Remarques sur l'approximation faible sur un corps de fonctions d'une variable

J.-L. Colliot-Thélène et P. Gille

26 mars 2003

Introduction

Soit C/k une courbe projective, lisse, connexe, définie sur un corps algébriquement clos k de caractéristique nulle. On note $F = k(C)$ le corps de fonctions de C et F_M le complété de F pour la valuation v_M définie par un point fermé M de C.

Soit X/F une variété lisse géométriquement connexe. L'ensemble des F_M-points $X(F_M)$ est muni d'une topologie naturelle ([Kn]). On dit que l'approximation faible vaut pour un ensemble fini S de points fermés de C si l'image diagonale de $X(F)$ dans $\prod_{M \in S} X(F_M)$ est dense pour la topologie produit. Si c'est le cas pour tout ensemble fini S de points fermés, on dit que l'approximation faible vaut pour la variété X/F.

Comme l'a rappelé B. Hassett dans son exposé à l'A.I.M. de Palo Alto en décembre 2002, on se demande si toute F-variété lisse et géométriquement rationnellement connexe satisfait à l'approximation faible. Le seul résultat général connu à ce jour est un théorème de Kollár, Miyaoka et Mori (voir [Ko] IV. 6.10), qui ne concerne qu'une version faible de l'approximation, et ce seulement pour les $M \in C$ où X/F a bonne réduction.

Dans cette note nous établissons cet énoncé pour les F-variétés géométriquement rationnellement connexes qui se ramènent par fibrations à des espaces homogènes de groupes linéaires connexes.

Nous montrons par ailleurs que sous la simple hypothèse d'annulation des $H^i(X, O_X)$ (pour $i \geq 1$) il peut y avoir défaut d'approximation faible. Notre exemple est une surface d'Enriques. L'outil utilisé est une loi de réciprocité et l'existence d'un revêtement non ramifié non trivial sur une telle surface.

On notera que des résultats particuliers sur l'approximation faible ont été obtenus sur des corps de fonctions plus compliqués que ceux considérés ici : corps de fonctions d'une variable sur le corps des réels ([CT], [Sch], [Du]), et corps de fonctions de deux variables sur un corps algébriquement clos ([CTGiPa]).

§1. Rappels et préliminaires

§1.a Approximation faible

Soient K un corps et Ω un ensemble de valuations de K, distinctes deux à deux, discrètes de rang un. Pour tout $v \in \Omega$ soit K_v le complété de K en v. L'approximation faible pour les K-variétés lisses géométriquement connexes se définit comme dans l'introduction. On note $\mathbf{A}^n_K$ l'espace affine de dimension n sur K.

Le fait suivant est bien connu :

Proposition 1.1. *Soient K et Ω comme ci-dessus. Soient X et Y deux K-variétés lisses géométriquement connexes. S'il existe $n, m \in \mathbf{N}$ tels que les K-variétés $X \times_F \mathbf{A}^n_K$ soient K-birationnellement équivalentes, alors l'approximation faible vaut pour X si et seulement si elle vaut pour Y. En particulier, l'approximation faible vaut pour X si et seulement si elle vaut pour un ouvert non vide de X.*

Proposition 1.2. *Soient K et Ω comme ci-dessus. Soit $f : X \to Y$ un K-morphisme lisse de K-variétés lisses géométriquement connexes, à fibre générique géométriquement connexe. Si* *pour tout point $M \in Y(K)$ l'approximation faible vaut pour la F-variété fibre $X_M = f^{-1}(M)$, et si l'approximation faible vaut pour Y, alors elle vaut pour X.*

Démonstration. Soit $S \subset \Omega$ un ensemble fini, et supposons donné pour chaque $v \in S$ un point $P_v \in X(K_v)$. Soit $Q_v = f(P_v)$. Par le théorème des fonctions implicites, il existe un voisinage ouvert $\omega_v \subset Y(K_v)$ contenant Q_v, équipé d'une section analytique $\sigma_v : \omega_v \to X(K_v)$ de la projection $X(K_v) \to Y(K_v)$. L'approximation faible valant pour Y, on peut trouver un point F-rationnel $Q \in Y(K)$ tel que pour chaque $v \in S$ le point Q soit très proche de Q_v dans $Y(K_v)$ et qu'il appartienne à ω_v. Soit $Z = f^{-1}(Q)$ la fibre en Q. Alors $R_v = \sigma_v(Q) \in Z(K_v)$ est très proche de P_v dans $X(K_v)$. Par hypothèse, l'approximation faible vaut pour la F-variété Z. Ainsi il existe un point $P \in Z(K) \subset X(K)$ très proche de R_v dans $Z(K_v)$ et donc dans $X(K_v)$ pour chaque $v \in S$. Un tel point est très proche de chaque P_v pour $v \in S$.

