SUR L'INJECTIVITÉ DE L'APPLICATION CYCLE DE JANNSEN

JEAN-LOUIS COLLIOT-THÉLÈNE ET FEDERICO SCAVIA

Dedicato alla memoria di Alberto Collino

Résumé. Pour certaines classes de variétés algébriques X sur un corps k, nous comparons deux applications cycle sur la torsion du groupe de Chow des cycles de codimension 2. La première remonte à des travaux de S. Bloch (1981), la seconde est l'application cycle de Jannsen à valeurs dans la cohomologie ℓ-adique continue. On obtient ainsi des conditions suffisantes pour l'injectivité de l'application cycle de Jannsen $CH^2(X) \to H^4_{\text{cont}}(X, \mathbb{Z}_\ell(2))$ sur la torsion ℓ-primaire.

Par ailleurs, pour k un corps de fonctions rationnelles en une variable sur un corps de nombres totalement imaginaire, en utilisant des exemples de Sansuc et du premier auteur (1983), on donne des exemples de surfaces X/k projectives, lisses, géométriquement rationnelles, sans point rationnel, pour lesquelles l'application cycle de Jannsen pour $\ell = 2$ a un élément de 2-torsion non nul dans son noyau. Ceci répond à des questions soulevées dans un article récent.

Abstract. For specific classes of smooth, projective varieties X over a field k, we compare two cycle maps on the torsion subgroup $CH^2(X)_{\text{tors}}$ of the second Chow group. The first one goes back to work of S. Bloch (1981), the second one is Jannsen's cycle map into continuous ℓ-adic cohomology, whose injectivity properties have attracted attention in two recent papers. The comparison gives sufficient hypotheses to guarantee injectivity of Jannsen's cycle map $CH^2(X) \to H^4_{\text{cont}}(X, \mathbb{Z}_\ell(2))$ on ℓ-primary torsion.

Using counterexamples to injectivity of the first map due to Sansuc and the first author (1983), we give examples of smooth, projective, geometrically rational surfaces over a rational function field in one variable over a totally imaginary number field for which Jannsen's map for $\ell = 2$ is not injective on 2-torsion. This answers questions raised in a recent paper.

1. Introduction

Dans deux articles récents, F. Suzuki et le second auteur du présent article [SS22], puis Th. Alexandrou et S. Schreieder [AS22], se sont intéressés à la question suivante.

Soient X une variété projective et lisse connexe sur un corps k de type fini sur le corps premier. Soit $CH^i(X)$ le groupe de Chow des cycles de codimension i modulo l'équivalence rationnelle. Pour ℓ premier distinct de la caractéristique de k, et $i \geq 1$ entier, l'application cycle ℓ-adique continue de Jannsen [Jan88]

$$CH^i(X) \otimes \mathbb{Z}_\ell \to H^{2i}_{\text{cont}}(X, \mathbb{Z}_\ell(i))$$

est-elle injective sur la torsion ?

Date: soumis 7 février 2023; corrections, 8 avril 2023.

2020 *Mathematics Subject Classification.* 14C25; 14C15, 14C35, 14F20, 14J20.

Cette question est équivalente à la question : l'application cycle

$$\mathrm{cl}^i\colon CH^i(X) \to H^{2i}_{\mathrm{cont}}(X, \mathbb{Z}_\ell(i))$$

est-elle injective sur la torsion ℓ-primaire $CH^i(X)\{\ell\}$ de $CH^i(X)$?

Nous renvoyons aux introductions de [AS22] et [SS22] pour l'historique du sujet.

On ne saurait espérer une réponse affirmative sur un corps quelconque. Pour k algébriquement clos, la réponse est déjà négative, pour $i = 1$ et X une courbe elliptique.

Dans [SS22], sur des corps de type fini sur le corps premier, F. Suzuki et le second auteur donnent des exemples où l'application cl^i n'est pas injective dans les cas suivants.

(a) [SS22, Thm. 1.3] X quotient, par l'action d'un 2-groupe fini, d'une intersection complète de grande dimension sur un corps fini ou un corps de nombres, $i = 3$ et $\ell = 2$. Les cycles utilisés proviennent de cycles sur une clôture algébrique détectés par une méthode topologique.

(b) [SS22, Thm. 1.4] X de dimension 4 sur un corps de nombres et $i = 3$ et $\ell = 2$. La variété est produit d'un solide de Kummer et d'une courbe elliptique. Les cycles utilisés sont détectés sur une clôture algébrique par une application cycle λ^3_X de Bloch [Blo79].

(c) [SS22, Thm. 1.5] X quadrique de dimension 3 sur $k(t)$ corps de fonctions rationnelles d'une variable sur un corps de nombres totalement imaginaire, $i = 2$ et $\ell = 2$. Ici X n'a pas de point rationnel. La démonstration de la non trivialité du cycle dans $CH^2(X)[2]$ utilise les résultats de Karpenko [Kar91] sur les quadriques de dimension 3 voisines de Pfister. Il y a des analogues avec $i = 2$ et ℓ premier, avec X de dimension $\ell^2 - 1$ (les variétés "normes" de Rost) [SS22, Thm. 6.3]. La démonstration de la non trivialité des classes dans le groupe de Chow $CH^2(X)\{\ell\}$ utilise les résultats de Karpenko et Merkurjev [KM13] sur le motif de Rost. La démonstration de la trivialité de l'image par l'application cycle de Jannsen utilise [KM13] et un cas particulier de la proposition 2.3 ci-dessous. Les cycles utilisés ont une classe triviale sur une clôture algébrique.

Dans [AS22], Th. Alexandrou et S. Schreieder définissent, pour toute variété X sur un corps quelconque et tout entier i, une application cycle λ^i_X sur le groupe $CH^i(X)\{\ell\}$ qui étend l'application cycle de Bloch [Blo79] pour les variétés projectives et lisses sur un corps algébriquement clos. Pour une variété lisse sur un corps quelconque et tout entier i, l'existence d'applications λ^i_X étendant celle de Bloch [Blo79] résulte déjà de la méthode de Bloch [CTSS83, Cor. 1 p. 772] [CT93, §3.2, diagramme (3.5)]. Pour les variétés projectives et lisses sur un corps fini, pour tout entier i, une telle application est étudiée dans [CTSS83, Cor. 3 (ii) p. 773 ; Thm. 2, p. 780]. Dans ce cas, l'application λ^2_X est injective et n'est pas plus fine que l'application cycle de Jannsen [CTSS83, Thm. 4, p. 787]. La comparaison avec l'application cycle ℓ-adique utilise la commutativité [CTSS83, Prop. 1 p. 766] établie pour tout i et tout corps.

Entre autres résultats, Th. Alexandrou et S. Schreieder établissent sur tout corps l'injectivité de leur application cycle λ^i_X pour $i = 1, 2$. Pour tout $d \geq 3$, tout i avec $3 \leq i \leq d$ et tout ℓ premier, ils donnent des exemples de variétés projectives et lisses de dimension d sur des corps k de type fini convenable pour lesquelles leur application λ^i_X n'est pas injective. Ils montrent que leur application cycle λ^i_X raffine, en général strictement, l'application cycle de Jannsen. En corollaire [AS22, Cor. 1.4], avec les mêmes hypothèses sur i, d et k que ci-dessus, ils obtiennent des exemples de non injectivité de l'application cycle de Jannsen sur les cycles de torsion. Pour tout $d \geq 3$, ceci répond à la question 1.7 (a) de [SS22] sur le cas $i = d$.

Les exemples de [AS22, Thm. 1.2] n'ont pas de point rationnel. En partant d'un résultat de Parimala et Suresh (1995) d'application cycle non injective pour une surface sur un corps p-adique, les auteurs donnent un exemple [AS22, Thm. 1.5] de variété projective et lisse X de dimension 3, sur un corps k de type fini sur le corps premier, avec un point rationnel, pour laquelle l'application λ_X^3 n'est pas injective (ici $\ell = 2$). Il en est donc ainsi aussi de l'application cycle de Jannsen.

Ces résultats laissaient ouvertes les questions d'injectivité des applications cycle de Jannsen sur $CH^i(X)\{\ell\}$ pour les variétés X de géométrie simple, comme les variétés rationnellement connexes, et pour les surfaces, lorsque le corps de base est de type fini de petit degré de transcendance sur le corps premier.

Dans cet article, nous donnons des exemples de non injectivité de l'application cycle de Jannsen avec X des *surfaces géométriquement rationnelles* sans point rationnel sur des corps k de type fini de degré de transcendance 1 sur un corps de nombres totalement imaginaire, avec $\ell = 2$ (Théorème 5.3). En prenant le produit avec l'espace projectif $\mathbb{P}_k^{d-2}$, ceci donne de tels exemples avec $i = 2$ et avec $i = d$ pour tout $d \geq 2$, et avec X des variétés géométriquement rationnelles de dimension d. Les cycles que nous détectons ont une classe triviale sur une clôture algébrique du corps de base.

Voici le contenu de l'article.

Au §2 on donne quelques lemmes sur la cohomologie continue et la cohomologie galoisienne.

Au §3, nous introduisons une classe (H4) de variétés projectives et lisses qui comprend en particulier les surfaces projectives et lisses géométriquement rationnelles. Nous établissons des résultats généraux sur la cohomologie étale continue de ces variétés.

Au §4, pour les variétés X dans la classe (H4) nous donnons des rappels sur une application cycle d'origine K-théorique sur le groupe de torsion $CH^2(X)_{\mathrm{tors}}$ du groupe de Chow des cycles de codimension 2 étudiée dans des travaux de S. Bloch, J.-J. Sansuc, le premier auteur, W. Raskind, B. Kahn. Nous considérons ensuite une application cycle de Jannsen secondaire sur $CH^2(X)_{\mathrm{tors}}$, à valeurs dans la cohomologie étale continue de Jannsen.

Une partie essentielle et délicate de l'article consiste à établir que les noyaux de ces deux applications cycle sont isomorphes. C'est le théorème 4.8, établi dans l'appendice (Théorème A.1). Sous certaines hypothèses supplémentaires portant sur l'existence d'un point rationnel ou sur la dimension cohomologique du corps de base, les travaux mentionnés plus haut avaient établi l'injectivité de l'application cycle d'origine K-théorique. On en déduit dans ces cas que l'application cycle de Jannsen est injective.

Au §5 nous rappelons les exemples de non injectivité de l'application cycle d'origine K-théorique obtenus par Sansuc et le premier auteur en 1983. Le théorème 4.8 nous permet d'en déduire des exemples de non injectivité pour l'application secondaire de Jannsen. Dans notre contexte, de tels exemples ne peuvent être construits que sur des corps de dimension cohomologique exactement 3.

Comme indiqué ci-dessus, l'appendice est consacré à la comparaison des noyaux des deux applications cycle sur les variétés de la classe (H4). On y utilise des travaux de Lichtenbaum et de Bruno Kahn.

Les questions suivantes restent ouvertes. Sur k un corps de nombres, l'application cycle $CH^i(X)\{\ell\} \to H^{2i}_{\mathrm{cont}}(X, \mathbb{Z}_\ell(i))$ est-elle injective dans les cas suivants :
(a) X est une surface et $i = 2$.
(b) X est un solide et $i = 2$.
(c) X est un solide et $i = 3$.

Fixons quelques notations.

Soient k un corps, k_s une clôture séparable de k et G le groupe de Galois absolu de k. Étant donné un module galoisien M, on note indifféremment $H^i(G, M)$ ou $H^i(k, M)$ les groupes de cohomologie galoisienne.

Une k-variété est un k-schéma séparé de type fini. Pour X une k-variété, on note $X^s = X \times_k k_s$. Soit ℓ un premier inversible dans k. Sur toute k-variété X, pour tout entier $n > 0$ premier à p, on a la suite de Kummer pour la topologie étale

$$1 \longrightarrow \mu_{\ell^n} \longrightarrow \mathbf{G}_m \xrightarrow{x \mapsto x^{\ell^n}} \mathbf{G}_m \longrightarrow 1. \tag{1.1}$$

Pour tout $j \in \mathbb{Z}$, on a des suites exactes de modules galoisiens finis

$$1 \longrightarrow \mu_{\ell^n}^{\otimes j} \longrightarrow \mu_{\ell^{m+n}}^{\otimes j} \xrightarrow{x \mapsto x^{\ell^n}} \mu_{\ell^m}^{\otimes j} \longrightarrow 1. \tag{1.2}$$

Ces suites induisent des suites exactes de faisceaux pour la topologie étale sur toute k-variété X, compatibles avec les suites de Kummer, en ce sens qu'on a un diagramme commutatif

$$\begin{tikzcd}
1 \arrow[r] & \mu_{\ell^{n+1}} \arrow[r] \arrow[d, "x \mapsto x^\ell"] & \mathbf{G}_m \arrow[r] \arrow[d, "x \mapsto x^\ell"] & \mathbf{G}_m \arrow[r] \arrow[d, equal] & 1 \\
1 \arrow[r] & \mu_{\ell^n} \arrow[r] & \mathbf{G}_m \arrow[r] & \mathbf{G}_m \arrow[r] & 1.
\end{tikzcd}$$

Pour un groupe abélien A et un nombre premier ℓ, on note $A[\ell]$ le sous-groupe de ℓ-torsion et $A\{\ell\}$ le sous-groupe de torsion ℓ-primaire.

Soient k un corps et X une k-variété lisse connexe de dimension d. On note $CH^i(X)$ le groupe de Chow des cycles de codimension i modulo l'équivalence rationnelle. On note $CH_0(X)$ le groupe de Chow des zéro-cycles de dimension zéro. Si X est projective, on dispose de l'application degré $CH_0(X) \to \mathbb{Z}$ envoyant un point fermé $P \in X$ de corps résiduel $k(P)$ sur le degré $[k(P) : k]$. On note alors $A_0(X) \subset CH_0(X)$ le groupe des classes de zéro-cycles de degré zéro.

