteur de type E_8 , la première obstruction au principe de Hasse est la seule.*

Exemples 3.6.3. Il s'agit d'exemples d'obstructions \mathcal{O}'_λ associées à certains tores. Ce sont souvent ces obstructions qui apparaissent dans les contre-exemples au principe de Hasse qu'on trouve dans la littérature, sans relation a priori avec les obstructions attachées aux toiseurs universels.

Soit K/k une extension galoisienne finie, de groupe de Galois G et soit $S = R_{K/k}\mathbf{G}_m/\mathbf{G}_{m,k}$. De la suite exacte

$$1 \rightarrow \mathbf{G}_{m,k} \rightarrow R_{K/k}\mathbf{G}_m \rightarrow S \rightarrow 1$$

on déduit une surjection

$$\rho: H^1(X, S) \rightarrow \text{Br}(X, K).$$

On laisse au lecteur le soin de démontrer la proposition suivante (voir aussi 2.7.8(c)), qui fournit une autre démonstration du fait que l'obstruction de Manin équivaut à l'obstruction de Picard (théorème 3.5.1).

PROPOSITION 3.6.4. *Soient k un corps de nombres et X une k -variété rationnelle propre et lisse satisfaisant $X(\mathbf{A}_k) \neq \emptyset$, et soient K et S comme ci-dessus.*

(a) *Soit \mathcal{T} un toiseur sur X sous S de type $\lambda \in \text{Hom}_{\mathfrak{g}}(\hat{S}, \hat{S}_0)$. Soit $\mathcal{A} = \rho(\mathcal{T}) \in \text{Br}(X, K)$. L'obstruction \mathcal{O}'_λ est équivalente à l'obstruction de Manin associée à \mathcal{A} (i.e. au sous-groupe de $\text{Br}_a X$ engendré par \mathcal{A}).*

(b) *L'obstruction de Manin pour $\text{Br}(X, K)$ équivaut à la condition: il existe un entier m et $\lambda \in \text{Hom}_{\mathfrak{g}}(\hat{S}^m, \hat{S}_0)$ tels qu'on ait \mathcal{O}'_λ .*

(c) *Soit $(\lambda_1, \dots, \lambda_m)$ un système générateur du groupe $\text{Hom}_{\mathfrak{g}}(\hat{S}, \hat{S}_0)$. Soit*

$$\mu = (\lambda_1, \dots, \lambda_m) \in \text{Hom}_{\mathfrak{g}}(\hat{S}^m, \hat{S}_0).$$

Si l'obstruction élémentaire $\partial(\lambda_0)$ est nulle, l'obstruction de Manin associée au groupe $\text{Br}(X, K)$ est équivalente à \mathcal{O}'_μ .

(d) *Supposons l'obstruction élémentaire nulle, ou $H^3(G, K^*) = 0$, ce qui est loisible quitte à agrandir K , et supposons que X_K est K -rationnelle. Alors, pour μ comme en (c), l'obstruction \mathcal{O}'_μ équivaut à l'obstruction de Manin associée à $\text{Br } X$.*

Soit toujours K/k une extension finie galoisienne de corps de nombres, de groupe de Galois G , et considérons maintenant le k -tore $S = R^1_{K/k}\mathbf{G}_m$. On a ici la suite exacte de k -tores

$$1 \rightarrow S \rightarrow R_{K/k}\mathbf{G}_m \xrightarrow{N} \mathbf{G}_{m,k} \rightarrow 1,$$

où $N = N_{K/k}$ désigne la norme de K à k . On en tire d'abord $\text{III}^2(k, S) = 0$. La suite exacte du corps de classes (3.0.7) donne alors l'isomorphisme

$$\Psi^1(k, S) = \text{coker} \left(k^*/NK^* \rightarrow \bigoplus_v k_v^*/NK_v^* \right) \xrightarrow[\cong]{\sum_v i_v} G/G',$$

où G' désigne le groupe dérivé de G , et où chaque $i_v: k_v^*/NK_w^* \rightarrow G/G'$ vient de l'isomorphisme du corps de classes local $k_v^*/NK_w^* \cong G_v/G'_v$, isomorphisme donné, lorsque v est non ramifiée dans K , par l'application $\alpha \rightarrow F_v^{v(\alpha)}$, où F_v désigne la classe de conjugaison des Frobenius en v .

PROPOSITION 3.6.5. *Soit S comme ci-dessus, et soit X une k -variété rationnelle propre et lisse telle que $X(\mathbf{A}_k) \neq \emptyset$. Soit $\lambda \in \text{Hom}_{\mathfrak{g}}(\hat{S}, \hat{S}_0)$. L'obstruction \mathcal{O}'_{λ} est vide: il existe toujours des torseurs de type λ . L'existence d'une obstruction \mathcal{O}'_{λ} équivaut à celle d'une fonction $f \in k(X)^*$ dont le diviseur soit une norme d'un diviseur de X_K , satisfaisant les conditions équivalentes suivantes, où U désigne l'ouvert où f est inversible:*

- (i) pour tout $\alpha \in k^*$, il existe v telle que, pour tout $P_v \in U(k_v)$, on ait $\alpha \cdot f(P_v) \notin NK_w^*$;
- (ii) pour tout $\{P_v\} \in \prod_v U(k_v)$, on a: $\prod_v i_v(f(P_v)) \neq 1$.