Remarque. On ne peut espérer appliquer cette proposition générale que lorsque l'on a déjà la propriété : toute fibre non vide de f au-dessus d'un point K-rationnel de Y possède un point K-rationnel. Sur un corps $K = k(C)$ du type considéré dans l'introduction, d'après Graber, Harris et Starr [GHS] et d'après de Jong et Starr [dJS], c'est le cas si la fibre générique de f est birationnelle à une variété projective, lisse, géométriquement connexe et rationnellement connexe. Dans ce cas, pour les variétés qui se dévissent en variétés rationnellement connexes pour lesquelles l'approximation faible a déjà été établie, on obtient l'approximation faible.

§1.b Cohomologie galoisienne des corps C_1

Le théorème suivant regroupe des résultats de Springer (cas des corps C_1, qui nous suffirait ici, les corps $F = k(C)$ et $F_M \simeq k((t))$ étant des corps C_1) et de Steinberg (cas général).

Théorème 1.3. *Soit K un corps de caractéristique zéro et de dimension cohomologique 1.*
a) Tout K-groupe réductif connexe est quasi-déployé.
b) Tout espace homogène sous un K-groupe linéaire connexe poosède un point rationnel.
c) Soient G un K-groupe linéaire connexe et $H \subset G$ un sous-groupe fermé. La projection $G(K)$-équivariante $G(K) \to (G/H)(K)$, où les deux ensembles sont pointés par l'élément neutre de G et par son image, se prolonge en une suite exacte d'ensembles pointés

$$G(K) \to (G/H)(K) \to H^1(K, H) \to 1.$$

d) Soit H un K-groupe linéaire, et soit $H^0 \subset H$ sa composante connexe, sous-groupe normal de H. L'homomorphisme quotient $H \to H/H^0$ induit une bijection $H^1(K, H) \to H^1(K, H/H^0)$.

Démonstration.
a) Voir [SeCG] III.2.3 Thm 1' p. 139.
b) Voir [SeCG] III.2.4 Cor. 1 p. 141. L'énoncé b) peut se reformuler ainsi : pour tout F-espace homogène X sous un K-groupe linéaire connexe, il existe un K-morphisme G-équivariant de G (vu comme espace principal homogène à gauche sous G) vers X.
c) Combiner $H^1(K, G) = 0$ (qui est une reformulation de b) dans le cas des espaces principaux homogènes) et [SeCG] I.5.4 Prop. 36 p. 47.
d) Voir [SeCG] III.2.4 Cor. 3 p. 142.

§2. Approximation faible pour les espaces homogènes de groupes linéaires connexes et pour les variétés qui s'y ramènent

Le théorème suivant devrait être considéré comme bien connu.

Théorème 2.1 *Soit $F = k(C)$ un corps de fonctions d'une variable sur un corps algébriquement clos de caractéristique zéro et soit G un F-groupe linéaire connexe. Alors G satisfait à l'approximation faible.*

Démonstration. Le groupe G/F est le produit semi-direct de son quotient réductif G_{red} par son radical unipotent R_uG qui est F-isomorphe (en tant que variété) à un espace affine. Par la proposition 1.1, on est ramené au cas où G est un groupe réductif connexe. Comme le corps F est C_1, le groupe réductif G est quasi-déployé. Soit B un sous-groupe de Borel de G_{red} et soit T un F-tore maximal de B. La F-variété sous-jacente au radical unipotent R_uB est un espace affine, il en est de même du radical unipotent R_uB^- du sous-groupe de Borel B^- opposé à B, et le groupe G contient un ouvert, "la grosse cellule", isomorphe au produit $(R_uB) \times_F T \times_F (R_uB)^-$ ([SGA3], exp. XXII, proposition 4.1.2 page 172). Par la Proposition 1.1, on est ramené à établir l'approximation faible pour un F-tore T.

Par considération du groupe des caractères de T, on voit aisément que pout tout F-tore (ici F pourrait être un corps quelconque), il existe une suite exacte de F-tores

$$1 \to R \to E \to T \to 1$$

où E est un F-tore quasi-trivial, i.e. un produit $\prod_i R_{F_i/F}\mathbf{G}_m$ de restrictions à la Weil du groupe multiplicatif $\mathbf{G}_m$ pour diverses extensions de corps F_i/F, et où R est un F-tore. Le tore quasi-trivial E est un ouvert d'un espace affine sur F, il satisfait donc à l'approximation faible. Soit S un ensemble fini de points fermés de la courbe C. Comme les complétés $F_M, M \in S$, du corps $F = k(C)$ sont des corps C_1, les groupes $H^1(F_M, R)$ sont nuls. Ainsi l'application continue $\prod_{M\in S} E(K_M) \to \prod_{M\in S} T(K_M)$ est surjective. Comme $E(K)$ est dense dans $\prod_{M\in S} E(K_M)$, il s'en suit immédiatement que $T(K)$ est dense dans $\prod_{M\in S} T(K_M)$.