2. Modules galoisiens de type fini et cohomologie continue

Soient k un corps et ℓ un nombre premier inversible dans k. Soit M un G-module $\mathbb{Z}$-libre de type fini. Soit T le k-tore de groupe des cocaractères M, c'est-à-dire que l'on a $M \otimes k_s^* \xrightarrow{\simeq} T(k_s)$. On a les suites exactes déduites de la suite (1.1) :

$$0 \to M \otimes \mu_{\ell^n} \to M \otimes k_s^* \to M \otimes k_s^* \to 1$$

soit encore

$$1 \to T(k_s)[\ell^n] \to T(k_s) \to T(k_s) \to 1 \tag{2.1}$$

qui par cohomologie galoisienne donnent les suites exactes avec les flèches qu'on imagine en passant de ℓ^m à ℓ^n avec $m \geq n$. Plus précisément on obtient une surjection $T(k)/\ell^m \to T(k)/\ell^n$ induite par l'identité sur $T(k)$ et une application $H^1(k,T)[\ell^m] \to H^1(k,T)[\ell^n]$ induite par la multiplication par ℓ^{m-n}. Comme $H^1(k,T)$ est d'exposant fini (annulé par le degré de l'extension finie galoisienne déployant T ou son groupe de cocaractères), cette multiplication est *nulle* si m est assez grand. Ainsi pour n fixé et m assez grand, l'image de

$$H^1(k, M \otimes \mu_{\ell^{n+m}}) \to H^1(k, M \otimes \mu_{\ell^n})$$

coïncide avec l'image de $T(k) \to T(k)/\ell^n \to H^1(k, M \otimes \mu_{\ell^n})$.

Par ailleurs, pour n assez grand, $H^1(k,T)/\ell^n = H^1(k,T)\{\ell\}$ puisque ce derner groupe est d'exposant fini. On en déduit que les applications injectives

$$H^1(k,T)/\ell^n \to H^2(k, T(k_s)[\ell^n])$$

déduites de la suite 2.1 par cohomologie galoisienne induisent des inclusions compatibles

$$H^1(k,T)\{\ell\} \hookrightarrow H^2(k, T(k_s)[\ell^n]).$$

Rappelons qu'un système projectif de groupes abéliens N_n satisfait la condition de Mittag-Leffler si pour $n \geq 1$ il existe un entier $m(n) \geq n$ tel que tout $m \geq m(n)$, l'image de $N_m \to N_n$ coïncide avec celle de $N_{m(n)} \to N_n$. Si un système projectif (N_n) de groupes abéliens satisfait la condition de Mittag-Leffler, alors $\varprojlim^1 N_n = 0$.

Proposition 2.1. [NSW08, Thm. (2.7.5)] *Soit M un $\mathbb{Z}_\ell$-module de type fini sans torsion équipé d'une action continue de G. Pour n entier, $n \geq 1$, soit $M_n = M/\ell^n$. On a $M = \varprojlim M_n$. Pour tout $i \geq 1$, on a la suite exacte*

$$0 \to \varprojlim{}^1 H^{i-1}(k, M_n) \to H^i_{\text{cont}}(k, M) \to \varprojlim H^i(k, M_n) \to 0.$$

Si le système $H^{i-1}(k, M_n)$ satisfait la condition de Mittag-Leffler, alors on a

$$H^i_{\text{cont}}(k, M) \xrightarrow{\simeq} \varprojlim H^i(k, M_n).$$

Des calculs ci-dessus, on déduit :

Proposition 2.2. *Soit M un G-réseau, groupe des cocaractères d'un k-tore T.*

(a) Le système projectif $H^1(k, M \otimes \mu_{\ell^n})$ satisfait la condition de Mittag-Leffler, et on a $\varprojlim^1 H^1(k, M \otimes \mu_{\ell^n}) = 0$.

(b) La flèche naturelle $H^2_{\text{cont}}(k, M \otimes \mathbb{Z}_\ell) \to \varprojlim H^2(k, M/\ell^n)$ est un isomorphisme.

(c) Pour n assez grand, on a des inclusions compatibles

$$H^1(k,T)\{\ell\} \hookrightarrow H^2(k, T(k_s)[\ell^n]).$$

Notons ici une conséquence de la proposition 2.1.

Proposition 2.3. *Supposons $\text{cd}(k) \leq N$. Pour tout nombre premier ℓ et tout entier $j \in \mathbb{Z}$, on a $H^{N+1}_{\text{cont}}(k, \mathbb{Z}_\ell(j)) = 0$.*

Démonstration. D'après la proposition 2.1, on a les suites exactes

$$0 \to \varprojlim{}^1 H^N(k, \mu_{\ell^n}^{\otimes j}) \to H^{N+1}_{\text{cont}}(k, \mathbb{Z}_\ell(j)) \to \varprojlim H^{N+1}(k, \mu_{\ell^n}^{\otimes j}) \to 0.$$

On a les suites exactes courtes (1.2). Sous l'hypothèse $\text{cd}(k) \leq N$, toutes les applications $H^N(k, \mu_{\ell^{m+n}}^{\otimes j}) \to H^N(k, \mu_{\ell^n}^{\otimes j})$ sont surjectives, car $H^{N+1}(k, \mu_{\ell^m}^{\otimes j}) = 0$. La condition de Mittag-Leffler pour la famille $H^N(k, \mu_{\ell^n}^{\otimes j})$ est donc satisfaite, et donc $\varprojlim^1 H^N(k, \mu_{\ell^n}^{\otimes j}) = 0$. Comme les groupes $H^{N+1}(k, \mu_{\ell^n}^{\otimes j})$ sont nuls, on conclut. □

3. Cohomologie galoisienne et cohomologie ℓ-adique

On suppose désormais $\mathrm{car}(k) = 0$. Dans cet article, on s'intéresse aux k-variétés projectives, lisses, géométriquement connexes satisfaisant certaines des hypothèses suivantes.

(H1) $\mathrm{Pic}(X^s) = \mathrm{NS}(X^s)$, ce groupe est sans torsion, et $\mathrm{Br}(X^s) = 0$.

Comme on a supposé $\mathrm{car}(k) = 0$, l'hypothèse (H1) est équivalente à :
(H1')
$H^i(X, \mathcal{O}_X) = 0$ pour $i = 1, 2$ et $H^i(X^s, \mathbb{Z}_\ell)\{\ell\} = 0$ pour $i = 2, 3$ et tout premier ℓ.

Si X satisfait (H1), alors $H^1(X^s, \mathbb{Z}_\ell) = 0$ et $H^1(X^s, \mathbb{Z}/\ell^n) = 0$ pour tout $n \geq 0$ et tout premier ℓ.

Si X satisfait (H1), $\mathrm{Pic}(X^s)$ est libre de type fini. On notera S le k-tore dont le groupe des cocaractères est $\mathrm{Pic}(X^s)$, i.e. $\mathrm{Pic}(X^s) \otimes k_s^* = S(k_s)$.

Pour X satisfaisant (H1), pour tout entier $n > 0$, la suite de Kummer pour la topologie étale (1.1) induit des isomorphismes G-équivariants

$$\mathrm{Pic}(X^s) \otimes \mu_{\ell^n}^{\otimes j} \xrightarrow{\simeq} H^2(X^s, \mu_{\ell^n}^{\otimes j+1})$$

pour tout entier $j \in \mathbb{Z}$. Soit $M = \mathrm{Pic}(X^s)$. On a donc $M \otimes \mu_{\ell^n} \xrightarrow{\simeq} H^2(X^s, \mu_{\ell^n}^{\otimes 2})$ et $\mathrm{Pic}(X^s) \otimes \mathbb{Z}_\ell(1) \xrightarrow{\simeq} H^2(X^s, \mathbb{Z}_\ell(2))$.

(H2) X satisfait (H1) et $H^3(X^s, \mathbb{Z}_\ell) = 0$ pour tout premier ℓ.

(H3) X satisfait (H1) et $H^3(X^s, \mathbb{Z}/\ell^n) = 0$ pour tout $n \geq 0$ et tout premier ℓ.

L'hypothèse (H3) équivaut à la combinaison de (H2) et de l'hypothèse que $H^4(X^s, \mathbb{Z}_\ell)$ est sans torsion pour tout premier ℓ. L'hypothèse (H3) est aussi équivalente à l'hypothèse suivante.
(H4)
$H^i(X, \mathcal{O}_X) = 0$ pour $i = 1, 2$, $H^3(X^s, \mathbb{Q}_\ell) = 0$, et, pour tout ℓ, $H^i(X^s, \mathbb{Z}_\ell)\{\ell\} = 0$ si $i \leq 4$.

On a donc les implications suivantes :

$$(\mathrm{H4}) \iff (\mathrm{H3}) \Longrightarrow (\mathrm{H2}) \Longrightarrow (\mathrm{H1}) \iff (\mathrm{H1'}).$$

Pour X une k-surface projective, lisse, géométriquement rationnelle, toutes ces hypothèses sont satisfaites.

Proposition 3.1. *Soit X une k-variété satisfaisant (H3). Notons*

$$H^4(X, \mu_{\ell^n}^{\otimes 2})^0 = \mathrm{Ker}[H^4(X, \mu_{\ell^n}^{\otimes 2}) \to H^4(X^s, \mu_{\ell^n}^{\otimes 2})].$$

(a) La suite spectrale de Hochschild-Serre pour la cohomologie étale donne une suite exacte

$$H^4(k, \mu_{\ell^n}^{\otimes 2}) \to H^4(X, \mu_{\ell^n}^{\otimes 2})^0 \to H^2(k, H^2(X^s, \mu_{\ell^n}^{\otimes 2})). \tag{3.1}$$

(b) Si X possède un point rationnel ou plus généralement un zéro-cycle de degré 1, la flèche $H^4(k, \mu_{\ell^n}^{\otimes 2}) \to H^4(X, \mu_{\ell^n}^{\otimes 2})^0$ est injective.

(c) Si $\mathrm{cd}(k) \leq 3$, alors la flèche $H^4(X, \mu_{\ell^n}^{\otimes 2})^0 \to H^2(k, H^2(X^s, \mu_{\ell^n}^{\otimes 2}))$ est injective.

Démonstration. C'est clair. □

En cohomologie étale continue, on dispose de la suite spectrale de Hochschild-Serre ([Jan88, Theorem 3.3])

$$E_2^{pq} = H^p_{\mathrm{cont}}(k, H^q(X^s, \mathbb{Z}_\ell(2))) \Longrightarrow H^*_{\mathrm{cont}}(X, \mathbb{Z}_\ell(2)).$$

Proposition 3.2. *Soit X une k-variété satisfaisant (H2).*

Notons

$$H^4_{\mathrm{cont}}(X, \mathbb{Z}_\ell(2))^0 = Ker[H^4_{\mathrm{cont}}(X, \mathbb{Z}_\ell(2)) \to H^4(X^s, \mathbb{Z}_\ell(2))].$$

(a) La suite spectrale de Hochschild-Serre pour la cohomologie continue donne une suite exacte

$$H^4_{\mathrm{cont}}(k, \mathbb{Z}_\ell(2)) \to H^4_{\mathrm{cont}}(X, \mathbb{Z}_\ell(2))^0 \to H^2_{\mathrm{cont}}(k, H^2(X^s, \mathbb{Z}_\ell(2))). \tag{3.2}$$

(b) Si X possède un point rationnel ou plus généralement un zéro-cycle de degré 1, alors la flèche $H^4_{\mathrm{cont}}(k, \mathbb{Z}_\ell(2)) \to H^4_{\mathrm{cont}}(X, \mathbb{Z}_\ell(2))$ est injective.

(c) Si l'on a $\mathrm{cd}(k) \leq 3$, la flèche $H^4_{\mathrm{cont}}(X, \mathbb{Z}_\ell(2))^0 \to H^2_{\mathrm{cont}}(k, H^2(X^s, \mathbb{Z}_\ell(2)))$ est injective.

Démonstration. Pour (a) et (b), c'est clair. Pour le point (c) il suffit de noter que, sous l'hypothèse $\mathrm{cd}(k) \leq 3$, la proposition 2.3 donne $H^4_{\mathrm{cont}}(k, \mathbb{Z}_\ell(2)) = 0$. □

Proposition 3.3. *Soit X une k-variété satisfaisant (H1).*

(a) La flèche naturelle

$$H^2_{\mathrm{cont}}(k, H^2(X^s, \mathbb{Z}_\ell(2))) \to \varprojlim H^2(k, H^2(X^s, \mu_{\ell^n}^{\otimes 2}))$$

est un isomorphisme.

(b) On a une inclusion naturelle

$$H^1(k, \mathrm{Pic}(X^s) \otimes k_s^*)\{\ell\} \hookrightarrow H^2_{\mathrm{cont}}(k, H^2(X^s, \mathbb{Z}_\ell(2))).$$

Démonstration. Il suffit d'appliquer la proposition 2.2 au module galoisien $M = \mathrm{Pic}(X^s)$, en tenant compte de l'identification $\mathrm{Pic}(X^s) \otimes \mathbb{Z}_\ell(1) \xrightarrow{\simeq} H^2(X^s, \mathbb{Z}_\ell(2))$ provenant des hypothèses (H1). □

De manière générale [Del77, Chapitre 4, 2.2.10], pour toute k-variété lisse X et tout entier i on dispose des applications "cycle" en cohomologie étale

$$\mathrm{cl}^i_n \colon CH^i(X) \to H^{2i}(X, \mu_{\ell^n}^{\otimes i}).$$

Lemme 3.4. *Soient k un corps parfait et X une k-variété lisse géométriquement intègre de dimension $d \geq 1$. Soit $n > 1$ un entier inversible dans k.*

Supposons que X possède un zéro-cycle de degré 1. Soit M un module galoisien fini.