Démonstration. Que \mathcal{O}'_{λ} soit vide résulte de $\text{III}^2(k, S) = 0$. La seconde partie de l'énoncé est une simple traduction de la proposition 3.4.2, compte tenu de l'exemple 2.7.8 (b): un argument de continuité permet de se limiter aux points de l'ouvert U (cf. [13], §4).

Remarque 3.6.6. La proposition ci-dessus permet de rendre compte de beaucoup des contre-exemples au principe de Hasse pour des variétés rationnelles que l'on trouve dans la littérature. Ainsi les exemples de [39], [53], [3] §4, [13] §7 et [37] relèvent-ils tous de cette proposition, dans le cas particulièrement simple où K/k est une extension cyclique. On notera que dans ce dernier cas, on dispose d'isomorphismes

$$R^1_{K/k} \mathbf{G}_m \cong R_{K/k} \mathbf{G}_m / \mathbf{G}_{m,k},$$

ce qui permet de passer de l'obstruction étudiée en 3.6.5 à celle étudiée en 3.6.4, et donc à l'obstruction de Manin. En pratique cependant, c'est plutôt la version calculatoire 3.6.5, en termes de fonctions (dont les diviseurs sont des normes), qui apparaît naturellement.

Il y a cependant un certain nombre d'exemples qui ne rentrent pas dans le moule simple de la proposition 3.6.5. Nous laissons au lecteur le plaisir de découvrir les tores S et les types λ sous-jacents au §3 de [3] et à l'exemple de Cassels et Guy [8] (pour ce dernier exemple, voir [15]).

Remarque 3.6.7. En principe, étant donné une k -variété X , lisse, complète et rationnelle, on peut en un nombre fini d'opérations "élémentaires" déterminer si l'obstruction de Picard au principe de Hasse, ou celle de Manin, est "vide" ou non. Néanmoins, en pratique, ces calculs peuvent devenir rapidement inextricables, et même dans des cas apparemment élémentaires posent des problèmes délicats.

Le cas a priori le plus simple est celui où X est rationnelle sur une extension quadratique—ou plus généralement cyclique— K/k . Le cas des surfaces de

Châtelet généralisées (cf. [42], chap. VI, [13]) est particulièrement simple à traiter. Cependant, même dans ce cadre, il convient parfois de passer à des extensions non cycliques pour calculer *effectivement* l'obstruction de Manin. Pour des exemples où on utilise une extension biquadratique, voir [38] et [50]. Dans le cas des surfaces cubiques diagonales, on utilise une extension bicubique, voir [15].

3.7. *Les obstructions à l'approximation faible.* Tout comme pour le principe de Hasse, le groupe de Brauer et les toseurs permettent de définir des obstructions à l'approximation faible.

LEMME 3.7.1. *Soit X une variété algébrique propre et lisse sur le corps de nombres k . Soient S un k -tore, $\mathcal{A} \in \text{Br } X$ et*

$$\lambda \in \text{Hom}_{\mathfrak{g}}(\hat{S}, \text{Pic } \bar{X}).$$

Les applications

$$i_{\mathcal{A}}: X(\mathbf{A}_k) \rightarrow \mathbf{Q}/\mathbf{Z} \quad \text{et} \quad i_{\lambda}: X(\mathbf{A}_k) \rightarrow \mathbf{Q}/\mathbf{Z}$$

sont continues et triviales sur l'image de $X(k)$ par l'application diagonale. De même

$$i_{\text{Br}}: X(\mathbf{A}_k) \rightarrow \text{Hom}(\text{Br } X, \mathbf{Q}/\mathbf{Z}) \quad \text{et} \quad i_{\lambda_0}: X(\mathbf{A}_k) \rightarrow H^1(\mathfrak{g}, \text{Pic } \bar{X})^{\sim},$$

en supposant pour cette dernière que $\text{Pic } \bar{X}$ est \mathbf{Z} -libre de type fini.

Démonstration. Voir [41], [42], [48] p. 36.

COROLLAIRE 3.7.2. *Chacune des conditions*

$$i_{\mathcal{A}} \neq 0, \quad i_{\lambda} \neq 0, \quad i_{\text{Br}} \neq 0 \quad \text{et} \quad i_{\lambda_0} \neq 0$$

est une obstruction à l'approximation faible pour X . Plus précisément:

$$(3.7.1) \quad \overline{X(k)} \subset \ker i_{\text{Br}} = \ker i_{\lambda_0} \subset X(\mathbf{A}_k).$$

Démonstration. En effet, ces diverses applications sont continues et triviales sur l'image diagonale de $X(k)$, donc sur son adhérence.