Théorème 2.2. *Soit $F = k(C)$ un corps de fonctions d'une variable sur un corps algébriquement clos de caractéristique zéro et soit G un F-groupe linéaire. Pour tout ensemble fini S de points fermés de C, l'application diagonale $H^1(F, G) \to \prod_{M\in S} H^1(F_M, G)$, où le second produit est un ensemble fini, est surjective.*

Démonstration. D'après le Théorème 1.3.d, il suffit d'établir le théorème lorsque G est un F-schéma en groupes finis.

Soient F_s une clôture séparable de F et $\mathcal{G} = \mathrm{Gal}(F_s/F)$. Soit M un point fermé de C. Soit $F_{M,s}$ une clôture séparable de $F_M \simeq k((t))$ et $F_s \subset F_{M,s}$ un plongement. Le groupe de Galois absolu $I_M = \mathrm{Gal}(F_{M,s}/F_M)$ est isomorphe à $\hat{\mathbf{Z}}$, le complété profini de $\mathbf{Z}$. On fixe un tel isomorphisme, i.e. on fixe un générateur profini $c_M \in I_M$. Fixons aussi, pour chaque $M \in C$, un plongement $F_s \subset F_{M,s}$. Ceci détermine un plongement $I_M \subset \mathcal{G}$.

On note $A = G(F_s) = G(F_{M,s})$. C'est un groupe fini muni d'une action de $\mathcal{G}$ et donc de I_M pour tout $M \in C$.

Quitte à agrandir S, on peut supposer que le F-schéma en groupe G provient d'un U-schéma en groupes fini étale sur U, où U désigne le complémentaire de S dans C. En d'autres termes, on peut supposer que pour tout $M \notin S$, l'action de I_M sur A est triviale.

Soit H un sous-groupe fermé de $\mathcal{G}$. L'ensemble de cohomologie $H^1(H, A)$ est un quotient de l'ensemble $Z^1(H, A)$ des 1-cocycles continus de H à valeurs dans le groupe fini A. Cet ensemble s'identifie à l'ensemble des homomorphismes continus de H dans le produit semi-direct $A.H$ qui sont des sections de la projection structurale $A.H \to H$ ([SeCG], chap. I, 5.1, Exercice 1 p. 43). Si $z_h \in A, h \in H$ est le 1-cocycle, la section est donnée par $h \mapsto z_h.h$.

Si l'on se donne un système de générateurs topologiques de H, il existe au plus un 1-cocycle dans $Z^1(H, A)$ prenant des valeurs données sur ces générateurs.

En particulier, pour tout M, l'ensemble $Z^1(I_M, A)$ est fini (A étant fini). *A fortiori* $H^1(F_M, G) = H^1(I_M, A)$ est fini.

Soit $S \subset C$ un ensemble fini de points fermés de C. Pour établir le théorème, nous allons établir l'énoncé a priori plus fort que que l'application naturelle de 1-cocycles continus

$$Z^1(\mathcal{G}, A) \to \prod_{M \in S} Z^1(I_M, A)$$

est surjective. Soit g le genre de la courbe C. Notons $S = \{M_1, \cdots, M_s\}$. Choisissons un point fermé $M_{s+1} \in C \setminus S$. Notons $\mathcal{H} = \mathrm{Gal}(L/F)$ le groupe de Galois de la sous-extension maximale L/F de F_s/F non ramifiée en dehors de $S \cup M_{s+1}$. C'est un quotient de $\mathcal{G}$, et l'on a des inclusions induites $I_{M_j} \subset \mathcal{H}$ pour $j = 1, \cdots, s+1$. Rappelons que pour chaque j, on a choisi un générateur topologique c_j du groupe d'inertie $I_j = I_{M_j} \simeq \hat{Z}$. L'hypothèse initiale faite sur S garantit que l'inclusion naturelle $G(L) \subset G(F_s) = A$ est une égalité. On dispose alors d'une application $Z^1(\mathcal{H}, A) \to Z^1\mathcal{G}, A)$, et pour établir l'énoncé il suffit de montrer que l'application diagonale

$$Z^1(\mathcal{H}, A) \to \prod_{M \in S} Z^1(I_M, A)$$

est surjective.

D'après le théorème d'existence de Riemann ([SeRC], §1.2) le groupe $\mathcal{H}$ est le groupe profini engendré par les générateurs

$$a_1, b_1, \cdots, a_g, b_g, c_1, \cdots, c_s, c_{s+1}$$

avec l'unique relation

$$[a_1, b_1] \cdots [a_g, b_g] \; c_1 c_2 \cdots c_s c_{s+1} = 1,$$

où pour tout $j = 1, \cdots, s$, l'élément c_j est comme ci-dessus.