(a) Soient $i \geq 0$ et $\eta \in H^i(X, M)$ dans l'image de $H^i(k, M)$. S'il existe un ouvert non vide tel que la restriction de η à $H^i(U, M)$ soit nulle, alors $\eta = 0$.

(b) En particulier, pour tout $i \geq 1$, toute classe de $H^{2i}(X, \mu_n^{\otimes i})$ qui est simultanément dans l'image de l'application cycle $CH^i(X) \to H^{2i}(X, \mu_n^{\otimes i})$ et de $H^{2i}(k, \mu_n^{\otimes i}) \to H^{2i}(X, \mu_n^{\otimes i})$ est nulle.

Démonstration. Par un lemme de déplacement facile et connu, il existe un zéro-cycle de degré 1 à support dans U. Par fonctorialité contravariante de la cohomologie, et un argument de restriction-corestriction, ceci établit (a). L'énoncé (b) est alors une conséquence de la fonctorialité contravariante de l'application cycle pour les immersions ouvertes. □

4. Cycles de codimension deux et de torsion

Soient k un corps de caractéristique zéro et X une k-variété projective lisse géométriquement connexe.

4.1. Une application cycle secondaire provenant de la K-théorie algébrique.

On a l'énoncé suivant, qui rassemble des travaux de Raskind et du premier auteur, et de Bruno Kahn, faisant suite à des travaux de Bloch, Suslin, Merkurjev et Suslin.

Théorème 4.1. *Soit X une variété projective, lisse, géométriquement connexe sur un corps k de caractéristique zéro.*

(a) Si l'on a $H^1(X, \mathcal{O}_X) = 0$ et $H^2(X^s, \mathbb{Z}_\ell)_{\text{tors}} = 0$ pour tout premier ℓ, alors le groupe $H^0(X^s, \mathcal{K}_2)$ est uniquement divisible.

(b) Si l'on a $H^2(X, \mathcal{O}_X) = 0$ et $H^3(X^s, \mathbb{Z}_\ell)_{\text{tors}} = 0$ pour tout premier ℓ, alors la flèche naturelle

$$\mathrm{Pic}(X^s) \otimes k_s^* \to H^1(X^s, \mathcal{K}_2)$$

a son noyau et son conoyau uniquement divisible.

(c) Sous la combinaison des hypothèses de (a) et de (b), c'est-à-dire pour X satisfaisant l'hypothèse (H1), soit S le k-tore de groupe des cocaractères le réseau galoisien $\mathrm{Pic}(X^s) \xrightarrow{\simeq} \mathrm{NS(X^s)}$. On a une suite exacte

$$S(k) \to \mathrm{Ker}[H^3(k, \mathbb{Q}/\mathbb{Z}(2)) \to H^3(k(X), \mathbb{Q}/\mathbb{Z}(2))]$$
$$\to \mathrm{Ker}[CH^2(X) \to CH^2(X^s)] \xrightarrow{\Phi} H^1(k, S).$$

La composée des flèches

$$Pic(X) \otimes k^* \to (\mathrm{Pic}(X^s) \otimes k_s^*)^G = S(k) \to H^3(k, \mathbb{Q}/\mathbb{Z}(2))$$

est nulle.

(d) Si l'on suppose de plus $H^3(X^s, \mathbb{Q}_\ell) = 0$ et $H^4(X^s, \mathbb{Z}_\ell)$ sans torsion pour tout premier ℓ, c'est-à-dire pour X satisfaisant l'hypothèse (H4), alors on a la suite exacte

(4.1)
$$S(k) \to \mathrm{Ker}[H^3(k, \mathbb{Q}/\mathbb{Z}(2)) \to H^3(k(X), \mathbb{Q}/\mathbb{Z}(2))] \to CH^2(X)_{\text{tors}} \xrightarrow{\Phi} H^1(k, S).$$

Démonstration. L'énoncé (a) est un cas particulier de [CTR85, Thm. 1.8]. L'énoncé (b) est un cas particulier de [CTR85, Thm. 2.12].

Montrons les énoncés (c) et d). D'après [CTR85, Prop. 3.6], pour toute k-variété X lisse géométriquement intègre, on a une suite exacte

$$H^1(X, \mathcal{K}_2) \to H^1(X^s, \mathcal{K}_2)^G \to H^1(G, K_2k_s(X)/H^0(X^s, \mathcal{K}_2))$$
$$\to \mathrm{Ker}[CH^2(X) \to CH^2(X^s)] \to H^1(G, H^1(X^s, \mathcal{K}_2))$$

Pour toute k-variété lisse, un théorème de Bruno Kahn [Kah93, Thm. 3.1, Cor. 2 p. 70] donne

$$H^1(G, K_2(k_s(X)/K_2(k_s))) \simeq \mathrm{Ker}[H^3(k, \mathbb{Q}/\mathbb{Z}(2)) \to H^3(k(X), \mathbb{Q}/\mathbb{Z}(2))].$$

Ce dernier groupe est d'exposant fini, il est annulé par le degré de toute extension finie L/k avec $X(L) \neq \emptyset$.

Le groupe K_2k_s est uniquement divisible. Sous l'hypothèse de (a), le groupe $H^0(X^s, \mathcal{K}_2)$ est uniquement divisible. On a donc

$$H^1(G, K_2k_s(X)/H^0(X^s, \mathcal{K}_2)) \simeq H^1(G, K_2(k_s(X))/K_2(k_s)$$
$$\simeq \mathrm{Ker}[H^3(k, \mathbb{Q}/\mathbb{Z}(2)) \to H^3(k(X), \mathbb{Q}/\mathbb{Z}(2))].$$

On peut donc réécrire la suite exacte ci-dessus sous la forme

$$H^1(X,\mathcal{K}_2) \to H^1(X^s,\mathcal{K}_2)^G \to \mathrm{Ker}[H^3(k,\mathbb{Q}/\mathbb{Z}(2)) \to H^3(k(X),\mathbb{Q}/\mathbb{Z}(2))]$$
$$\to \mathrm{Ker}[CH^2(X) \to CH^2(X^s)] \to H^1(G,H^1(X^s,\mathcal{K}_2)).$$

D'après (b), la flèche naturelle

$$\mathrm{Pic}(X^s)\otimes k_s^* \to H^1(X^s,\mathcal{K}_2)$$

a son noyau et son conoyau uniquement divisible. On a $\mathrm{Pic}(X^s) \stackrel{\simeq}{\to} \mathrm{NS(X^s)}$ donc $\mathrm{Pic}(X^s)\otimes k_s^* \stackrel{\simeq}{\to} \mathrm{NS(X^s)\otimes k_s^*}$ donc $H^1(k,\mathrm{Pic}(X^s)\otimes k_s^*)$ est d'exposant fini. On en déduit que l'application

$$H^1(k,\mathrm{Pic}(X^s)\otimes k_s^*) \to H^1(k,H^1(X^s,\mathcal{K}_2))$$

est un isomorphisme.

En utilisant le fait que le groupe $\mathrm{Ker}[H^3(k,\mathbb{Q}/\mathbb{Z}(2)) \to H^3(k(X),\mathbb{Q}/\mathbb{Z}(2))]$ est d'exposant fini, on déduit de l'énoncé (b) et d'un argument simple de cohomologie galoisienne que l'image de

$$H^1(X^s,\mathcal{K}_2)^G \to \mathrm{Ker}[H^3(k,\mathbb{Q}/\mathbb{Z}(2)) \to H^3(k(X),\mathbb{Q}/\mathbb{Z}(2))])$$

coïncide avec l'image de

$$S(k) = (\mathrm{Pic}(X^s)\otimes k_s^*)^G \to H^1(X^s,\mathcal{K}_2)^G \to \mathrm{Ker}[H^3(k,\mathbb{Q}/\mathbb{Z}(2)) \to H^3(k(X),\mathbb{Q}/\mathbb{Z}(2))].$$

On a donc obtenu l'énoncé (c).

Un théorème de Bloch reposant sur le théorème de Merkurjev-Suslin et les conjectures de Weil donne pour toute k-variété projective et lisse une injection (voir [CT93, Thm. 4.3 (ii)]) :

$$CH^2(X^s)\{\ell\} \hookrightarrow H^3(X^s,\mathbb{Q}_\ell/\mathbb{Z}_\ell(2)).$$

Sous les hypothèses de (d), on a

$$H^3(X^s,\mathbb{Q}_\ell/\mathbb{Z}_\ell(2)) = 0.$$

Ainsi $CH^2(X^s)\{\ell\} = 0$, et donc

$$CH^2(X)\{\ell\} = \mathrm{Ker}[CH^2(X)\{\ell\} \to CH^2(X^s)\{\ell\}].$$

L'énoncé (d) suit alors de l'énoncé (c). □

Théorème 4.2. *Supposons que X satisfait (H4). Dans chacun des cas :*
(a) X possède un zéro-cycle de degré 1,
(b) $cd(k) \leq 2$,
la flèche

$$\Phi : CH^2(X)_{\mathrm{tors}} \to H^1(k,S)$$

est injective. Si de plus le module galoisien $\mathrm{Pic}(X^s)$ est un facteur direct d'un module de permutation, alors $\mathrm{CH^2(X)_{tors}} = 0$.

Démonstration. On a $\mathrm{Ker}[H^3(k,\mathbb{Q}/\mathbb{Z}(2)) \to H^3(k(X),\mathbb{Q}/\mathbb{Z}(2))] = 0$ sous chacune des deux hypothèses. Le théorème 4.1 donne le résultat. □

Remarque 4.3. Si dans l'hypothèse (H4) on omet les conditions sur la nullité de la torsion des groupes $H^i(X^s,\mathbb{Z}_\ell)$, tout en gardant les hypothèses $H^i(X,\mathcal{O}_X) = 0$ $(i = 1,2)$ et $H^3(X^s,\mathbb{Q}_\ell) = 0$, c'est à dire en supposant que le rang ρ du groupe de Néron-Severi géométrique et les nombres de Betti rationnels b_i satisfont les égalités $b_1 = 0, b_2 = \rho, b_3 = 0$, on obtient des bornes pour l'exposant de torsion de $CH^2(X)_{\mathrm{tors}}$ faisant intervenir les entiers de torsion pour la cohomologie entière en degrés $2,3,4$, le degré d'une extension finie sur laquelle X acquiert un point rationnel, et le degré d'une extension de k déployant le module galoisien $\mathrm{Pic}(X^s)$.

Remarque 4.4. Sous des hypothèses plus faibles que (H4), Shuji Saito [Sai91, Thm. B] (voir aussi [CT93, Thm. 7.2 et Thm. 7.3]) a établi le théorème d'injectivité suivant pour les applications cycle en cohomologie étale.

Théorème 4.5. *Soit k un corps de car. zéro. Soit X une k-variété projective et lisse géométriquement intègre. Supposons $H^i(X,\mathcal{O}_X)=0$ pour $i=1,2$. Supposons que l'on a $b_3=\dim H^3(X^s,\mathbb{Q}_\ell)=0$, ou que le corps est k de type fini sur $\mathbb{Q}$.*

Faisons de plus l'une des hypothèses

(a) X possède un zéro-cycle de degré 1.

(b) $cd(k)\leq 2$.

Alors $CH^2(X)_{tors}$ est annulé par un entier $N>0$, et, pour tout entier $n>0$ multiple de N, l'application cycle en cohomologie étale

$$CH^2(X)\to H^4_{\text{ét}}(X,\mu_n^{\otimes 2})$$

est injective sur $CH^2(X)_{tors}$.

En particulier, l'application cycle de Jannsen $CH^2(X)\to H^4_{cont}(X,\mathbb{Z}_\ell(2))$ est injective sur la torsion ℓ-primaire.

Le théorème 4.5 implique : Pour X/k satisfaisant $H^i(X,\mathcal{O}_X)=0$ pour $i=1,2$, si k est de type fini sur $\mathbb{Q}$ et X possède un zéro-cycle de degré 1, le groupe $CH^2(X)_{tors}$ est fini (Saito [Sai91, Thm. D], voir aussi [CT93, Thm. 7.6]).

4.2. **Une application cycle de Jannsen secondaire.** Soit X une k-variété projective et lisse satisfaisant (H4).

D'après la proposition 3.2, sous les hypothèses $H^1(X^s,\mathbb{Z}_\ell)=0$ et $H^3(X^s,\mathbb{Z}_\ell)=0$, la suite spectrale de Hochschild-Serre pour la cohomologie continue donne une suite exacte

$$H^4_{\text{cont}}(k,\mathbb{Z}_\ell(2))\to H^4_{\text{cont}}(X,\mathbb{Z}_\ell(2))^0\to H^2_{\text{cont}}(k,H^2(X^s,\mathbb{Z}_\ell(2))), \tag{4.2}$$

où

$$H^4_{\text{cont}}(X,\mathbb{Z}_\ell(2))^0\coloneqq \mathrm{Ker}[H^4_{\text{cont}}(X,\mathbb{Z}_\ell(2))\to H^4(X^s,\mathbb{Z}_\ell(2))].$$

Sous l'hypothèse (H4), on a $H^1(X^s,\mathbb{Z}/\ell^n)=0$ et $H^3(X^s,\mathbb{Z}/\ell^n)=0$. La suite spectrale de Hochschild-Serre pour la cohomologie étale usuelle donne une suite exacte

$$H^4(k,\mu_{\ell^n}^{\otimes 2})\to H^4(X,\mu_{\ell^n}^{\otimes 2})^0\to H^2(k,H^2(X^s,\mu_{\ell^n}^{\otimes 2})), \tag{4.3}$$

où

$$H^4(X,\mu_{\ell^n}^{\otimes 2})^0=\mathrm{Ker}[H^4(X,\mu_{\ell^n}^{\otimes 2}))\to H^4(X^s,\mu_{\ell^n}^{\otimes 2})].$$

Pour X une k-variété lisse, Jannsen [Jan88, Theorem 3.23] a défini des applications cycle

$$\mathrm{cl}^i\colon CH^i(X)\to H^{2i}_{\text{cont}}(X,\mathbb{Z}_\ell(i)),$$

compatibles avec les applications cycle usuelles

$$\mathrm{cl}^i_n\colon CH^i(X)\to H^{2i}(X,\mu_{\ell^n}^{\otimes i}),$$

Nous nous intéressons ici au cas $i=2$. Pour X/k une variété satisfaisant (H4), et $z\in CH^2(X)\{\ell\}$, l'image de z dans $H^4(X^s,\mathbb{Z}_\ell(2))$ est de torsion donc nulle. On obtient donc des applications

$$\Theta: CH^2(X)_{\text{tors}}\xrightarrow{\mathrm{cl}^2} H^4_{\text{cont}}(X,\mathbb{Z}_\ell(2))^0\to H^2_{\text{cont}}(k,H^2(X^s,\mathbb{Z}_\ell(2))).$$

On peut composer avec la réduction des coefficients

$$H^2_{\text{cont}}(k, H^2(X^s, \mathbb{Z}_\ell(2))) \to H^2(k, H^2(X^s, \mu_{\ell^n}^{\otimes 2})).$$

Notons $\Theta_n(z)$ l'image de z.