Définition 3.7.3 [19]. On appelle *obstruction de Manin—ou de Brauer—à l'approximation faible* pour X la condition $i_{\text{Br}} \neq 0$, autrement dit la condition:

$$(3.7.2) \quad \text{il existe } \mathcal{A} \in \text{Br } X \text{ et } \{P_v\} \in X(\mathbf{A}_k) \text{ tels que } \sum_v \text{inv}_v(\mathcal{A}(P_v)) \neq 0.$$

Définition 3.7.4. Etant donné un type λ , on appelle *obstruction \mathcal{O}_{λ}^a à l'approximation faible* pour X la condition $i_{\lambda} \neq 0$, définie par les toseurs de type λ ,

autrement dit la condition:

(3.7.3)

étant donné un torseur \mathcal{F} de type λ , il existe $\{P_v\} \in X(\mathbf{A}_k)$

$$\text{tel que } \sum_v \tau_v(\mathcal{F}(P_v)) \neq 0.$$

Définition 3.7.5. Supposons que $\text{Pic } \bar{X}$ est \mathbf{Z} -libre de type fini. On appelle *obstruction de Picard à l'approximation faible pour X* la condition $\mathcal{O}_{\lambda_0}^a$, autrement dit la condition:

(3.7.4)

étant donné un torseur universel \mathcal{F}_0 , il existe $\{P_v\} \in X(\mathbf{A}_k)$

$$\text{tel que } \sum_v \tau_v(\mathcal{F}_0(P_v)) \neq 0.$$

On notera que cette obstruction est à valeurs dans $\Psi^1(k, S_0) \subset H^1(\mathfrak{g}, \text{Pic } \bar{X}) \sim$.

THÉORÈME 3.7.6. *L'obstruction de Picard à l'approximation faible a les propriétés suivantes:*

- (i) *c'est la plus fine des obstructions \mathcal{O}_{λ}^a ;*
- (ii) *elle coïncide avec celle de Brauer-Manin;*
- (iii) *elle est nulle si $\Psi^1(k, S_0) = 0$, en particulier si $H^1(\mathfrak{g}, \text{Pic } \bar{X}) = 0$.*

Démonstration. Les assertions (i) et (iii) sont immédiates; quant à (ii), c'est une conséquence de (3.7.1), en fait du diagramme (3.5.5).

De façon générale, si \mathcal{F} est un torseur de type λ , et si Σ_0 est un ensemble fini de places en dehors duquel \mathcal{F} a bonne réduction, on a la factorisation suivante de $i_{\mathcal{F}} = i_{\lambda}$:

$$(3.7.5) \quad \begin{array}{ccccccc} \mathcal{F}(k) & \xrightarrow{q} & X(k) & \xrightarrow{\partial} & \text{III}_{\Sigma_0}^1(k, S) & \longleftrightarrow & H^1(k, S) \\ \downarrow \delta_{\mathcal{F}} & & \downarrow \delta_X & & \downarrow \iota & & \downarrow \\ \mathcal{F}(\mathbf{A}_k) & \xrightarrow{\{q_v\}} & X(\mathbf{A}_k) & \xrightarrow{\{\partial_v\}} & \bigoplus_{v \in \Sigma_0} H^1(k_v, S) & \longleftrightarrow & \bigoplus_{v \in \Omega_k} H^1(k_v, S) \\ & & \searrow i_{\mathcal{F}} & & \downarrow & & \downarrow \\ & & & & \Psi_{\Sigma_0}^1(k, S) & \longleftrightarrow & \Psi^1(k, S) \\ & & & & & & \downarrow \\ & & & & & & H^1(k, \hat{S})^- . \end{array}$$

En particulier, l'obstruction \mathcal{O}_{λ}^a disparaît dès que $\Psi^1(k, S) = 0$.

Remarque 3.7.7. On vérifie aisément que si λ est un type quasi-admissible, l'obstruction \mathcal{O}_λ^a coïncide avec l'obstruction de Picard $\mathcal{O}_{\lambda_0}^a$.

Exemples 3.7.8. Comme pour les contre-exemples au principe de Hasse, la plupart des contre-exemples à l'approximation faible pour des variétés rationnelles que l'on trouve dans la littérature peuvent être analysés du point de vue ci-dessus en utilisant des tores S du type $R_{K/k}^1 \mathbf{G}_m$. Il en est ainsi des contre-exemples de [53], [19] et [13] §7.

3.8. Deux hypothèses arithmétiques sur les toreseurs universels. Dans ce paragraphe, k est toujours un corps de nombres, et X une k -variété rationnelle, propre et lisse.

Nous indiquons les conséquences des deux hypothèses suivantes sur les toreseurs universels sur X . On notera que (H3) est un affaiblissement de l'hypothèse (H1') introduite au §2.8:

(H2) *Les toreseurs universels sur X satisfont le principe de Hasse:* si un tel toseur \mathcal{T} a des points dans chaque complété k_v de k , il a aussi un point dans k .

(H3) *Les toreseurs universels sur X satisfont l'approximation faible dès qu'ils possèdent un point dans k :* si Σ est un ensemble (fini ou non) de places de k , et \mathcal{T} un toseur universel sur X avec $\mathcal{T}(k) \neq \emptyset$, alors $\mathcal{T}(k)$ est dense dans le produit topologique des $\mathcal{T}(k_v)$ pour v dans Σ .