Un élément du produit $\prod_{M \in S} Z^1(I_M, A)$ détermine une famille $z_j = z_{M_j} \in A$, où z_j est la valeur du 1-cocycle sur le générateur $c_{M_j} = c_j$. Pour tout $j = 1, \cdots, s$, on dispose donc de l'homomorphisme $I_{M_j} \to A.I_j$ envoyant c_j sur $z_j.c_j$. Cet homomorphisme s'étend naturellement en un homomorphisme $\rho_j : I_{M_j} \to A.\mathcal{H}$. Pour définir un homomorphisme continu $\rho : \mathcal{H} \to A.\mathcal{H}$, il suffit de le définir sur les générateurs de $\mathcal{H}$, et d'assurer que la relation ci-dessus est respectée. Définissons $\rho(a_i) = 1.a_i$ et $\rho(b_i) = 1.b_i$ pour tout $i = 1, \cdots, g$, puis $\rho(c_j) = z_j.c_j$ pour $j = 1, \cdots, s$. Pour que la relation soit respectée, il suffit de choisir $\rho(c_{s+1}) \in A.\mathcal{H}$ tel que

$$[a_1, b_1] \cdots [a_g, b_g] z_1.c_1 \ldots z_s.c_s.\rho(c_{s+1}) = 1,$$

(par abus de langage, on note ici $a_i.1 = a_i$ et $b_i.1 = b_i$), ce qui compte tenu de la relation initiale dans $\mathcal{H}$ se traduit encore par

$$c_{s+1}^{-1}.c_s^{-1}. \cdots .c_1^{-1}.z_1.c_1 \ldots z_s.c_s.\rho(c_{s+1}) = 1.$$

Soit $u \in A.\mathcal{H}$ tel que $\rho(c_{s+1}) = u.c_{s+1}$. Un calcul immédiat (moins magique qu'il n'y paraît) montre que u appartient à $A \subset A.\mathcal{H}$, on notera donc $u = z_{s+1}$.

On dispose donc d'un homomorphisme continu envoyant $\mathcal{H}$ dans $A.\mathcal{H}$, envoyant a_i sur $1.a_i$ et b_i sur $1.b_i$ pour $i = 1, \cdots, g$, et par ailleurs c_j sur $z_j.c_j$ pour $j = 1, \cdots, s+1$. Cet homomorphisme définit une section de la projection $A.\mathcal{H} \to \mathcal{H}$, comme on le voit sur les générateurs. Enfin sa restriction à chaque sous-groupe I_j pour $j = 1, \cdots, s$ a son image dans $A.I_j$ et coïncide avec l'homomorphisme initial $I_j \to A.I_j$.

Théorème 2.3. *Soit $F = k(C)$ un corps de fonctions d'une variable sur un corps algébriquement clos de caractéristique zéro, et soit G un F-groupe linéaire connexe. L'approximation faible vaut pour tout espace homogène sous G.*

Démonstration. Soit X/F un tel espace homogène. D'après le théorème 1.3.b, on peut écrire $X = G/H$, où $H \subset G$ est un F-sous-groupe fermé de G. D'après le théorème 1.3.c, et le fait que tant le corps F que les corps F_M sont des corps C_1, on a un diagramme commutatif de suites exactes d'ensembles pointés

$$\begin{array}{ccccccc} G(F) & \to & (G/H)(F) & \stackrel{\phi}{\to} & H^1(F,H) & \to & 1 \\ \downarrow & & \downarrow & & \downarrow & & \\ \prod_{M\in S} G(F_M) & \to & \prod_{M\in S}(G/H)(F_M) & \stackrel{\phi_M}{\to} & \prod_{M\in S} H^1(F_M,H) & \to & 1. \end{array}$$

D'après le théorème 2.2, la flèche verticale de droite est surjective. Pour chaque $M \in S$, soit $x_M \in (G/H)(K_M)$. D'après le diagramme ci-dessus et ses propriétés, il existe $x \in (G/H)(F)$ qui a même image que la famille $\{P_M\}$ dans $\prod_{M\in S} H^1(F_M,H)$. Il existe alors pour chaque $M \in S$ un élément $g_M \in G(F_M)$ tel que $x_M = g_M.x$. Comme l'approximation faible vaut pour G (Théorème 2.1), on peut trouver $g \in G(F)$ arbitrairement proche de chaque $g_M \in G(F_M)$, et alors $g.X \in (G/H)(F)$ est arbitrairement proche de chaque $x_M \in (G/H)(F_M)$ (chaque application $G(F_M) \to (G/H)(F_M)$ étant continue).