Proposition 4.6. *Supposons que X satisfait (H4). Alors, pour tout $z \in CH^2(X)_{\text{tors}}$, on a $\Theta(z) = 0$ si et seulement si $\Theta_n(z) = 0$ pour tout entier $n > 0$.*

Démonstration. Via les applications naturelles

$$H^2_{\text{cont}}(k, H^2(X^s, \mathbb{Z}_\ell(2))) \to H^2(k, H^2(X^s, \mu_{\ell^n}^{\otimes 2})),$$

l'application Θ est compatible avec les applications Θ_n définies ci-dessus. Il suffit alors de noter que, d'après la proposition 3.3(a), la flèche

$$H^2_{\text{cont}}(k, H^2(X^s, \mathbb{Z}_\ell(2))) \to \varprojlim H^2(k, H^2(X^s, \mu_{\ell^n}^{\otimes 2}))$$

est un isomorphisme. □

Proposition 4.7. *Supposons que X satisfait (H4). Sous l'une ou l'autre des hypothèses*

(a) X possède un zéro-cycle de degré 1,

(b) $cd(k) \leq 3$,

on a :

(i) $\operatorname{Ker}(\mathrm{cl}^2_n)\{\ell\} = \operatorname{Ker}(\Theta_n)$ pour tout $n \geq 1$ et

(ii) $\operatorname{Ker} \mathrm{cl}^2\{\ell\} = \operatorname{Ker}(\Theta)\{\ell\}$.

Démonstration. (i) On utilise la suite exacte (4.3). Dans le cas (a) on utilise le lemme 3.4. Dans le cas (b), on a $H^4(k, \mu_{\ell^n}^{\otimes 2}) = 0$.

(ii) Dans le cas (a), on utilise un analogue du lemme 3.4. Dans le cas (b), on utilise la proposition 2.3, qui assure $H^4_{cont}(k, \mathbb{Z}_\ell(2)) = 0$. La suite exacte (4.2) donne alors que l'application $H^4_{\text{cont}}(X, \mathbb{Z}_\ell(2))^0 \to H^2_{\text{cont}}(k, H^2(X^s, \mathbb{Z}_\ell(2)))$ est injective. □

4.3. **Comparaison des deux applications cycle secondaires.** La démonstration du théorème suivant est étonnamment délicate. Nous y consacrons l'appendice de cet article.

Théorème 4.8 (Théorème A.1)**.** *Supposons que X satisfait (H4). Soit Φ l'application cycle sur $CH^2(X)_{\text{tors}}$ définie au paragraphe 4.1. Soit Θ l'application cycle sur $CH^2(X)_{\text{tors}}$ définie au paragraphe 4.2. Alors il existe un isomorphisme*

$$\operatorname{Ker}(\Theta)\{\ell\} \simeq \operatorname{Ker}(\Phi)\{\ell\}.$$

Remarque 4.9. Soit X une k-variété satisfaisant (H4). Soit n un entier positif. On a un homomorphisme composé :

$$\begin{aligned} CH^2(X)\{\ell\} \to H^1(k, S)\{\ell\} \to H^2(k, S[\ell^n])) = \\ = H^2(k, \operatorname{Pic}(X^s) \otimes \mu_{\ell^n}) \to H^2(k, H^2(X^s, \mu_{\ell^n}^{\otimes 2})). \end{aligned}$$

La flèche $CH^2(X)\{\ell\} \to H^1(k, S)\{\ell\}$ est induite par Φ. La multiplication par ℓ^n sur le k-tore S définit une suite exacte

$$1 \to S[\ell^n] \to S \to S \to 1$$

qui induit la flèche $H^1(k, S)\{\ell\} \to H^2(k, S[\ell^n])$. Pour n assez grand, cette flèche est injective (Proposition 2.2(b)). La flèche naturelle $\operatorname{Pic}(X^s)/\ell^n \to H^2(X^s, \mu_{\ell^n})$, qui sous l'hypothèse (H4) est un isomorphisme, induit la dernière flèche. Nous ne savons pas si la flèche composée ci-dessus coïncide (au signe près) avec l'application Θ_n restreinte à la torsion ℓ-primaire.

Théorème 4.10. *Supposons que X satisfait (H4). Sous l'une ou l'autre des hypothèses*
(a) X possède un zéro-cycle de degré 1,
(b) $cd(k) \leq 3$,
on a un isomorphisme $\mathrm{Ker}(\Phi)\{\ell\} \simeq \mathrm{Ker}(\mathrm{cl}^2)\{\ell\}$.

Démonstration. Cela résulte du théorème 4.8 et de la proposition 4.7. □

Théorème 4.11. *Supposons que X satisfait (H4). Sous l'une ou l'autre des hypothèses*
(a) X possède un zéro-cycle de degré 1,
(b) $cd(k) \leq 2$,
on a $\mathrm{Ker}(\mathrm{cl}^2)\{\ell\} = 0$.

Démonstration. On combine le théorème 4.8 et le théorème 4.2. □

Remarque 4.12. Soit $X \subset \mathbb{P}^4_k$ une quadrique anisotrope d'équation
$$x^2 - ay^2 - bz^2 + abt^2 - cw^2 = 0.$$
Alors la flèche
$$\mathrm{Ker}[H^3(k, \mathbb{Q}/\mathbb{Z}(2)) \to H^3(k(X), \mathbb{Q}/\mathbb{Z}(2))] \to CH^2(X)_{\mathrm{tors}}$$
est un isomorphisme
$$\mathbb{Z}/2 \simeq CH^2(X)_{\mathrm{tors}}.$$
Ceci resulte du théorème 4.1. De fait dans ce cas $\mathrm{Pic}(X) = \mathrm{Pic}(X^s) = \mathbb{Z}$ avec action triviale de G. On a donc $H^1(k, S) = 0$, et l'application $\mathrm{Pic}(X) \otimes k^* \to (\mathrm{Pic}(X^s) \otimes k_s^*)^G$ est un isomorphisme. Par ailleurs
$$\mathrm{Ker}[H^3(k, \mathbb{Q}/\mathbb{Z}(2)) \to H^3(k(X), \mathbb{Q}/\mathbb{Z}(2))] = \mathbb{Z}/2$$
engendré par la classe du cup-produit $(a) \cup (b) \cup (c) \in H^3(k, \mathbb{Z}/2)$, comme établi par Arason [Ara75]. Que l'on ait $CH^2(X)_{\mathrm{tors}} = \mathbb{Z}/2$ pour une telle quadrique avait été établi par Karpenko [Kar91, Theorem 5.3]. C'est la classe qui est utilisée dans le théorème 1.5 (= 6.3) de [SS22].

Sur un corps de nombres totalement imaginaire, on n'a pas de tel exemple, car toute forme quadratique en 5 variables a un zéro non trivial.

Sur le corps $k = \mathbb{R}$ ou $k = \mathbb{Q}$, on trouve donc une quadrique $X \subset \mathbb{P}^4_{\mathbb{R}}$ pour laquelle l'application $\Phi : CH^2(X)_{\mathrm{tors}} \to H^1(k, S)$ a un noyau non nul de 2-torsion.

Par contre, O. Wittenberg (communication personnelle) a montré que sur $\mathbb{R}$ comme sur un corps de nombres, par exemple $\mathbb{Q}$, pour toute variété X satisfaisant (H4), et en particulier pour la quadrique dans $\mathbb{P}^4_k$ sans k-point ci-dessus, l'application $CH^2(X)_{\mathrm{tors}} \to H^4_{\mathrm{cont}}(X, \mathbb{Z}_2(2))$ est injective. Voir aussi [SS22, Remark 6.4].

5. Surfaces fibrées en coniques sur la droite projective

Dans ce paragraphe, par k-surface rationnelle on entend une k-surface projective, lisse, géométriquement rationnelle. Une telle surface X satisfait (H4). On note S le k-tore de groupe des cocaractères $\mathrm{Pic}(X^s)$. La suite exacte (4.1)
$$S(k) \to H^1(k, K_2(k_s(X))/K_2(k_s)) \to \mathrm{Ker}[CH^2(X) \to CH^2(X^s)] \to H^1(k, S)$$

se lit ici

$$S(k) \to H^1(k, K_2(k_s(X))/K_2(k_s)) \to A_0(X) \xrightarrow{\Phi} H^1(k, S). \tag{5.1}$$

Elle avait été étudiée dans ce cas par Bloch [Blo81] puis par Sansuc et le premier auteur [CTS81].

Soit $K = k(\mathbb{P}^1) = k(t)$. Soit $X \to \mathbb{P}^1_k$ une surface projective et lisse sur k, géométriquement connexe, fibrée en coniques sur $\mathbb{P}^1_k$, de fibre générique donnée par la conique d'équation homogène dans $\mathbb{P}^2_K$:

$$U^2 - a(t)V^2 - b(t)W^2 = 0.$$

Lemme 5.1 ([Noe70])**.** *La surface X est rationnelle.*

Démonstration. Rappelons la démonstration moderne. Toute conique sur le corps $k_s(t)$ admet un point rationnel (Tsen). Si la conique est lisse, elle est isomorphe à $\mathbb{P}^1_{k_s(t)}$. Son corps des fonctions, qui est celui de X, est transcendant pur sur k_s. □

Soit $A = (a, b)$ l'algèbre de quaternions associée sur le corps K et soit q la forme quadratique diagonale $\langle 1, -a, -b, ab\rangle$ sur K.

Le groupe des normes réduites $\mathrm{Nred}(A^*) \subset K^*$ est le groupe des éléments non nuls de K^* représentés par la forme quadratique q. Soit $K^*_q \subset K^*$ le sous-groupe formé des éléments $f \in K^*$ tels que la forme quadratique $f.q \perp -q$ sur le corps K soit l'image d'une forme quadratique sur k. Soit $k^*_q \subset k^*$ le groupe $k^* \cap K^*_q \subset K^*$. Complétant des calculs de S. Bloch [Blo81, §3], Sansuc et le premier auteur ont établi :

Théorème 5.2. [CTS81, Prop. 2, p. 437]. *Avec les notations ci-dessus, on a*

$$H^1(k, K_2(k_s(X))/K_2(k_s)) \xrightarrow{\simeq} K^*_q/\mathrm{Nred}(A^*),$$

et le quotient de

$$S(k) \to H^1(k, K_2(k_s(X))/K_2(k_s))$$

dans la suite (5.1) s'identifie à $K^*_q/k^*_q \cdot \mathrm{Nred}(A^*)$. On a la suite exacte

$$1 \to K^*_q/k^*_q \cdot \mathrm{Nred}(A^*) \to A_0(X) \xrightarrow{\Phi} H^1(k, S).$$

En utilisant ce calcul explicite du noyau de Φ, Sansuc et le premier auteur ont construit dans [CTS83, §3, p. 464-465] des exemples de surfaces fibrées en coniques sur la droite projective pour lesquelles le noyau de Φ n'est pas nul. D'après le théorème 4.11, ceci ne peut se produire si X a un zéro-cycle de degré 1 ou si $\mathrm{cd}(k) \leq 2$.

On a donné de tels exemples [1] sur tout corps k avec $\mathbb{Q}(t) \subset k \subset \mathbb{Q}_3((t))$, et sur tout corps k avec $\mathbb{C}(x, y, z) \subset k \subset \mathbb{C}((x))((y))((z))$. En particulier, pour tout $p \geq 5$, congru à -1 modulo 3, il existe des exemples avec le corps $k = \mathbb{Q}(\sqrt{-p})(t)$, dont la dimension cohomologique est 3. Un exemple concret est fourni pour tout tel p par une surface fibrée en conique sur $\mathbb{P}^1_k$ de fibre générique donnée par la conique d'équation homogène

$$X^2 + tY^2 + 3(s^2 - 2)(s^2 - 3)T^2 = 0,$$

sur le corps $K = k(\mathbb{P}^1) = Q(\sqrt{-p})(t)(s)$.

1. À la page 465, ligne -15 de [CTS83], il faut lire : il n'existe pas $a \in \mathbb{Q}^*$.

La forme quaternionienne associée est

$$q = \langle 1, -t, -3(s^2-2)(s^2-3), 3t(s^2-2)(s^2-3)\rangle.$$

L'élément $f = 2(s^2-3)$ est dans K_q^* mais pas dans $k_q^* \cdot D_K(q)$.

En combinant cela avec le théorème 4.10, on obtient :

Théorème 5.3. *Soit $p \geq 5$ un nombre premier congru à -1 modulo 3. Soit $k = \mathbb{Q}(\sqrt{-p})(t)$ le corps des fractions rationnelles en une variable sur le corps $\mathbb{Q}(\sqrt{-p})$. C'est un corps de dimension cohomologique 3. Il existe une surface X/k projective, lisse et géométriquement rationnelle pour laquelle le noyau de l'application cycle de Jannsen $CH^2(X) \to H^4_{\mathrm{cont}}(X, \mathbb{Z}_2(2))$ contient un élément non nul de 2-torsion.*

Ceci répond à la question 1.7 (a) de [SS22].