De fait, il est également utile de considérer les hypothèses analogues pour les toreseurs d'autres types $\lambda \in \text{Hom}_{\mathfrak{q}}(\hat{S}, \text{Pic } \bar{X})$:

(H2) $_\lambda$ *Les toreseurs sur X de type λ satisfont le principe de Hasse.*

(H3) $_\lambda$ *Les toreseurs sur X de type λ satisfont l'approximation faible dès qu'ils possèdent un point dans k .*

Les meilleurs candidats pour vérifier le principe de Hasse ou l'approximation faible sont a priori les toreseurs universels, et plus généralement les toreseurs quasi-admissibles relativement à une extension galoisienne K/k sur laquelle X devient K -rationnelle. En effet, sur les compactifiés lisses de tous ces toreseurs, les obstructions de Brauer-Manin au principe de Hasse et à l'approximation faible disparaissent d'après le théorème 2.1.2.

Les hypothèses (H2) et (H2) $_\lambda$ pour certains types λ ont été établies pour les surfaces de Châtelet généralisées ([27], voir aussi [13] où on étudie des toreseurs quasi-admissibles), et par voie de conséquence pour les modèles de certaines surfaces de Del Pezzo singulières [30]. Elles ont été aussi établies pour de nombreuses autres surfaces fibrées en coniques d'invariant 4 [47]. Elles sont également établies pour certaines hypersurfaces cubiques singulières dans [16]. Quant à (H3), elle a été établie dans certains cas comme conséquence de (H1) (voir §2.8). Pour $k = \mathbf{Q}$, l'hypothèse H de Schinzel implique (H2) $_\lambda$ et (H3) $_\lambda$ pour

certain types λ quasi-admissibles pour une assez large classe de surfaces fibrées en coniques (voir [24]).

On notera que, pour λ quasi-admissible et $X(\mathbf{A}_k) \neq \emptyset$, l'application

$$H^1(k, \hat{S}_0) \xrightarrow{\lambda} H^1(k, \hat{S})$$

induite par λ est injective, ce qui entraîne

$$\ker i_\lambda = \ker i_{\lambda_0}.$$

THÉORÈME 3.8.1. *Supposons que X vérifie $(H2)_\lambda$. Alors l'obstruction de Manin au principe de Hasse pour X est la seule. Sous la même hypothèse, si $H^1(\mathfrak{g}, \text{Pic } \bar{X}) = 0$, le principe de Hasse vaut pour X .*

Démonstration. Si l'obstruction de Manin disparaît sur X , par exemple si $H^1(\mathfrak{g}, \text{Pic } \bar{X}) = 0$, il existe d'après le théorème 3.5.1 un torseur \mathcal{T} de type λ qui a des points dans chaque complété de k , donc dans k d'après l'hypothèse, ce qui, par projection sur X , implique $X(k) \neq \emptyset$.

PROPOSITION 3.8.2. *Si X vérifie $(H2)_\lambda$ et possède un k -point,*

$$\#X(k)/R \geq \#\mathbb{I}^1(k, S) = \#\mathbb{I}^2(k, \hat{S}).$$

Démonstration. Soient $O \in X(k)$ et \mathcal{T} le torseur de type λ sur X et de fibre triviale en O . Considérons, pour tout $\alpha \in \mathbb{I}^1(k, S)$, un torseur \mathcal{T}^α sur X sous S obtenu par torsion de \mathcal{T} par un 1-cocycle de $Z^1(k, S)$ de classe $-\alpha$. La fibre de \mathcal{T}^α en O est un torseur sur $\text{Spec } k$ qui est trivial sur chaque $\text{Spec } k_v$. Ainsi \mathcal{T}^α possède un k_v -point pour chaque v et donc, d'après $(H2)_\lambda$, \mathcal{T}^α possède un k -point. D'où l'énoncé de la proposition, puisque les projections de chacun des $\mathcal{T}^\alpha(k)$ sur $X(k)$ correspondent à des classes différentes pour la R -équivalence.

Remarque 3.8.3. Dans [23] nous avons donné une conjecture (Conjecture A, op cit. p. 443) sur l'ordre du groupe fini $A_0(X)$ pour X une surface rationnelle définie sur un corps de nombres. Il vaut la peine de noter que les arguments développés aux pages 444 et 445 du même article montrent plus généralement le résultat suivant:

PROPOSITION 3.8.4. *Si X est une surface fibrée en coniques sur la droite projective \mathbf{P}_k^1 , avec au plus 5 fibres géométriques dégénérées, si $X(k)$ est non vide et si $(H2)$ vaut pour X , alors la conjecture A vaut pour X .*

PROPOSITION 3.8.5. *Si X vérifie les hypothèses $(H1')_\lambda$ et $(H2)_\lambda$, l'ordre de $X(k)/R$ est fini et divisible par l'ordre de $\mathbb{I}^1(k, S)$.*

Démonstration. Soit i l'application $X(k)/R \rightarrow H^1(k, S)$, d'image finie (proposition 2.7.3) définie par un torseur \mathcal{T} de type λ sur X . La démonstration de la proposition 3.8.2 montre que si γ est dans l'image de i , et si X vérifie $(H2)_\lambda$, pour tout élément α dans $\mathbb{I}^1(k, S)$, l'élément $\gamma - \alpha$ appartient à l'image de i . Comme X vérifie $(H1')_\lambda$, l'application i est injective (proposition 2.8.10), d'où l'énoncé.