Théorème 2.4. *Soit $F = k(C)$ le corps des fonctions d'une courbe projective lisse C sur un corps k algébriquement clos de caractéristique zéro. Soit $f : X \to Y$ un F-morphisme dominant de F-variétés géométriquement intègres, dont la fibre générique est géométriquement connexe et $F(Y)$-birationnelle à un espace homogène d'un groupe linéaire connexe G sur le corps des fonctions $F(Y)$ de Y. Si Y satisfait à l'approximation faible, alors X satisfait à l'approximation faible.*

Démonstration. Pour établir le théorème, on peut d'après la proposition 1.1 restreindre Y à un ouvert et X à l'image réciproque de cet ouvert. On peut donc supposer que le $F(Y)$-groupe linéaire connexe est la restriction d'un Y-groupe linéaire fidèlement plat sur Y, à fibres connexes, soit G/Y, et que pour tout point $P \in Y(F)$ la fibre $f^{-1}(P)$ est lisse, géométriquement et F-birationnelle à un F-espace homogène sous le F-groupe linéaire connexe fibre G_P. D'après le théorème 2.3 et la proposition 1.1, toute telle fibre satisfait à l'approximation faible. Il résulte alors des hypothèses et de la proposition 1.2 que X satisfait à l'approximation faible.

Les exemples non triviaux abondent (par exemple non trivial, on entend des exemples de F-variétés qui ne sont pas nécessairement F-birationnelles à un espace projectif). Les plus évidents sont les surfaces fibrées en coniques (de dimension au moins un) au-dessus de la droite projective $\mathbf{P}^1_F$, et plus généralement les fibrés en quadriques, resp. en variétés de Severi-Brauer au-dessus d'un espace projectif de dimension arbitraite. Dans les cas cités, la démonstration de l'approximation faible se fait bien sûr à moindres frais : outre l'élémentaire proposition 1.2, on utilise le fait que toute F-quadrique de dimension au moins 1 possède un F-point (cas particulier du théorème de Tsen remontant à Max Noether) et est donc F-birationnelle à un espace projectif sur F, resp. le fait que toute variété de Severi-Brauer sur F est F-isomorphe à un espace projectif sur F (théorème de Tsen et théorie élémentaire des variétés de Severi-Brauer, due à F. Châtelet).

Dégageons le :

Corollaire 2.5. *Soit $F = k(C)$ comme ci-dessus et soit X/F une surface de Del Pezzo degré 4, c'est-à-dire une intersection complète lisse de deux quadriques dans $\mathbf{P}^4_F$. L'approximation faible vaut pour X.*

Démonstration. Comme F est un corps C_1, on a $X(F) \neq \emptyset$. Comme F est infini, il existe donc un point F-rationnel R non situé sur l'une quelconque des 16 droites (sur une clôture algébrique de F) contenues dans X ([Ma], Chap. IV, §30, Theorem 30.1 p. 162). En éclatant R, on obtient une surface cubique lisse $Y \subset \mathbf{P}^3_F$ qui contient une droite définie sur F (la courbe exceptionnelle image inverse de R). Le pinceau des 2-plans de $\mathbf{P}^3_F$ passant par cette droite définit sur Y une structure de surface fibrée en coniques au-dessus de $\mathbf{P}^1_F$, et l'on a vu ci-dessus que l'approximation faible vaut pour une telle surface. Par la proposition 1.1, l'approximation faible vaut donc aussi pour X.

Remarque. En utilisant la proposition 1.2, on déduit de ce résultat l'approximation faible pour toute F-variété X intersection complète lisse de deux quadriques dans $\mathbf{P}^n_F$, $n \geq 4$. Pour $n \geq 5$, on peut aussi déduire l'approximation faible de [CTSSD], Theorem 3.27 p. 80. Pour $n \geq 6$, la situation est encore plus simple : dans ce cas, toute telle variété X est F-birationnelle à un espace projectif ([CTSSD], Theorem 3.2 p. 60; Theorem 3.4 p. 62).

Toute F-surface projective, lisse, géométriquement rationnellement connexe est F-birationnelle soit à une surface fibrée en coniques au-dessus de $\mathbf{P}^1_F$, soit à une surface de Del Pezzo de degré d, avec $1 \leq d \leq 9$. Toute F-surface de Del Pezzo de degré $d \geq 5$ est F-birationnelle à $\mathbf{P}^2_F$, donc satisfait à l'approximation faible. Nous venons de voir que cette dernière propriété vaut pour $d = 4$.

La question de savoir si l'approximation faible vaut reste ouverte pour les F-surfaces de Del Pezzo de degré 3 (surfaces cubiques lisses), et *a fortiori* pour les F-surfaces de Del Pezzo de degré 2 et 1.