Remarque 5.4. En prenant le produit de X par un espace projectif $\mathbb{P}^{d-2}_k$, on obtient en toute dimension $d \geq 2$ des exemples de variétés Y projectives, lisses, géométriquement rationnelles sur le corps $k = \mathbb{Q}(\sqrt{-p})(t)$ pour lesquelles les applications cycle de Jannsen ne sont pas injectives sur $CH^2(Y)[2]$ et pour lesquelles elles ne sont pas injectives sur $CH^d(Y)[2]$.

Remarque 5.5. Dans le théorème 5.3, le fait que l'on a $\mathrm{cd}(k) = 3$ joue un double rôle. D'une part le théorème 4.11 montre qu'on ne saurait avoir un exemple de non injectivité avec $\mathrm{cd}(k) \leq 2$. D'autre part, pour assurer la traduction entre l'exemple de [CTS83] concernant l'application Φ de Bloch et le présent exemple avec l'application de Jannsen en cohomologie continue, on a utilisé $\mathrm{cd}(k) \leq 3$, par le biais de la proposition 4.10(b), qui repose sur la proposition 4.7, laquelle repose sur la proposition 2.3.

Annexe A. La deuxième application d'Abel-Jacobi supérieure

L'objectif de cette annexe est la preuve de l'assertion suivante.

Théorème A.1. *Soient k un corps de caractéristique zéro, ℓ un nombre premier et X une k-variété projective lisse et géométriquement connexe qui satisfait (H4). Alors il existe un isomorphisme* $\mathrm{Ker}(\Theta)\{\ell\} \simeq \mathrm{Ker}(\Phi)\{\ell\}$.

On fixe quelques notations pour cette annexe. Soient k un corps, G le groupe de Galois absolu de k, X une k-variété et $p\colon X \to \mathrm{Spec}(k)$ le morphisme structural. On écrit $X_{\text{ét}}$ pour le petit site étale de X.

Si F est un faisceau abélien sur $X_{\text{ét}}$, p_*F est le faisceau associé au G-module continu $F(X^s) := \varinjlim_{L/k} F(X_L)$, où L/k parcourt l'ensemble des sous-extensions finies de k_s/k, et on a $\Gamma(\mathrm{Spec}(k)_{\text{ét}}, p_*F) = \Gamma(X_{\text{ét}}, F) = F(X^s)^G$. Si A est un complexe de faisceaux abéliens sur $X_{\text{ét}}$, on notera par $\mathbb{H}^*(X, A)$ l'hypercohomologie de A. On notera par F^s (resp. A^s) l'image réciproque de F (resp. A) le long du morphisme de projection $X^s \to X$.

A.1. **Homomorphismes dans la suite spectrale de Hochschild-Serre.** Soit A un complexe de faisceaux abéliens sur $X_{\text{ét}}$. On suppose que A appartient à $D^{\geq 0}(X_{\text{ét}})$, c'est-à-dire $\mathbb{H}^i(X, A) = 0$ pour tout $i < 0$.

La suite spectrale de Grothendieck associée à la composition $\Gamma(k, -) \circ p_* = \Gamma(X, -)$ est la suite spectrale de Hochschild-Serre

$$E_2^{i,j} := H^i(k, \mathbb{H}^j(X^s, A^s)) \Rightarrow \mathbb{H}^{i+j}(X, A). \tag{A.1}$$

La suite spectrale (A.1) est fonctorielle en A. On note $F^q\mathbb{H}^*(X,A)$ la filtration décroissante induite sur $\mathbb{H}^*(X,A)$. Pour tout $r \geq 1$ on a des homomorphismes

$$\varphi^1\colon F^1\mathbb{H}^r(X,A) \to H^1(k, \mathbb{H}^{r-1}(X^s, A^s)).$$

Si $\mathbb{H}^{r-1}(X^s,A^s) = 0$, alors la différentielle $d_2^{0,r-1}$ est nulle et on obtient un homomorphisme

$$\varphi^2\colon F^2\mathbb{H}^r(X,A) \to H^2(k, \mathbb{H}^{r-2}(X^s, A^s)).$$

On utilisera la proposition suivante (plus précisément, la remarque A.3 qui en est conséquence) pour construire le carré commutatif (A.26).

Proposition A.2. *Soit*

$$A \to B \to C \to A[1] \tag{A.2}$$

un triangle exact dans $D^{\geq 0}(X_{\text{ét}})$ et soit $\partial\colon \mathbb{H}^*(X,C) \to \mathbb{H}^{*+1}(X,A)$ l'homomorphisme de bord induit par (A.2). Soit $j \geq 2$ un entier. Supposons que l'on a $\mathbb{H}^{j-1}(X^s,A^s) = 0$ et que l'application $\mathbb{H}^{j-3}(X^s,B^s) \to \mathbb{H}^{j-3}(X^s,C^s)$ est surjective, ce qui donne une suite exacte courte de G-modules

$$0 \to \mathbb{H}^{j-2}(X^s,A^s) \to \mathbb{H}^{j-2}(X^s,B^s) \to \mathbb{H}^{j-2}(X^s,C^s) \to 0. \tag{A.3}$$

Alors $\partial(\mathbb{H}^{j-1}(X,C)) \subset F^2\mathbb{H}^j(X,A)$ et on a un diagramme commutatif

$$\begin{array}{ccc}
F^1\mathbb{H}^{j-1}(X,C) & \xrightarrow{\varphi^1} & H^1(k, \mathbb{H}^{j-2}(X^s,C^s)) \\
\downarrow{\scriptstyle\partial} & & \downarrow{\scriptstyle\delta} \\
F^2\mathbb{H}^j(X,A) & \xrightarrow{\varphi^2} & H^2(k, \mathbb{H}^{j-2}(X^s,A^s)).
\end{array}$$

où δ est l'homomorphisme de bord associé à (A.3).

Démonstration. Si $D = (D^{i,j})_{i,j\geq 0}$ est un complexe double, où i dénote la coordonnée horizontale et j la coordonnée verticale, on notera $\mathrm{Tot}(D)$ le complexe total associé à D, par d_0 (resp. d_1) la différentielle verticale (resp. horizontale) de la deuxième suite spectrale associée à D, et par d la différentielle totale. On écrira $H_{d_0}(D)$ pour le complexe double obtenu en prenant la cohomologie de D par rapport à d_0 (c'est la page E_1 de la deuxième suite spectrale associée à D). Si $x \in \mathrm{Tot}(D)^j$ satisfait $d(x) = 0$, on notera $\overline{x}$ sa classe dans $H^j(\mathrm{Tot}(D))$. Si $x^{i,j} \in D^{i,j}$ satisfait $d_0(x^{i,j}) = 0$ et $d_1(x^{i,j}) \in \mathrm{Im}(d_0)$, on écrira $[x^{i,j}]$ pour sa classe modulo $\mathrm{Im}(d_0)+\mathrm{Im}(d_1)$, c'est-à-dire dans la page E_2 de la deuxième suite spectrale associée à D.

D'après le lemme du fer à cheval (Horseshoe Lemma en anglais, le dual de [Wei94, Lemma 2.2.4]), on peut construire un diagramme commutatif de complexes doubles de G-modules

$$\begin{array}{ccccccccc}
0 & \longrightarrow & A' & \longrightarrow & B' & \longrightarrow & C' & \longrightarrow & 0 \\
 & & \downarrow & & \downarrow & & \downarrow & & \\
0 & \longrightarrow & I & \xrightarrow{\iota} & J & \xrightarrow{\pi} & K & \longrightarrow & 0,
\end{array} \tag{A.4}$$

où la ligne du haut est une suite exacte courte de complexes de G-modules (vus comme complexes doubles concentrés dans la ligne zéro) qui représente le triangle

$$Rp_*A \to Rp_*B \to Rp_*C \to Rp_*A[1],$$

les flèches verticales sont des résolutions de Cartan-Eilenberg, et pour tout $q \geq 0$ la suite exacte de complexes de G-modules

$$0 \to I^{*,q} \xrightarrow{\iota^{*,q}} J^{*,q} \xrightarrow{\pi^{*,q}} K^{*,q} \to 0$$

est scindée. En particulier, la suite du bas reste exacte après passage aux G-invariants.

On peut visualiser la résolution $A' \to I$ comme suit :

$$\begin{tikzcd}
\vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \\
(A')^2 \arrow[u] \arrow[r] & I^{0,2} \arrow[u, "d_0"] \arrow[r, "d_1"] & I^{1,2} \arrow[u, "d_0"] \arrow[r, "d_1"] & I^{2,2} \arrow[u, "d_0"] \arrow[r, "d_1"] & \cdots \\
(A')^1 \arrow[u] \arrow[r] & I^{0,1} \arrow[u, "d_0"] \arrow[r, "d_1"] & I^{1,1} \arrow[u, "d_0"] \arrow[r] & I^{2,1} \arrow[u, "d_0"] \arrow[r, "d_1"] & \cdots \\
(A')^0 \arrow[u] \arrow[r] & I^{0,0} \arrow[u, "d_0"] \arrow[r, "d_1"] & I^{1,0} \arrow[u, "d_0"] \arrow[r, "d_1"] & I^{2,0} \arrow[u, "d_0"] \arrow[r, "d_1"] & \cdots .
\end{tikzcd} \tag{A.5}$$

Une description similaire s'applique à $B' \to J$ et $C' \to K$.

Par définition, la suite spectrale de Hochschild-Serre pour A (resp. B, C) est la deuxième suite spectrale du complexe double I^G (resp. J^G, K^G) et les homomorphismes naturels entre ces suites spectrales sont induits par ι et π. La suite spectrale de Hochschild-Serre pour A est donc obtenue par passage aux G-invariants dans (A.5) (A' exclu). Sa page E_1 est donnée par $H_{d_0}(I^G)$, et sa page E_2 est obtenue en prenant la cohomologie de E_1 par rapport à la différentielle induite par d_1. Les suites spectrales de Hochschild-Serre de B et C admettent des descriptions analogues.

Le diagramme (A.4) induit un diagramme commutatif de G-modules

$$\begin{tikzcd}
0 \arrow[r] & \mathbb{H}^{j-2}(X^s, A^s) \arrow[r] \arrow[d] & \mathbb{H}^{j-2}(X^s, B^s) \arrow[r] \arrow[d] & \mathbb{H}^{j-2}(X^s, C^s) \arrow[r] \arrow[d] & 0 \\
0 \arrow[r] & H_{d_0}(I)^{*,j-2} \arrow[r, "H_{d_0}(\iota)"] & H_{d_0}(J)^{*,j-2} \arrow[r, "H_{d_0}(\pi)"] & H_{d_0}(K)^{*,j-2} \arrow[r] & 0,
\end{tikzcd} \tag{A.6}$$

où les flèches verticales sont des résolutions injectives. Ici, la suite exacte supérieure est (A.3) : son exactitude suit de la nullité du groupe $\mathbb{H}^{j-1}(X^s, A^s)$ et de la surjectivité de l'application $\mathbb{H}^{j-3}(X^s, B^s) \to \mathbb{H}^{j-3}(X^s, C^s)$. La suite exacte de complexes de G-modules inférieure est scindée ligne par ligne et reste donc exacte après passage aux G-invariants.

Le fait que $\partial(\mathbb{H}^{j-1}(X, C)) \subset F^2\mathbb{H}^j(X, A)$ suit de la fonctorialité de la suite spectrale de Hochschild-Serre pour A et $C[1]$ par rapport au morphisme $A \to C[1]$ et du fait que $F^1\mathbb{H}^j(X, A) = F^2\mathbb{H}^j(X, A)$.

Tout élément de $F^1\mathbb{H}^j(X, C)$ est la classe $\overline{c}$ d'un élément

$$c = (c^{i,j-i-1})_{i=0}^{j-1} \in \mathrm{Tot}(K^G)^{j-1}$$

tel que $d(c) = 0$ et $c^{0,j-1} = 0$. On en déduit $d_0(c^{1,j-2}) = d_1(c^{0,j-1}) = d_1(0) = 0$. On a aussi $d_1(c^{1,j-2}) = d_0(c^{2,j-3}) \in \mathrm{Im}(d_0)$. Par définition $\varphi^1(\overline{c}) = [c^{1,j-2}]$.

La construction de $\partial(\overline{c})$ se fait à l'aide du diagramme suivant induit par (A.4) :

$$\begin{tikzcd} & \mathrm{Tot}(J^G)^{j-1} \arrow[r, "\pi"] \arrow[d, "d"] & \mathrm{Tot}(K^G)^{j-1} \\ \mathrm{Tot}(I^G)^j \arrow[r, "\iota"] & \mathrm{Tot}(J^G)^j & \end{tikzcd}$$

Plus précisément, il existe $b = (b^{i,j-i-1})_{i=0}^{j-1} \in \mathrm{Tot}(J^G)^{j-1}$ tel que $\pi(b) = c$ et $b^{0,j-1} = 0$. Alors $\pi(d(b)) = d(c) = 0$, donc il existe un unique $a = (a^{i,j-i})_{i=0}^{j} \in \mathrm{Tot}(I^G)^j$ tel que $\iota(a) = b$. On a $d(a) = 0$ et par définition $\partial(\overline{c}) = \overline{a}$.