Remarque 3.8.6. Sous les hypothèses de la proposition, l'ordre de $X(k)/R$ est en principe déterminable de façon effective. On part de l'application i définie par un toreur \mathcal{T} de type λ et de fibre triviale en un point $O \in X(k)$. On commence par déterminer un ensemble fini Σ de places de k tel que l'image de i soit contenue dans le groupe fini $\text{III}_{\Sigma}^1(k, S)$ (noyau de la restriction de $H^1(k, S)$ à la somme directe, pour $v \notin \Sigma$, des $H^1(k_v, S)$). Pour chaque $\alpha \in \text{III}_{\Sigma}^1(k, S)$, on considère un toreur \mathcal{T}^α comme plus haut. Chacun de ces toreurs a des k_v -points pour $v \notin \Sigma$. On élimine les α pour lesquels il existe une place $v \in \Sigma$ avec $\mathcal{T}^\alpha(k_v) = \emptyset$. L'ordre de $X(k)/R$ est égal au nombre des α qui subsistent.

PROPOSITION 3.8.7. *Supposons $X(k) \neq \emptyset$. Si X vérifie $(H2)_\lambda$ et $(H3)_\lambda$, l'adhérence de $X(k)$ dans $X(\mathbf{A}_k)$ est ouverte et elle coïncide avec le noyau de l'application i_λ .*

Démonstration. C'est une conséquence du diagramme (3.7.5). D'après (3.7.1), on sait déjà que l'adhérence de $X(k)$ est contenue dans le noyau de i_λ . Inversement, soit $\{P_v\} \in X(\mathbf{A}_k)$ tel que $i_\lambda(P_v) = 0$. Il existe $\alpha \in \text{III}_{\Sigma_0}^1(k, S)$ tel que $\iota(\alpha) = \{\partial_v(P_v)\}$. Considérons alors le toreur $\mathcal{T}' := \mathcal{T}^\alpha$. Il a encore bonne réduction en dehors de Σ_0 , et on peut considérer le diagramme (3.7.5) pour \mathcal{T}' au lieu de \mathcal{T} . On trouve alors, pour toute place v :

$$\partial'_v(P_v) = \partial_v(P_v) - \iota_v(\alpha) = 0.$$

Ainsi, $\mathcal{T}'(P_v) = 0$, autrement dit il existe $Q_v \in \mathcal{T}'(k_v)$ tel que $q_v(Q_v) = P_v$. En particulier, $\prod_v \mathcal{T}'(k_v) \neq \emptyset$ et, puisque, par hypothèse, les toreurs de type λ vérifient le principe de Hasse et l'approximation faible, $\mathcal{T}'(k)$ est dense dans $\mathcal{T}'(\mathbf{A}_k)$. Etant donné un voisinage ouvert de $\{P_v\}$, il existe donc $Q \in \mathcal{T}'(k)$ tel que $\{q_v \delta_{\mathcal{T}'}(Q)\}$ appartienne à ce voisinage ouvert, i.e. $\delta_X q(Q)$ appartient à ce voisinage ouvert, et $\{P_v\}$ appartient à l'adhérence de $\delta_X(X(k))$.

COROLLAIRE 3.8.8. *Supposons $X(k) \neq \emptyset$ et que les toreurs d'un certain type λ vérifient le principe de Hasse et l'approximation faible. Alors, X vérifie l'approximation faible sous l'une quelconque des hypothèses suivantes:*

- (i) *L'obstruction à l'approximation faible définie par les toreurs de type λ est vide.*
- (ii) *L'obstruction de Brauer-Manin à l'approximation faible est vide.*
- (iii) *$H^1(k, \hat{S}) = 0$.*

Démonstration. L'assertion dans le cas (i) dérive de la proposition précédente 3.8.7, et elle implique l'assertion dans le cas (iii); d'après le théorème 3.7.6, l'hypothèse (ii) implique l'hypothèse (i).

PROPOSITION 3.8.9. *Si k est un corps de nombres et si X vérifie $(H3)_\lambda$ et possède un k -point, il existe un ensemble fini Σ_0 de places de k tel que pour tout ensemble fini Σ de places de k ne rencontrant pas Σ_0 , l'image de $X(k)$ par l'application diagonale est dense dans le produit topologique, pour v dans Σ , des $X(k_v)$.*

Démonstration. Le même argument de bonne réduction qu'à la proposition 2.8.19 montre qu'il existe un torseur \mathcal{T} de type λ sur X avec $\mathcal{T}(k) \neq \emptyset$ et un ensemble fini Σ_0 de places de k (contenant les places réelles), tel que, pour tout ensemble Σ de places de k ne rencontrant pas Σ_0 , l'application naturelle

$$\prod_{v \in \Sigma} \mathcal{T}(k_v) \rightarrow \prod_{v \in \Sigma} X(k_v)$$

est surjective. Mais, si X vérifie $(H3)_\lambda$, l'approximation faible vaut pour la k -variété lisse \mathcal{T} , c'est-à-dire que $\mathcal{T}(k)$ est dense dans tout produit topologique fini de $\mathcal{T}(k_v)$, ce qui permet de conclure.