§3. Une surface d'Enriques qui ne satisfait pas à l'approximation faible

Soit $F = k(C)$ comme dans l'introduction. Nous commençons par décrire un mécanisme familier dans un cadre plus délicat, à savoir celui des corps de nombres.

La somme des degrés des diviseurs d'une fonction est nulle. Le complexe ainsi obtenu

$$F^* \to \oplus_{M \in C} \mathbf{Z} \to \mathbf{Z},$$

où la dernière flèche est la somme, induit pour tout entier $n > 0$ un complexe

$$F^*/F^{*n} \to \oplus_{M \in C} \mathbf{Z}/n \to \mathbf{Z}/n.$$

Pour tout $M \in C$, la flèche $F^*/F^{*n} \to \mathbf{Z}/n$ induite par l'application diviseur en M s'identifie à la flèche naturelle $F^*/F^{*n} \to F^*_M/F^{*n}_M$.

Soit X une F-variété projective, lisse, géométriquement connexe. Soit $F(X)$ son corps des fonctions et $f \in F(X)^*$ une fonction dont le diviseur est une puissance n-ième dans le groupe des diviseurs de X. Soit $U \subset X$ un ouvert non vide sur lequel f est inversible. L'équation $f = t^n$ définit sur l'ouvert U un μ_n-torseur qui, grâce à l'hypothèse sur le diviseur, s'étend en un μ_n-torseur $Y \to X$.

Pour tout corps L contenant F, à ce μ_n-torseur est associé une application d'évaluation $\varphi_L : X(L) \to H^1(L, \mu_n) = L^*/L^{*n}$ qui sur $U(L)$ n'est autre que l'application associant à $P \in U(L)$ la classe de $f(P)$ dans L^*/L^{*n}. Pour $M \in C$ point fermé et $L = F_M$, l'application $\varphi_{F_M} : X(F_M) \to F^*_M/F^{*n}_M = \mathbf{Z}/n$ est continue, i.e. localement constante. Par ailleurs, la propreté de X/F et un argument de bonne réduction montre que pour presque tout $M \in C$ (i.e. tout M sauf un nombre fini), l'application $\varphi_{F_M} : X(F_M) \to F^*_M/F^{*n}_M = \mathbf{Z}/n$ se factorise par $O_M^*/(O_M^*)^n = 1$, donc a une image nulle dans $\mathbf{Z}/n$. Ici O_M désigne le complété de l'anneau local de C en M, qui est isomorphe à $k[[t]]$. Soit $S \subset C$ l'ensemble fini des points où φ_{F_M} n'est pas constante.

Le torseur $Y \to X$ définit donc une application $X(F) \to \oplus_{M\in S}\mathbf{Z}/n$ qui composée avec la somme $\oplus_{M\in S}\mathbf{Z}/n \to \mathbf{Z}/n$ donne zéro.

Nous pouvons alors conclure :

Proposition 3.1. *Dans la situation ci-dessus, soit pour chaque $M \in S$, un point $P_M \in X(F_M)$. Si $\sum_{M\in S}\varphi_M(P_M) \neq 0 \in \mathbf{Z}/n$, alors la famille $\{P_M\} \in \prod X(F_M)$ n'est pas dans l'adhérence de l'image de $X(F)$ dans le produit topologique $\prod_{M\in S} X(F_M)$.*

Remarque. L'idée de cette proposition n'est pas nouvelle, on a déjà utilisé des lois de réciprocités variées pour définir une obstruction à l'approximation faible dans divers contexte. L'obstruction la plus connue est l'obstruction de Brauer-Manin sur un corps de nombres, qui fait intervenir le groupe $H^2(.,\mu_n)$. Toujours sur un corps de nombres, on peut aussi utiliser $H^1(.,\mu_n)$ (voir [Ha]). Sur un corps de fonctions d'une variable sur les réels, voir [CT] et [Du].

Soit $\mathbf{A}^1_F = \mathrm{Spec}F[t]$ la droite affine, et soit $\mathbf{A}^1_F \subset C = \mathbf{P}^1_k$ le plongement naturel. Notons $F = k(\mathbf{P}^1) = k(t)$ le corps des fonctions de $\mathbf{P}^1_F$.

Soient $a, b, c, d, e \in \mathbf{C}$, soit $c(u) = t(u-a)(u-b)$, $d(u) = et(t-c)(t-d)$. Supposons que le polynôme $e.c(u).d(u).(c(u)-d(u)).u(u-1) \in \mathbf{C}[u]$ est séparable de degré 8. Soit $U \subset \mathbf{A}^4_K$, avec coordonnées affines x, y, z, u) la F-surface lisse définie dans $\mathbf{A}^4_F$ par le système d'équations

$$x^2 - t(u-a)(u-b) = u(u-1)y^2 \neq 0, \;\; x^2 - te(u-c)(u-d) = u(u-1)z^2 \neq 0. \quad (*)$$

Soit X/F un modèle projectif et lisse, F-minimal, de la surface U. Il existe un ouvert non vide $V \subset U$ qu'on peut identifier à un ouvert de X.