Comme $b^{0,j-1} = 0$ et ι est injectif, on a $a^{0,j} = 0$. Comme $\overline{a} \in F^2\mathbb{H}^j(X, A)$, il existe $a^{0,j-1} \in (I^G)^{0,j-1}$ et $a^{1,j-2} \in (I^G)^{1,j-2}$ tels que $d_0(a^{0,j-1}) = 0$ et $a^{1,j-1} = d_1(a^{0,j-1}) + d_0(a^{1,j-2})$. Si on remplace b par $b - \iota(a^{0,j-1} + a^{1,j-2})$ et a par $a - d(a^{0,j-1} + a^{1,j-2})$, on a encore $\pi(b) = c$, $\iota(a) = d(b)$ et $\partial(\overline{c}) = \overline{a}$, et on a aussi $a^{0,j} = a^{1,j-1} = 0$. En particulier, $d_0(a^{2,j-2}) = 0$. En outre $d_1(a^{2,j-2}) = -d_0(a^{3,j-3}) \in \mathrm{Im}(d_0)$. Par définition $\varphi^2(\overline{a}) = [a^{2,j-2}]$, donc

$$\varphi^2(\partial(\overline{c})) = \varphi^2(\overline{a}) = [a^{2,j-2}]. \tag{A.7}$$

L'élément $\delta(\varphi^1(\overline{c})) = \delta([c^{1,j-2}])$ se construit à partir du diagramme suivant induit par (A.6) :

$$\begin{tikzcd} & (H_{d_0}(J)^{1,j-2})^G \arrow[r, "H_{d_0}(\pi)"] \arrow[d, "H_{d_0}(d_1)"] & (H_{d_0}(K)^{1,j-2})^G \\ (H_{d_0}(I)^{2,j-2})^G \arrow[r, "H_{d_0}(\iota)"] & (H_{d_0}(J)^{2,j-2})^G & \end{tikzcd}$$

Plus précisément, il existe $\beta^{1,j-2} \in J^{1,j-2}$ tel que $d_0(\beta^{1,j-2}) = 0$, la classe de $\beta^{1,j-2}$ dans $H_{d_0}(J)^{1,j-2}$ est G-invariante et $\pi(\beta^{1,j-2}) = c^{1,j-2} + d_0(\gamma^{1,j-3})$ avec $\gamma^{1,j-3} \in K^{1,j-3}$. Comme π est surjectif, on peut trouver $\beta^{1,j-3} \in J^{1,j-3}$ tel que $\pi(\beta^{1,j-3}) = \gamma^{1,j-3}$. Si on remplace $\beta^{1,j-2}$ par $\beta^{1,j-2} - d_0(\beta^{1,j-3})$, alors $d_0(\beta^{1,j-2}) = 0$, la classe de $\beta^{1,j-2}$ dans $H_{d_0}(J)^{1,j-2}$ est encore G-invariante et $\pi(\beta^{1,j-2}) = c^{1,j-2}$. Il existe un unique $\alpha^{2,j-2} \in I^{2,j-2}$ tel que $\iota(\alpha^{2,j-2}) = d_1(\beta^{1,j-2})$. Comme $d_0(\beta^{1,j-2}) = 0$ et la classe de $\beta^{1,j-2}$ dans $H_{d_0}(I)^{2,j-2}$ est G-invariante, on a $d_0(\alpha^{2,j-2}) = 0$ et la classe de $\alpha^{2,j-2}$ dans $H_{d_0}(I)^{2,j-2}$ est G-invariante. Par définition $\delta([c^{1,j-2}]) = [\alpha^{2,j-2}]$, donc

$$\delta(\varphi^1(\overline{c})) = \delta([c^{1,j-2}]) = [\alpha^{2,j-2}]. \tag{A.8}$$

Comme $\pi(b^{1,j-2}) = \pi(\beta^{1,j-2}) = c$, il existe un unique $\alpha^{1,j-2}$ tel que $b^{1,j-2} - \beta^{1,j-2} = \iota(\alpha^{1,j-2})$. L'homomorphisme ι étant injectif, par application de d_1 on obtient $a^{2,j-2} - \alpha^{2,j-2} = d_1(\alpha^{1,j-2})$, donc

$$[a^{2,j-2}] = [\alpha^{2,j-2}]. \tag{A.9}$$

La combinaison de (A.7), (A.8) et (A.9) entraîne $\varphi^2(\partial(\overline{c})) = \delta(\varphi^1(\overline{c}))$. □

Remarque A.3. En appliquant le foncteur de translation, on obtient des variantes du lemme A.2. Par exemple, soient $A \to B \xrightarrow{f} C \to A[1]$ un triangle dans $D^{\geq 0}(X_{\text{ét}})$ et $j \geq 2$ un entier. Supposons $\mathbb{H}^{j-1}(X^s, C^s) = 0$ et que l'homomorphisme $\mathbb{H}^{j-2}(X^s, A^s) \to \mathbb{H}^{j-2}(X^s, B^s)$ est surjectif. Alors on a

$$f_*(F^1\mathbb{H}^j(X, B)) \subset F^2\mathbb{H}^j(X, C),$$

et on a un carré commutatif au signe près

$$\begin{array}{ccc} F^1\mathbb{H}^j(X,B) & \xrightarrow{\varphi^1} & H^1(k,\mathbb{H}^{j-1}(X^s,B^s)) \\ \downarrow{\scriptstyle f_*} & & \downarrow{\scriptstyle \delta} \\ F^2\mathbb{H}^j(X,C) & \xrightarrow{\varphi^2} & H^2(k,\mathbb{H}^{j-2}(X^s,C^s)), \end{array}$$

où δ est le bord de la suite exacte longue de cohomologie associée à la suite exacte courte de G-modules

$$0 \to \mathbb{H}^{j-2}(X^s,C^s) \to \mathbb{H}^{j-1}(X^s,A^s) \to \mathbb{H}^{j-1}(X^s,B^s) \to 0.$$

A.2. **Le complexe de Lichtenbaum.** Pour tout schéma noethérien U, on notera $\Gamma(U,2)$ le complexe de faisceaux sur le petit site étale de U défini par Lichtenbaum dans [Lic87, Definition 2.3]. Ce complexe est concentré en degrés 1 et 2 ; voir [Lic87, Remark 2.2]. Si $U = \operatorname{Spec}(A)$ est affine, on écrira $\Gamma(A,2)$ pour $\Gamma(U,2)$.

On suppose désormais que $\operatorname{car}(k) = 0$ et que la k-variété X est lisse et géométriquement connexe. On pose $\Gamma(2) \coloneqq \Gamma(X,2)$.

Soit $j\colon \operatorname{Spec} k(X) \hookrightarrow X$ l'inclusion du point générique. On a un isomorphisme canonique $\Gamma(k(X),2) \simeq j^*\Gamma(2)$. On note $\Gamma(k(X)/X,2)$ la fibre homotopique de l'homomorphisme canonique $\Gamma(2) \to Rj_*\Gamma(k(X),2)$ dans la catégorie dérivée de $X_{\text{ét}}$ et par $\mathbb{H}^*(k(X)/k,\Gamma(2))$ l'hypercohomologie (étale) de $\Gamma(k(X)/X,2)$. On a donc un triangle exact

$$\Gamma(k(X)/X,2) \to \Gamma(2) \to Rj_*\Gamma(k(X),2) \to \Gamma(k(X)/X,2)[1] \tag{A.10}$$

qui induit une suite exacte courte de G-modules

(A.11)

$$0 \to \mathbb{H}^2(k_s(X),\Gamma(2))/\mathbb{H}^2(X^s,\Gamma(2)) \to \mathbb{H}^3(k_s(X)/X^s,\Gamma(2)) \to \mathbb{H}^3(X^s,\Gamma(2)) \to 0$$

et une suite exacte longue

(A.12)

$$\cdots \to \mathbb{H}^i(k(X)/k,\Gamma(2)) \to \mathbb{H}^i(X,\Gamma(2)) \to \mathbb{H}^i(k(X),\Gamma(2)) \to \mathbb{H}^{i+1}(k(X)/k,\Gamma(2)) \to \cdots$$

Dans (A.11), on a utilisé le fait que $\mathbb{H}^3(k_s(X),\Gamma(2)) = 0$; voir [Lic87, Proposition 4.3].

On a le complexe de Gersten-Quillen

$$K_2(k_s(X)) \to \bigoplus_{x\in (X^s)^{(1)}} k_s(x)^* \to \bigoplus_{x\in (X^s)^{(2)}} \mathbb{Z}. \tag{A.13}$$

Posons

$$Z \coloneqq \operatorname{Ker}\left[\bigoplus_{x\in (X^s)^{(1)}} k_s(x)^* \to \bigoplus_{x\in (X^s)^{(2)}} \mathbb{Z}\right].$$

On obtient une suite exacte courte de G-modules

$$0 \to K_2(k_s(X))/H^0(X^s,\mathcal{K}_2) \to Z \to H^1(X^s,\mathcal{K}_2) \to 0. \tag{A.14}$$

Proposition A.4. *On a un diagramme commutatif de G-modules*

$$\begin{array}{ccccccccc} 0 & \to & K_2(k_s(X))/H^0(X^s,\mathcal{K}_2) & \to & Z & \to & H^1(X^s,\mathcal{K}_2) & \to & 0 \\ & & \downarrow{\scriptstyle \wr} & & \downarrow{\scriptstyle \wr} & & \downarrow{\scriptstyle \wr} & & \\ 0 & \to & \mathbb{H}^2(k_s(X),\Gamma(2))/\mathbb{H}^2(X^s,\Gamma(2)) & \to & \mathbb{H}^3(k_s(X)/X^s,\Gamma(2)) & \to & \mathbb{H}^3(X^s,\Gamma(2)) & \to & 0, \end{array}$$

où la suite exacte du haut est (A.14) et celle du bas est induite par (A.11).

Démonstration. La démonstration s'appuie sur des arguments contenus dans la preuve de [Lic90, Theorem 4.4]. Dans [Lic90, Theorem 4.4] Lichtenbaum travaille à la 2-torsion près mais, comme on expliquera dans la suite, on peut utiliser des résultats de Kahn [Kah96] pour supprimer cette hypothèse. Si C est un complexe de faisceaux abéliens étales sur X, on notera $\mathcal{H}^i(C)$ le i-ème faisceau d'homologie de C.

Comme le foncteur j^* est exact, on a un isomorphisme canonique

$$Rj^*\Gamma(2) \simeq j^*\Gamma(2) \simeq \Gamma(k(X), 2).$$

L'adjonction entre j^* et j_* donne alors un homomorphisme canonique

$$\Gamma(2) \to Rj_*\Gamma(k(X), 2)$$

qui fait partie de (A.10). Le complexe $\Gamma(2)$ étant acyclique en degrés $\neq 1, 2$, cette flèche factorise par

$$\psi \colon \Gamma(2) \to \tau_{\leq 3} Rj_*\Gamma(k(X), 2),$$

où τ est le foncteur canonique de troncation. Tous les triangles qui complètent ψ sont (non canoniquement) isomorphes entre eux. Donc, la suite (A.11) étant induite par (A.10), elle est aussi induite par le triangle

$$\Gamma(2) \xrightarrow{\psi} \tau_{\leq 3} Rj_*\Gamma(k(X), 2) \to \mathrm{Cone}(\psi) \to \Gamma(2)[1]. \tag{A.15}$$

Pour tout $x \in X$, soient A_x l'henselisé strict de X à x et K_x le corps des fractions de A_x. Pour tout $x \in X$, on a un diagramme commutatif

$$\begin{tikzcd}
(j_x)^*\mathcal{H}^2(\Gamma(2)) \arrow[r, "\simeq"] \arrow[d, "(j_x)^*(\mathcal{H}^2(\psi))"] & H^2(A_x, \Gamma(2)) \arrow[d] & K_2(A_x) \arrow[l, "\theta_{A_x}"', "\simeq"] \arrow[d, "\psi_x"] \\
(j_x)^*\mathcal{H}^2(Rj_*\Gamma(k(X), 2)) \arrow[r, "\simeq"] & H^2(K_x, \Gamma(2)) & K_2(K_x). \arrow[l, "\theta_{K_x}"', "\simeq"]
\end{tikzcd} \tag{A.16}$$

(Noter que, selon nos notations, $H^2(A_x, \Gamma(2)) = \mathcal{H}^2(\Gamma(A_x, 2))$ et $H^2(K_x, \Gamma(2)) = \mathcal{H}^2(\Gamma(K_x, 2))$.) Les isomorphismes de gauche dans (A.16) sont donnés par le fait que la construction de $\Gamma(2)$ commute avec tout morphisme étale et par l'exactitude du foncteur $(j_x)^*$. Dans le carré de droite dans (A.16), l'isomorphisme θ_{A_x} est construit dans [Lic90, Proposition 2.9].

Venons à la définition de θ_{K_x}. De manière plus générale, pour tout corps K on dispose d'un isomorphisme canonique

$$\theta_K \colon K_2(K) \xrightarrow{\simeq} \mathbb{H}^2(K, \Gamma(2)).$$

La construction de θ_K est donnée dans [Lic87, p. 195], et le fait qu'il est un isomorphisme suit de [Lic90, Theorem 4.5]. L'homomorphisme ψ_x apparaît dans le complexe de Gersten-Quillen pour A_x (on note $\kappa(P)$ le corps résiduel en le point P) :

(A.17)

$$0 \to K_2(A_x) \to K_2(K_x) \to \bigoplus_{P \in \mathrm{Spec}(A_x)^{(1)}} K_1(\kappa(P)) \to \bigoplus_{P \in \mathrm{Spec}(A_x)^{(2)}} K_0(\kappa(P)) \to 0,$$

complexe qui est exact d'après la conjecture de Gersten pour A_x démontrée par Quillen [Qui72, Theorem 5.11]. Plus précisément, le théorème de Quillen s'applique aux anneaux locaux des k-variétés lisses, mais comme le complexe de Gersten-Quillen commute aux limites inductives d'anneaux avec homomorphismes de transition étales, la conjecture de Gersten pour A_x s'en suit.