PROPOSITION 3.8.10. *Si k est un corps de nombres, si X vérifie $(H3)_\lambda$, et si Σ est un ensemble fini de places de k , l'adhérence de $X(k)$ plongé par l'application diagonale dans le produit topologique, pour v dans Σ , des $X(k_v)$ (où k_v désigne la complétion de k en la place v) est ouverte et fermée dans ce produit. En particulier, si Σ est composé de places réelles, cette adhérence est une union de composantes connexes du produit.*

Démonstration. On peut supposer $X(k) \neq \emptyset$. Soit alors \mathcal{T} un torseur sur X de type λ , et considérons le diagramme commutatif

$$\begin{array}{ccc} X(k) & \xrightarrow{i} & H^1(k, S) \\ \rho \downarrow & & \downarrow \sigma \\ \prod_{v \in \Sigma} X(k_v) & \xrightarrow{j} & \prod_{v \in \Sigma} H^1(k_v, S) \end{array}$$

où i et j associent à un point la fibre de \mathcal{T} en ce point, et où les flèches verticales sont les flèches diagonales. Le théorème des fonctions implicites implique que j est une application continue de l'espace topologique produit de gauche dans le groupe abélien fini discret de droite. Ainsi chaque fibre de j est ouverte et fermée. Soit $\{\alpha_1, \dots, \alpha_n\}$ l'image finie (proposition 2.7.3) de i . Nous allons montrer que l'adhérence de $\rho(X(k))$, qui est clairement contenue dans le fermé réunion des $j^{-1}(\sigma(\alpha_i))$, coïncide avec cette réunion, ce qui suffira à établir la proposition. Soit \mathcal{T}_i un torseur universel sur X dont la classe dans $H^1(X, S_0)$ se déduit de celle de \mathcal{T} par soustraction de α_i . Comme α_i est dans l'image de $X(k)$ par i , $\mathcal{T}_i(k)$ est non vide. L'image par la projection structurale q_i du produit des $\mathcal{T}_i(k_v)$ dans le produit des $X(k_v)$ n'est autre que $j^{-1}(\sigma(\alpha_i))$. Sous l'hypothèse $(H3)_\lambda$, $\mathcal{T}_i(k)$ est dense dans le produit des $\mathcal{T}_i(k_v)$, donc $q_i(\mathcal{T}_i(k))$ est dense dans $j^{-1}(\sigma(\alpha_i))$.

Remarque 3.8.11. On peut établir directement le résultat de cette proposition pour une surface cubique lisse ou une intersection lisse de deux quadriques dans \mathbf{P}^4 en utilisant la k -unirationalité de telles k -variétés X lorsque $X(k) \neq \emptyset$, et l'existence dans ce cas de beaucoup de k -automorphismes birationnels, en utilisant la même idée que dans ([42], II. 16.1).

PROPOSITION 3.8.12. *Soit k un corps de nombres. Soit X une k -surface rationnelle qui possède un k -point et vérifie $(H3)_\lambda$. Si Σ est un ensemble fini de places de k tel que, pour v dans Σ , X a bonne réduction en v si v est non archimédienne et $X(k_v)$ est connexe si v est archimédienne, alors $X(k)$ est dense dans le produit des $X(k_v)$ pour v dans Σ .*

Démonstration. Soit $O \in X(k)$ et soit \mathcal{F} le torseur de type λ de fibre triviale en O . Les mêmes arguments que dans la proposition 2.8.20 montrent que la projection structurale $q: \mathcal{F} \rightarrow X$ induit une surjection

$$\prod_{v \in \Sigma} \mathcal{F}(k_v) \rightarrow \prod_{v \in \Sigma} X(k_v).$$

Sous $(H3)_\lambda$, $\mathcal{F}(k)$ est dense dans le produit de gauche, et donc $X(k)$ est dense dans le produit de droite.

RÉFÉRENCES

1. M. ARTIN, A. GROTHENDIECK, ET J.-L. VERDIER, *Théorie des topos et cohomologie étale des schémas*, Séminaire de géométrie algébrique du Bois-Marie SGA 4, Lecture Notes in Math. **269**, **270**, **305**, Springer, Berlin-Heidelberg-New York 1972–1973.
2. A. BEAUVILLE, J.-L. COLLIOT-THÉLÈNE, J.-J. SANSUC, ET SIR PETER SWINNERTON-DYER, *Variétés stablement rationnelles non rationnelles*, Annals of Math. **121** (1985), 283–318.
3. B. J. BIRCH ET H. P. F. SWINNERTON-DYER, *The Hasse problem for rational surfaces*, J. reine angew. Math. **274** (1975), 164–174.
4. S. BLOCH, *On the Chow groups of certain rational surfaces*, Ann. scient. Éc. norm. sup. (4) **14** (1981), 41–59.
5. J.-L. BRYLINSKI, *Décomposition simpliciale d'un réseau, invariante par un groupe fini d'automorphismes*, C.R. Acad. Sci. Paris **288**, série A (1979), 137–139.
6. H. CARTAN ET S. EILENBERG, *Homological Algebra*, Princeton Univ. Press, Princeton, 1956.
7. J. W. S. CASSELS, *Diophantine equations with special reference to elliptic curves*, J. London Math. Soc. **41** (1966), 193–291; Corrigenda: *ibid* **42** (1967), 183.
8. J. W. S. CASSELS ET M. J. T. GUY, *On the Hasse principle for cubic surfaces*, Mathematika **13** (1966), 111–120.
9. F. CHÂTELET, *Points rationnels sur certaines courbes et surfaces cubiques*, Enseign. Math. (2) **5** (1959), 153–170.
10. J.-L. COLLIOT-THÉLÈNE, *Hilbert's theorem 90 for K_2 , with application to the Chow groups of rational surfaces*, Invent. Math. **71** (1983), 1–20.
11. ———, "Arithmétique des variétés rationnelles et problèmes birationnels," in *Actes du congrès intern. math. Berkeley 1986* (à paraître).
12. J.-L. COLLIOT-THÉLÈNE ET D. CORAY, *L'équivalence rationnelle sur les points fermés des surfaces rationnelles fibrées en coniques*, Compositio Math. **39** (1979), 301–332.
13. J.-L. COLLIOT-THÉLÈNE, D. CORAY, ET J.-J. SANSUC, *Descente et principe de Hasse pour certaines variétés rationnelles*, J. reine angew. Math. **320** (1980), 150–191.
14. J.-L. COLLIOT-THÉLÈNE ET F. ISCHEBECK, *L'équivalence rationnelle sur les cycles de dimension zéro des variétés algébriques réelles*, C.R. Acad. Sci. Paris **292**, série I (1981), 723–725.
15. J.-L. COLLIOT-THÉLÈNE, D. KANEVSKY, ET J.-J. SANSUC, *Arithmétique des surfaces cubiques diagonales*, Springer Lecture Notes in Math., éd. G. Wüstholz (à paraître) (preprint Orsay 85 T 46, 1985).
16. J.-L. COLLIOT-THÉLÈNE ET P. SALBERGER, *Arithmetic on singular cubic hypersurfaces* (en préparation).