Proposition 3.2. *La F-surface X est une surface d'Enriques, elle satisfait en particulier $H^1(X, O_X) = 0$ et $H^2(X, O_X) = 0$. La fonction rationnelle définie par $f = u(u-1)$ sur U a son diviseur sur X qui est un double.*

Démonstration. Que le diviseur de f sur tout modèle lisse soit un double est facile à établir par des calculs valuatifs (voir [CTSkSD]). Pour le détail de la démonstration du fait que X est une surface d'Enriques, affirmé dans [CTSkSD], voir [La].

D'après ce qui a été rappelé ci-dessus, il existe un $\mathbf{Z}/2$-torseur Y au-dessus de X dont la restriction à V est obtenue en extrayant la racine carrée de la fonction f (l'espace total du torseur est une surface $K3$). Pour tout corps L contenant F, on a une application induite $\varphi_L : X(L) \to L^*/L^{*2}$, qui sur $V(L)$ n'est autre que l'application envoyant $P \in V(L)$ sur la classe de $f(P)$ dans L^*/L^{*2}.

Proposition 3.3. *Avec les notations ci-dessus, pour $M \neq 0, \infty \in \mathbf{P}^1$, l'image de l'application $\varphi_M : X(F_M) \to F_M^*/F_M^{*2} = \mathbf{Z}/2$ est nulle. Par ailleurs pour $M = 0$ et pour $M = \infty$, l'image de φ_M est tout le groupe $\mathbf{Z}/2$.*

Démonstration. Par continuité et par le théorème des fonctions implicites, qui garantit que $V(F_M)$ est dense dans $X(F_M)$, il suffit d'établir ces faits pour les applications $U(F_M) \to F_M^*/F_M^{*2} = \mathbf{Z}/2$ définie par la fonction f.

Soient $M \in \mathbf{P}^1$, soit $v = v_M$ la valuation associée sur F. Soit (x, y, z, u) un point de $U(F_M)$. Supposons $v(u) < 0$. Des équations (*) il résulte que $v(u(u-1)) = 2v(u)$ est pair. Supposons alors $v(u.(u-1)) > 0$, et $v(u(u-1)) \geq 0$ impair. Supposons d'abord $v(t) = 0$. Alors nécessairement $v(x^2) = v(t(u-a)(u-b) = 0$ (tous deux sont pairs), et $v(x^2 - t(u-a)(u-b)) > 0$. De même $v(x^2 - et(u-c)(u-d)) > 0$. On a alors $v(c(u) - d(u)) > 0$, ce qui est impossible. L'énoncé pour tout $v = v_M$ avec $M \neq 0, \infty$ est donc établi.

Soit $v = v_M$ avec $M = 0 \in \mathbf{A}^1_F$, et donc $v(t) = 1$. Il existe un point $(x, y, z, u) = (1/t, y, z, 1/t) \in U(F_M)$ avec $v(y) = 0$, $v(z) = 0$, et donc $v(u.(u-1))$ pair. Par ailleurs il existe un point $(x, y, z, u) = (0, y, z, t)$ avec $v(y) = 0$, $v(z) = 0$. Pour un tel point, on a $v(u.(u-1)) = 1$ impair.

Soit $v = v_M$ avec $M = \infty \in \mathbf{P}^1_F$, et donc $v(t) = -1$. Il existe des points avec $v(x) < 0$, $v((u.(u-1)) = 0$, $v(x) = v(y) = v(z) < 0$. Par ailleurs il existe des points avec $x = 0$, $u = 1/t$, $v(y) = v(z) = 1$ et donc $v(u.(u-1)) = 1$.

Théorème 3.4. *La surface d'Enriques X/F possède des points rationnels. L'image de l'application diagonale $X(F) \to X(F_0) \times X(F_\infty)$ n'est pas dense dans ce produit.*

Démonstration. Fixons $u = u_0 \in \mathbf{C}$ assez général. On obtient alors une F-courbe d'équations

$$x^2 - t(u_0 - a)(u_0 - b) = u_0(u_0 - 1)y^2 \neq 0, \;\; x^2 - et(u_0 - c)(u_0 - d) = u_0(u_0 - 1)z^2 \neq 0,$$

contenue dans U, et rencontrant V. Cette courbe admet une F-compactification lisse Γ donnée en coordonnée homogènes (X, Y, Z, T) par

$$X^2 - t(u_0 - a)(u_0 - b)T^2 = u_0(u_0 - 1)Y^2, \;\; X^2 - et(u_0 - c)(u_0 - d)T^2 = u_0(u_0 - 1)Z^2.$$

Sur cette courbe on trouve pour $T = 0$ des F-points lisses (à coordonnées dans $\mathbf{C}$). L'application rationnelle de la F-courbe lisse Γ vers la F-variété propre X est partout définie, on a donc $X(F) \neq \emptyset$.