Par l'adjonction entre $(j_x)^*$ et $(j_x)_*$, les $(\psi_x)_{x\in X^{(1)}}$ induisent un homomorphisme

$$\phi = (\phi_x)_{x\in X^{(1)}} \colon \mathcal{H}^2(Rj_*\Gamma(k(X),2)) \to \prod_{x\in X^{(1)}} (j_x)_*\mathbf{G}_m. \tag{A.18}$$

Par construction des ϕ_x, l'inclusion $k(X) \subset K_x$ induit un diagramme commutatif

$$\begin{tikzcd} k(x)^* \arrow[d, hook] & K_2(k(X)) \arrow[l] \arrow[r, "\theta_{k_2(X)}", "\simeq"'] \arrow[d] & H^2(k(X),\Gamma(2)) \arrow[d] \arrow[ll, bend right, "\phi_x"'] \\ k(x)_s^* & K_2(K_x) \arrow[l] \arrow[r, "\theta_{K_x}", "\simeq"'] & H^2(K_x,\Gamma(2)), \end{tikzcd}$$

où les homomorphismes de gauche sont les applications résidu usuels qui apparaissent dans le complexe de Gersten-Quillen pour X et A_x. Donc

(A.19)

$$K_2(k(X)) \xrightarrow[\simeq]{\theta_{k_2(X)}} H^2(k(X),\Gamma(2)) \xrightarrow{\phi_x} k(x)^* \text{ est l'application résidu pour } x.$$

Si F est un faisceau étale sur X, pour toute section s du faisceau étale j_*j^*F il existe un ouvert dense $U \subset X$ tel que $s|_U$ provient de $F(U)$. Une application de cette observation à une résolution injective de $Rj_*\Gamma(k(X),2)$ montre que pour toute section s du faisceau étale $\mathcal{H}^2(Rj_*\Gamma(k(X),2))$, le nombre des points $x \in X^{(1)}$ tels que $\phi_x(s) \neq 0$ est fini. Donc ϕ s'insère dans la suite exacte de faisceaux étales

$$0 \to \mathcal{H}^2(\Gamma(2)) \xrightarrow{\mathcal{H}^2(\psi)} \mathcal{H}^2(Rj_*\Gamma(k(X),2)) \xrightarrow{\phi} \bigoplus_{x\in X^{(1)}} (j_x)_*\mathbf{G}_m \to \bigoplus_{x\in X^{(2)}} (j_x)_*\mathbb{Z} \to 0.$$

Il existe alors un isomorphisme $\mathrm{Coker}(\mathcal{H}^2(\psi)) \simeq \mathcal{Z}$, où $\mathcal{Z}$ est le faisceau étale

$$\mathcal{Z} \coloneqq \mathrm{Ker}\left[\bigoplus_{x\in X^{(1)}} (j_x)_*\mathbf{G}_m \to \bigoplus_{x\in X^{(2)}} (j_x)_*\mathbb{Z}\right].$$

En particulier $p_*\mathcal{Z} = Z$.

En outre, l'homomorphisme $\mathcal{H}^1(\psi)$ est un isomorphisme. Ceci a été démontré par Lichtenbaum [Lic90, p. 49] à la 2-torsion près. L'énoncé complet suit du fait que, pour tout point $x \in X$, on a un diagramme commutatif (analogue à (A.16))

$$\begin{tikzcd} (j_x)^*\mathcal{H}^1(\Gamma(2)) \arrow[r, "\simeq"] \arrow[d, "(j_x)^*(\mathcal{H}^1(\psi))"] & H^1(A_x,\Gamma(2)) \arrow[d, "\wr"] & K_3(A_x)_{\mathrm{ind}} \arrow[l, "\simeq"'] \arrow[d, "\wr"] \\ (j_x)^*\mathcal{H}^1(Rj_*\Gamma(k(X),2)) \arrow[r, "\simeq"] & H^1(K_x,\Gamma(2)) & K_3(K_x)_{\mathrm{ind}}, \arrow[l, "\simeq"'] \end{tikzcd}$$

où le carré de gauche est induit par la compatibilité de la construction de $\Gamma(2)$ avec tout morphisme étale et l'exactitude de $(j_x)^*$, et le carré de droite est contenu dans [Kah96, bas de p. 399]. On rappelle que, pour tout corps K, le groupe $K_3(K)_{\mathrm{ind}}$ est défini comme le conoyau de l'application naturelle $K_3^{\mathrm{Milnor}}(K) \to K_3^{\mathrm{Quillen}}(K)$.

En conclusion, on a montré que l'application $\mathcal{H}^1(\psi)$ est un isomorphisme, que $\mathcal{H}^2(\psi)$ est injective et que l'on a un isomorphisme de G-modules $\mathrm{Coker}(\mathcal{H}^2(\psi)) \simeq \mathcal{Z}$. Le lemme [Lic90, Lemma 4.3] donne alors un triangle exact

$$\Gamma(2) \xrightarrow{\psi} \tau_{\leq 3}Rj_*\Gamma(k(X),2) \xrightarrow{\tilde{\phi}} \mathcal{Z}[-2] \to \Gamma(2)[1], \tag{A.20}$$

où $\mathcal{H}^2(\tilde{\phi}) = \phi$. Les triangles (A.15) et (A.20) complètent ψ, donc ils sont isomorphes. La suite de G-modules (A.11) étant induite par le triangle (A.15), elle est alors isomorphe à la suite de G-modules induite par application de Rp_* dans le triangle (A.20) :

$$0 \to \mathbb{H}^2(k_s(X), \Gamma(2))/\mathbb{H}^2(\Gamma(X^s, 2)) \to Z \to \mathbb{H}^3(X^s, \Gamma(2)) \to 0,$$

où on a utilisé le fait que $p_*\mathcal{Z} = Z$. Considérons le diagramme de suites exactes de G-modules suivant :

(A.21)

$$\begin{tikzcd}
0 \arrow[r] & K_2(k_s(X))/H^0(X^s, \mathcal{K}_2) \arrow[r] \arrow[d, "\wr"] & Z \arrow[r] \arrow[d, equal] & H^1(X^s, \mathcal{K}_2) \arrow[r] \arrow[d, "\wr"] & 0 \\
0 \arrow[r] & \mathbb{H}^2(k_s(X), \Gamma(2))/\mathbb{H}^2(\Gamma(X^s, 2)) \arrow[r] & Z \arrow[r] & \mathbb{H}^3(X^s, \Gamma(2)) \arrow[r] & 0.
\end{tikzcd}$$

Ici la suite du haut est (A.14), celle du bas est (A.10), l'isomorphisme vertical de gauche est induit par l'isomorphisme canonique

$$\theta_{k_2(X)} \colon K_2(k_s(X)) \xrightarrow{\simeq} \mathbb{H}^2(k_s(X), \Gamma(2))$$

de [Lic90, Theorem 4.5] déjà mentionné ci-dessus. La commutativité du carré de gauche suit de l'assertion (A.19), considérée sur k_s. La flèche verticale de droite est obtenue par passage aux quotients.

Le diagramme (A.21) est donc commutatif, ce qui établit la Proposition A.4. □

Notons

$$CH^2(X)_0 \coloneqq \mathrm{Ker}[CH^2(X) \to CH^2(X^s)].$$

Si X satisfait (H4), le groupe $H^0(X^s, \mathcal{K}_2)$ est uniquement divisible (Théorème 4.1(a)) et, comme montré par le lemme A.5 ci-dessous, l'application $H^1(k, Z) \to H^1(k, H^1(X^s, \mathcal{K}_2))$ induite par (A.14) s'identifie à la flèche $\Phi : CH^2(X)_0 \to H^1(k, S)$ dans le théorème 4.1 ci-dessus.

Lemme A.5. *Supposons que X satisfait (H4) et soit S le k-tore de groupe des cocaractères* $\mathrm{Pic}(X^s)$. *Alors on a un carré commutatif*

$$\begin{tikzcd}
CH^2(X)_0 \arrow[r, "\Phi"] \arrow[d, "\wr"] & H^1(k, S) \arrow[d, "\wr"] \\
H^1(k, Z) \arrow[r] & H^1(k, H^1(X^s, \mathcal{K}_2)),
\end{tikzcd}$$

la flèche horizontale inférieure étant induite par la suite (A.14).

Démonstration. La flèche verticale de gauche provient de le preuve de [CTR85, Proposition 3.6] : elle est un isomorphisme pour toute k-variété lisse géométriquement connexe. L'isomorphisme vertical de droite vient du théorème 4.1(b) ; ici on utilise le fait que X satisfait (H4).

La commutativité du carré est par construction de Φ. En effet, soit f le composé $CH^2(X)_0 \xrightarrow{\simeq} H^1(k, Z) \to H^1(k, H^1(X^s, \mathcal{K}_2))$. Alors f est l'application $CH^2(X)_0 \to H^1(k, H^1(X^s, \mathcal{K}_2))$ qui apparaît dans l'énoncé de [CTR85, Proposition 3.6]. Dans la preuve du théorème 4.1(b) on a défini Φ comme la composée de f et de l'inverse de l'isomorphisme $H^1(k, S) \xrightarrow{\simeq} H^1(k, H^1(X^s, \mathcal{K}_2))$. Donc le carré commute, comme voulu. □

A.3. **Application cycle motivique étale.** Dans [Lic90, §5], Lichtenbaum construit une application cycle

$$\mathrm{cl}_\Gamma \colon CH^2(X) \to \mathbb{H}^4(X, \Gamma(2)).$$

Par [Kah96, Lemma 2.1], on a un isomorphisme $CH^2(X) \xrightarrow{\simeq} \mathbb{H}^4(k(X)/X, \Gamma(2))$. Plus précisément, dans la preuve de [Kah96, Lemma 2.1], Kahn note que l'homomorphisme $\mathbb{H}^4(k(X)/X, \Gamma(2)) \to \mathbb{H}^4(X, \Gamma(2))$ provenant de (A.12) est injectif, et que l'application cl_Γ factorise par l'isomorphisme ci-dessus :

$$\begin{tikzcd} CH^2(X) \arrow[r, "\simeq"] \arrow[dr, "\mathrm{cl}_\Gamma"'] & \mathbb{H}^4(k(X)/X, \Gamma(2)) \arrow[d, hook] \\ & \mathbb{H}^4(X, \Gamma(2)). \end{tikzcd} \tag{A.22}$$

La fonctorialité de la suite spectrale (A.1) en A donne un carré commutatif

$$\begin{tikzcd} F^1\mathbb{H}^4(k(X)/X, \Gamma(2)) \arrow[r, "\simeq"] \arrow[d, hook] & H^1(k, \mathbb{H}^3(k_s(X)/X^s, \Gamma(2)) \arrow[d] \\ F^1\mathbb{H}^4(X, \Gamma(2)) \arrow[r] & H^1(k, \mathbb{H}^3(X^s, \Gamma(2))). \end{tikzcd} \tag{A.23}$$

Comme expliqué au début de [Kah96, p. 403], le fait que la flèche horizontale supérieure est un isomorphisme suit du fait que l'on a $\mathbb{H}^i(k(X)/X, \Gamma(2)) = 0$ pour $i \leq 2$.

Pour tout entier $n \geq 1$, on a un triangle exact

$$\Gamma(2) \xrightarrow{\times n} \Gamma(2) \to \mu_n^{\otimes 2} \to \Gamma(2)[1] \tag{A.24}$$

dans la catégorie dérivée bornée de $X_{\text{ét}}$. Ce triangle apparaît dans [Kah96, (12)]. Il a été construit dans [Lic87, Corollary 8.4] sous l'hypothèse n impair. Cette restriction sur n était utilisée dans le calcul de la torsion et de la cotorsion dans $K_{3,\mathrm{ind}}$ de [Lic87, Lemma 8.2]. Comme remarqué par Kahn [Kah96, après (12)], la construction de Lichtenbaum de (A.24) s'étend à tout $n \geq 1$ si on remplace [Lic87, Lemma 8.2] par le théorème principal de [Kah92].

D'après [Lic90, Proposition 5.4], pour tout nombre premier ℓ on a un triangle commutatif

$$\begin{tikzcd} CH^2(X) \arrow[r, "\mathrm{cl}_\Gamma"] \arrow[dr, "\mathrm{cl}_n"'] & \mathbb{H}^4(X, \Gamma(2)) \arrow[d] \\ & H^4(X, \mu_{\ell^n}^{\otimes 2}), \end{tikzcd} \tag{A.25}$$

la flèche verticale étant induite par (A.24).

Notons comme ci-dessus $CH^2(X)_0 := \mathrm{Ker}[CH^2(X) \to CH^2(X^s)]$. Les diagrammes (A.22) et (A.23) donnent une application

$$\Phi' \colon CH^2(X)_0 \to H^1(k, \mathbb{H}^3(X^s, \Gamma(2))).$$

La proposition A.4 a des conséquences intéressantes pour Φ'. Ces conséquences ne seront pas utilisées dans la preuve du théorème A.1. Supposons que X satisfait (H4) et soit S le k-tore de groupe des cocaractères $\mathrm{Pic}(X^s)$. On dispose alors de l'application $\Phi \colon CH^2(X)_0 \to H^1(k, S)$.

Proposition A.6. *Supposons que X satisfait (H4) et soit S le k-tore de groupe des cocaractères* $\mathrm{Pic}(X^s)$*.*

(a) On a un isomorphisme $\mathrm{Im}(\Phi') \simeq \mathrm{Im}(\Phi)$*.*

(b) Supposons que le corps k est de type fini sur $\mathbb{Q}$ et que X est une surface rationnelle. Alors $\mathrm{Im}(\Phi')$ *est finie.*

Démonstration. (a) Par définition, l'application Φ' est la composée

$$CH^2(X)_0 \xrightarrow{\simeq} H^1(k, \mathbb{H}^3(k_s(X)/X^s, \Gamma(2))) \xrightarrow{\rho} H^1(k, \mathbb{H}^3(X^s, \Gamma(2))),$$

la flèche ρ étant induite par la suite (A.11), donc $\mathrm{Im}(\Phi') = \mathrm{Im}(\rho)$. Par la proposition A.4 on sait que

$$\mathrm{Im}(\rho) \simeq \mathrm{Im}[H^1(k, Z) \to H^1(k, H^1(X^s, \mathcal{K}_2))],$$

la flèche de droite étant induite par (A.14). Par le lemme A.5, on a

$$\mathrm{Im}[H^1(k, Z) \to H^1(k, H^1(X^s, \mathcal{K}_2))] \simeq \mathrm{Im}(\Phi).$$

On conclut que $\mathrm{Im}(\Phi') \simeq \mathrm{Im}(\Phi)$.