17. J.-L. COLLIOT-THÉLÈNE ET J.-J. SANSUC, *Torseurs sous des groupes de type multiplicatif; applications à l'étude des points rationnels de certaines variétés algébriques*, C.R. Acad. Sci. Paris **282**, série A (1976), 1113–1116.
18. ———, *Variétés de première descente attachées aux variétés rationnelles*, C.R. Acad. Sci. Paris **284**, série A (1977), 967–970.
19. ———, *La descente sur une variété rationnelle définie sur un corps de nombres*, C.R. Acad. Sci. Paris **284**, série A (1977), 1215–1218.
20. ———, *La R-équivalence sur les tores*, Ann. scient. Éc. norm. sup. (4) **10** (1977), 175–229.
21. ———, *Cohomologie des groupes de type multiplicatif sur les schémas réguliers*, C.R. Acad. Sci. Paris **287**, série A (1978), 449–452.
22. ———, “La descente sur les variétés rationnelles,” in *Journées de géométrie algébrique d'Angers 1979*, éd. A. Beauville, Sijthoff & Noordhoff, Alphen aan den Rijn 1980, 223–237.
23. ———, *On the Chow groups of certain rational surfaces: a sequel to a paper of S. Bloch*, Duke Math. J. **48** (1981), 421–447.
24. ———, *Sur le principe de Hasse et l'approximation faible, et sur une hypothèse de Schinzel*, Acta Arith. **41** (1982), 33–53.
25. ———, *La descente sur les surfaces rationnelles fibrées en coniques*, C.R. Acad. Sci. Paris **303**, série I (1986), 303–306.
26. ———, *Principal homogeneous spaces under flasque tori, applications*, J. of Algebra **106** (1987), 148–205.
27. J.-L. COLLIOT-THÉLÈNE, J.-J. SANSUC, ET SIR PETER SWINNERTON-DYER, *Intersections of two quadrics and Châtelet surfaces*, J. reine angew. Math. **373** (1987), 37–107 & **374** (1987), 72–168 (voir aussi: *Intersections de deux quadriques et surfaces de Châtelet*, C.R. Acad. Sci. Paris **298**, série I (1984), 377–380).
28. J.-L. COLLIOT-THÉLÈNE ET A. N. SKOROGOBATOV, *R-equivalence on conic bundles of degree 4*, this volume.
29. D. F. CORAY, “The Hasse principle for pairs of quadratic forms,” in *Number theory days*, Exeter 1980, London Math. Soc. Lecture note series **56**, Cambridge Univ. Press, Cambridge-New York 1982, 237–246.
30. D. F. CORAY ET M. A. TSFASMAN, *Arithmetic on singular Del Pezzo surfaces*, Proc. London Math. Soc. (à paraître).
31. P. DELIGNE, *Cohomologie étale*, Séminaire de géométrie algébrique du Bois-Marie SGA 4 1/2, Lecture Notes in Math. **569**, Springer, Berlin-Heidelberg-New York 1977.
32. M. DEMAZURE ET A. GROTHENDIECK, *Schémas en groupes*, Séminaire de géométrie algébrique du Bois-Marie SGA 3, Lecture Notes in Math. **151**, **152**, **153**, Springer, Berlin-Heidelberg-New York 1970.
33. A. GROTHENDIECK ET J. DIEUDONNÉ, *Éléments de géométrie algébrique, IV*, Publ. math. I.H.E.S. **20**, **24**, **28**, **32**, Bures sur Yvette 1964–65–66–67.
34. A. GROTHENDIECK, “Le groupe de Brauer, I: Algèbres d’Azumaya et interprétations diverses; II: Théorie cohomologique.” Exposés Bourbaki **290** & **297** (1965), in *Dix exposés sur la cohomologie des schémas*, Masson-North-Holland, Amsterdam 1968.
35. A. GROTHENDIECK, “Le groupe de Brauer, III: Exemples et compléments,” in *Dix exposés sur la cohomologie des schémas*, Masson-North-Holland, Amsterdam 1968.
36. P. HILTON ET U. STAMMBACH, *A Course in Homological Algebra*, Springer, Berlin-Heidelberg-New York 1971.
37. W. HÜRLIMANN, “Brauer group and diophantine geometry: a cohomological approach,” in *Brauer Groups in Ring Theory and Algebraic Geometry*, Antwerp 1981, ed. F. van Oystaeyen & A. Verschoren, Lecture Notes in Math. **917**, Springer, Berlin-Heidelberg-New York 1982.
38. ———, *H^3 and rational points on biquadratic bicyclic norm forms*, Arch. Math. **47** (1986), 113–116.
39. V. A. ISKOVSKIĖ, *Un contre-exemple au principe de Hasse pour un système de deux formes quadratiques en cinq variables* (en russe), Mat. Zametki **10** (1971), 253–257 (= Math. Notes **10** (1971), 575–577).