Le reste de l'énoncé résulte de la combinaison des Propositions 3.1, 3.2 et 3.3.

Remarque. Les équations concrètes de surfaces d'Enriques utilisées ci-dessus furent introduites dans [CTSkSD]. Lafon [La] utilise des formes tordues des équations (*) pour exhiber des exemples de surfaces d'Enriques sur $F = \mathbf{C}(t)$ et même sur $F = \mathbf{C}((t))$ sans point rationnel. Nous ne doutons pas que l'on puisse utiliser de telles équations (tordues) pour exhiber des contre-exemples au principe de Hasse ($X(F_M) \neq \emptyset$ pour tout $M \in \mathbf{P}^1$, mais $X(F) = \emptyset$) reposant sur la loi de réciprocité sur F^*/F^{*2} utilisée plus haut, mais cela demandera sans doute un peu d'acharnement.

Références

[CT] J.-L. Colliot-Thélène, Groupes linéaires sur les corps de fonctions de courbes réelles. J. für die reine und angew. Mathematik **474** (1996) 139-167.

[CTGiPa] J.-L. Colliot-Thélène, P. Gille et R. Parimala, Arithmetic of linear algebraic groups over two-dimensional fields, preprint, to appear (cf. Arithmétique des groupes algébriques linéaires sur certains corps géométriques de dimension deux. C. R. Acad. Sci. Paris Sér. I Math. **333** (2001), no. 9, 827-832.)

[CTSkSD] J.-L. Colliot-Thélène, A. N. Skorobogatov et Sir Peter Swinnerton-Dyer, Double fibres and double covers : paucity of rational points, Acta Arithmetica **LXXIX.2** (1997) 113-135.

[CTSSD] J.-L. Colliot-Thélène, J.-J. Sansuc et Sir Peter Swinnerton-Dyer, Intersections of two quadrics and Châtelet surfaces, I, J. für die reine und angew. Math. **373** (1987) 37-107.

[dJSt] A. J. de Jong et J. Starr, Every rationally connected variety over the function field of a curve has a rational point, à paraître.

[Du] A. Ducros, L'obstruction de réciprocité à l'existence de points rationnels pour certaines variétés sur le corps des fonctions d'une courbe réelle. J. für die reine und angew. Math. **504** (1998), 73-114.

[GHS] T. Graber, J. Harris et J. Starr, Families of rationally connected varieties, J. Amer. Math. Soc., **16** (2003), 57-67.

[Ha] D. Harari, Weak approximation and non-abelian fundamental groups. Ann. Sci. École Norm. Sup. (4) **33** (2000), 467-484.

[Kn] M. Kneser, Schwache Approximation in algebraischen Gruppen, *Colloque de Bruxelles* (1962) 41-52.

[Ko] J. Kollár, *Rational Curves on Algebraic Varieties*, Ergebnisse der Mathematik und ihrer Grenzgebiete, 3. Folge, Bd. **32**, Springer (1996)

[La] G. Lafon, Une surface d'Enriques sans point sur $\mathbf{C}((t))$, note en préparation.

[Ma] Yu. I. Manin, *Cubic forms*, Algebra, Geometry, Arithmetic, North-Holland (1974; seconde édtion, révisée et complétée, 1986).

[Sch] C. Scheiderer, Hasse principles and approximation theorems for homogeneous spaces over fields of virtual cohomological dimension one. Invent. Math. **125** (1996), no. 2, 307-365.

[SeCG] J-P. Serre, *Cohomologie Galoisienne*, Cinquième édition, révisée et complétée, Springer Lecture Notes in Mathematics **5** (1994)

[SeRC] J-P. Serre, Revêtements de courbes algébriques, Séminaire Bourbaki (1991/92), exposé 749, Astérisque **206** (1992), 167-182.

[SGA3] *Schémas en groupes*, Séminaire de Géométrie Algébrique du Bois Marie 1962/64 (SGA 3), dirigé par M. Demazure et A. Grothendieck, Lecture Notes in Math. **151-153**, Springer-Verlag (1970).

J.-L. Colliot-Thélène,

C.N.R.S.,

UMR 8628, Mathématiques,

Bâtiment 425,

Université de Paris-Sud,

F-91405 Orsay

France

e-mail: colliot@math.u-psud.fr

Philippe Gille

C.N.R.S.,

UMR 8628, Mathématiques,

Bâtiment 425,

Université de Paris-Sud,

F-91405 Orsay

France

e-mail: Philippe.Gille@math.u-psud.fr