(b) Sous les hypothèses faites, [CTS81, Theorem 3(iv)] assure la finitude de $\mathrm{Im}(\Phi)$. Toute surface rationnelle satisfait (H4). La conclusion suit alors de la partie (a). □

A.4. **Démonstration du théorème A.1.**

Démonstration. Par [Kah96, Theorem 1.1(iii)], on a un isomorphisme

$$H^0(X^s, \mathcal{K}_2) \xrightarrow{\simeq} \mathbb{H}^2(X^s, \Gamma(2)).$$

D'après le théorème 4.1(a), l'hypothèse (H4) donne que ce groupe est uniquement divisible. Ainsi l'homomorphisme

$$\mathbb{H}^2(X^s, \Gamma(2)) \xrightarrow{\times \ell^n} \mathbb{H}^2(X^s, \Gamma(2))$$

est un isomorphisme. L'hypothèse (H4) entraîne aussi $H^3(X^s, \mu_{\ell^n}^{\otimes 2}) = 0$. On peut alors appliquer la remarque A.3 (conséquence de la proposition A.2) au triangle (A.24) avec $j = 4$. On obtient un carré commutatif au signe près

$$\begin{array}{ccc} F^1\mathbb{H}^4(X, \Gamma(2)) & \longrightarrow & H^1(k, \mathbb{H}^3(X^s, \Gamma(2))) \\ \downarrow & & \downarrow{\scriptstyle \delta_n} \\ F^2H^4(X, \mu_{\ell^n}^{\otimes 2}) & \longrightarrow & H^2(k, H^2(X^s, \mu_{\ell^n}^{\otimes 2})), \end{array} \tag{A.26}$$

où δ_n est un homomorphisme de bord associé à la suite de G-modules

$$0 \to H^2(X^s, \mu_{\ell^n}^{\otimes 2}) \to \mathbb{H}^3(X^s, \Gamma(2)) \xrightarrow{\times \ell^n} \mathbb{H}^3(X^s, \Gamma(2)) \to 0. \tag{A.27}$$

Pour tout entier $n \geq 1$, les diagrammes commutatifs (A.22), (A.23), (A.25) et (A.26) nous donnent le diagramme commutatif
(A.28)

$$\begin{tikzcd}
CH^2(X)_0 \arrow[r, "\simeq"] \arrow[dr, bend right, "\mathrm{cl}_\Gamma"] \arrow[ddr, bend right, "\mathrm{cl}_n"'] & F^1\mathbb{H}^4(k(X)/X, \Gamma(2)) \arrow[r, "\simeq"] \arrow[d, hook] & H^1(k, \mathbb{H}^3(k_s(X)/X^s, \Gamma(2)) \arrow[d, "f"] \\
& F^1\mathbb{H}^4(X, \Gamma(2)) \arrow[r] \arrow[d] & H^1(k, \mathbb{H}^3(X^s, \Gamma(2))) \arrow[d, "\delta_n"] \\
& F^2H^4(X, \mu_{\ell^n}^{\otimes 2}) \arrow[r] & H^2(k, H^2(X^s, \mu_{\ell^n}^{\otimes 2})),
\end{tikzcd}$$

où le carré du bas commute au signe près. Notons

$$\beta \colon CH^2(X)_0 \xrightarrow{\simeq} H^1(k, \mathbb{H}^3(k_s(X)/X^s, \Gamma(2))$$

le composé des deux isomorphismes du haut dans (A.28). D'après [Kah96, Theorem 1.1(iv)] on a un isomorphisme de G-modules

$$H^1(X^s, \mathcal{K}_2) \xrightarrow{\simeq} \mathbb{H}^3(X^s, \Gamma(2)).$$

Sous l'hypothèse (H4), l'application naturelle $\mathrm{Pic}(X^s) \otimes k_s^* \to H^1(X^s, \mathcal{K}_2)$ a noyau et conoyau uniquement divisibles (Théorème 4.1(b)). On obtient un diagramme commutatif de suites exactes courtes de G-modules
(A.29)

$$\begin{tikzcd}
0 \arrow[r] & \mathrm{Pic}(X^s) \otimes \mu_{\ell^n} \arrow[r] \arrow[d] & \mathrm{Pic}(X^s) \otimes k_s^* \arrow[r, "\times \ell^n"] \arrow[d] & \mathrm{Pic}(X^s) \otimes k_s^* \arrow[r] \arrow[d] & 0 \\
0 \arrow[r] & H^2(X^s, \mu_{\ell^n}^{\otimes 2}) \arrow[r] & \mathbb{H}^3(X^s, \Gamma(2)) \arrow[r, "\times \ell^n"] & \mathbb{H}^3(X^s, \Gamma(2)) \arrow[r] & 0.
\end{tikzcd}$$

Ici, la flèche verticale de gauche est induite par la commutativité du carré de droite. Comme les deux flèches verticales de gauche sont à noyau et conoyau des $\mathbb{Q}$-vectoriels, et que les deux groupes de gauche sont annulés par ℓ^n, le lemme du serpent donne que la flèche verticale de gauche est un isomorphisme. On n'a pas besoin de savoir que cette flèche est induite par l'application cycle. Par la proposition 2.2, il existe un entier $N \geq 1$ tel que l'homomorphisme de bord

$$H^1(k, \mathrm{Pic}(X^s) \otimes k_s^*)\{\ell\} \to H^2(k, \mathrm{Pic}(X^s) \otimes \mu_{\ell^n})$$

est injectif pour tout entier $n \geq N$. La commutativité de (A.29) entraîne alors que δ_n est injectif sur la torsion ℓ-primaire pour tout entier $n \geq N$. Donc

$$\text{(A.30)} \quad \mathrm{Ker}(\Theta_n)\{\ell\} = \mathrm{Ker}(\beta \circ \delta_n \circ f) = \beta^{-1}(\mathrm{Ker}(\delta_n \circ f)\{\ell\}) = \beta^{-1}(\mathrm{Ker}(f)\{\ell\})$$

pour tout $n \geq N$.

On déduit de la proposition 3.3(a) que

$$\mathrm{Ker}(\Theta)\{\ell\} = \bigcap_{n \geq N} \mathrm{Ker}(\Theta_n)\{\ell\},$$

donc

$$\text{(A.31)} \qquad \mathrm{Ker}(\Theta)\{\ell\} = \beta^{-1}(\mathrm{Ker}(f)\{\ell\}) \simeq \mathrm{Ker}(f)\{\ell\}.$$

Sous l'hypothèse (H4), on a

$$\begin{aligned} \text{(A.32)} \qquad \operatorname{Ker}(f)\{\ell\} &\simeq \operatorname{Ker}[H^1(k,Z) \to H^1(k, H^1(X^s, \mathcal{K}_2))]\{\ell\} \\ &\simeq \operatorname{Ker}[CH^2(X)_0 \xrightarrow{\Phi} H^1(k,S)]\{\ell\}. \end{aligned}$$

Ici le premier isomorphisme provient de la proposition A.4 et le deuxième du lemme A.5. En combinant (A.31) et (A.32), on conclut que $\operatorname{Ker}(f)\{\ell\} \simeq \operatorname{Ker}(\Phi)\{\ell\}$, comme voulu. □

Remarque A.7. Pour montrer que $\operatorname{Ker}(\Theta)\{\ell\} = \operatorname{Ker}(\Phi)\{\ell\}$ en tant que sous-groupes de $CH^2(X)_0$, il suffirait de montrer la commutativité du carré suivant :

$$\begin{tikzcd} CH^2(X)_0 \arrow[r, "\simeq"] \arrow[d, "\wr"] & H^1(k,Z) \arrow[d, "\wr"] \\ F^1\mathbb{H}^4(k(X)/X, \Gamma(2)) \arrow[r, "\simeq"] & H^1(k, \mathbb{H}^3(k_s(X)/X^s, \Gamma(2))). \end{tikzcd}$$

Ici l'application du haut vient de [CTR85, Proposition 3.6], celle du bas du carré commutatif (A.23), celle de gauche du carré commutatif (A.22) et celle de droite de la proposition A.4.

Remerciements

Le deuxième auteur remercie Fumiaki Suzuki et Burt Totaro pour plusieurs conversations utiles sur le sujet de cet article.

Références

[AS22] Th. Alexandrou et S. Schreieder, On Bloch's map for torsion cycles over non-closed fields. *arXiv:2210.03201*. 2022. 1, 2, 3

[Ara75] J. K. Arason, Cohomologische Invarianten quadratischer Formen, *J. Algebra* **36** (1975), no. 3, 448–491. 12

[Blo79] S. Bloch, Torsion algebraic cycles and a theorem of Roitman. *Compositio Math.* **39** (1979), no. 1, 107–127. 2

[Blo81] S. Bloch, On the Chow groups of certain rational surfaces, *Ann. Sci. École Norm. Sup.* (4) **14**(1981), no. 1, 41–59. 13

[CT93] J.-L. Colliot-Thélène, Cycles algébriques de torsion et K-théorie algébrique, in *Arithmetic Algebraic Geometry*, Trento 1991, Springer LNM **1553**. 2, 9, 10

[CTR85] J.-L. Colliot-Thélène et W. Raskind, K_2-cohomology and the second Chow group, *Math. Ann.* **270** (1985) 165–199. 8, 21, 25

[CTS81] J.-L. Colliot-Thélène et J.-J. Sansuc, On the Chow groups of certain rational surfaces : a sequel to a paper of S. Bloch, *Duke Math. J.* **48** (1981), no. 2, 421–447. 13, 23

[CTS83] J.-L. Colliot-Thélène et J.-J. Sansuc, Quelques gammes sur les formes quadratiques, *Journal of Algebra* 84 (1983) 449–467. 13, 14

[CTSS83] J.-L. Colliot-Thélène, J.-J. Sansuc et C. Soulé, Torsion dans le groupe de Chow de codimension deux, *Duke Math. J.* **50**, no. 3 (1983) 763–801. 2

[Del77] P. Deligne, *Cohomologie étale.* Séminaire de géométrie algébrique du Bois-Marie SGA $4\frac{1}{2}$. Lecture Notes in Mathematics, 569. Springer-Verlag, Berlin, 1977. 7

[Jan88] U. Jannsen, Continuous étale cohomology, *Math. Ann.* **280** (1988) 207–245. 1, 7, 10

[Kah93] B. Kahn, Descente galoisienne et K_2 des corps de nombres, *K-Theory* **7** (1993), no. 1, 55–100. 8

[Kah96] B. Kahn, Applications of weight-two motivic cohomology. *Doc. Math.* **1** (1996), No. 17, 395–416. 19, 20, 22, 23, 24

[Kah92] B. Kahn, K_3 d'un schéma régulier. *C. R. Acad. Sci. Paris Sér. I Math.* **315** (1992), no. 4, 433–436. 22

[Kar91] N. A. Karpenko, Algebro-geometric invariants of quadratic forms. Traduction du russe de *Algebra i Analiz* **2** (1990), no. 1, 141–162 *Leningrad Math. J.* **2** (1991), no. 1, 119–138. 2, 12

[KM13] N. A. Karpenko et A. S. Merkurjev, On standard norm varieties. *Ann. Sci. Éc. Norm. Supér.* (4) **46** (2013), no. 1, 175–214. 2

[Lic87] S. Lichtenbaum, The construction of weight-two arithmetic cohomology, *Inventiones math.* **88** (1987), no. 1, 183–215. 18, 19, 22

[Lic90] S. Lichtenbaum, New results on weight-two motivic cohomology, in *The Grothendieck Festschrift*, Vol. III, 35–55, Progr. Math., **88**, Birkhäuser Boston, Boston, MA, 1990. 19, 20, 21, 22

[NSW08] J. Neukirch, A. Schmidt, K. Wingberg, *Cohomology of number fields.* Second edition. Grundlehren der mathematischen Wissenschaften [Fundamental Principles of Mathematical Sciences], **323**. *Springer-Verlag, Berlin*, 2008. xvi+825 pp. 5

[Noe70] M. Noether, Über Flächen, welche Scharen rationaler Kurven besitzen (Habilitations-Schrift), *Math. Ann.* **3** (1870), S. 161–227. 13

[Qui72] D. Quillen, Higher algebraic K-theory. I. *Algebraic K-theory, I : Higher K-theories (Proc. Conf., Battelle Memorial Inst., Seattle, Wash., 1972)*, pp. 85–147. Lecture Notes in Math., Vol. **341**, Springer, Berlin 1973. 19

[Sai91] S. Saito, Cycle map on torsion algebraic cycles of codimension two, *Inventiones math.* **106** (1991) 443–460. 10

[SS22] F. Scavia et F. Suzuki, Non-injectivity of the cycle class map in continuous ℓ-adic cohomology, *Forum of Mathematics, Sigma* (2023) **11** : e6 1–19. 1, 2, 3, 12, 14

[Wei94] C. Weibel, *An introduction to homological algebra.* Cambridge Studies in Advanced Mathematics, **38**. Cambridge University Press, Cambridge, 1994. 15

Université Paris-Saclay, CNRS, Laboratoire de mathématiques d'Orsay, 91405, Orsay, France.

Email address: jean-louis.colliot-thelene@universite-paris-saclay.fr

Department of Mathematics, University of California, Los Angeles, CA 90095-1555, USA

Email address: scavia@math.ucla.edu