40. B. È. KUNYAVSKIÏ ET M. A. TSFASMAN, *Zero-cycles on rational surfaces and Néron-Severi tori*, *Izv. Akad. Nauk SSSR* **48** (1984), 631–654 (= *Math. USSR Izvestiya* **24** (1985), 583–603).
41. YU. I. MANIN, “Le groupe de Brauer-Grothendieck en géométrie diophantienne,” *Actes du congrès intern. math. Nice* **1** (1970), 401–411, Gauthier-Villars, Paris 1971.
42. ———, *Formes cubiques: algèbre, géométrie, arithmétique* (en russe), Nauka, Moscou 1972 (trad. angl.: *Cubic forms: algebra, geometry, arithmetic*, North-Holland, Amsterdam 1974 et 1986, 2ème éd.).
43. YU. I. MANIN ET M. A. TSFASMAN, *Rational varieties: Algebra, geometry and arithmetic*, *Uspekhi Mat. Nauk* **41** (1986), 43–94 (= *Russian Math. Surveys* **41** (1986), 51–116).
44. J. S. MILNE, *Etale Cohomology*, Princeton Univ. Press, Princeton, 1980.
45. H. NISHIMURA, *Some remark on rational points*, *Mem. Coll. Sci. Kyoto* **29**, Ser. A (1955), 189–192.
46. M. RAYNAUD, *Faisceaux amples sur les schémas en groupes et les espaces homogènes*, *Lecture Notes in Math.* **119**, Springer, Berlin-Heidelberg-New York 1970.
47. P. SALBERGER, “On the arithmetic of conic bundle surfaces,” in *Séminaire de théorie des nombres de Paris 1985–1986* (à paraître) (voir aussi: *Sur l’arithmétique de certaines surfaces de del Pezzo*, *C.R. Acad. Sci. Paris* **303**, série I (1986), 273–276).
48. J.-J. SANSUC, *Groupe de Brauer et arithmétique des groupes algébriques linéaires sur un corps de nombres*, *J. reine angew. Math.* **327** (1981), 12–80.
49. ———, *Descente et principe de Hasse pour certaines variétés rationnelles*, in *Séminaire de théorie des nombres (DPP)*, Paris 1980–1981, 253–271, Birkhäuser, 1982.
50. ———, “A propos d’une conjecture arithmétique sur le groupe de Chow d’une surface rationnelle,” in *Séminaire de théorie des nombres de Bordeaux 1981–1982*, exp. n° 33, 1–38.
51. ———, “Principe de Hasse, surfaces cubiques et intersections de deux quadriques,” in *Journées arithmétiques de Besançon 1985*, *Astérisque* **147–148** (1987), 183–207.
52. J.-P. SERRE, *Cohomologie Galoisienne*, *Lecture Notes in Math.* **5**, Springer, Berlin-Heidelberg-New York 1965.
53. H. P. F. SWINNERTON-DYER, *Two special cubic surfaces*, *Mathematika* **9** (1962), 54–56.
54. J. T. TATE, *The cohomology groups of tori in finite Galois extensions of number fields*, *Nagoya Math. J.* **27** (1966), 709–719.
55. V. E. VOSKRESENSKIÏ, *Tores algébriques* (en russe), Nauka, Moscou 1977.
56. V. I. YANČEVSKIÏ, *k-unirationalité des fibrés en coniques et corps de décomposition des algèbres simples centrales* (en russe), *Doklady Akad. Nauk BSSR* **29** (1985), 1061–1064.

JEAN-LOUIS COLLIOT-THÉLÈNE: MATHÉMATIQUES, BÂT. 425, UNIVERSITÉ DE PARIS-SUD, F-91405 ORSAY FRANCE

JEAN-JACQUES SANSUC: ÉCOLE NORMALE SUPÉRIEURE, 45 RUE D’ULM, F-75230 PARIS CEDEX 05 FRANCE, UNIVERSITÉ PARIS VII, MATHÉMATIQUES, 2 PLACE JUSSIEU, F-75251 PARIS CEDEX 05 FRANCE