APPROXIMATION FORTE POUR LES ESPACES HOMOGÈNES DE GROUPES SEMI-SIMPLES SUR LE CORPS DES FONCTIONS D'UNE COURBE ALGÉBRIQUE COMPLEXE

par

Jean-Louis Colliot-Thélène

Résumé. — Sur un corps de fonctions d'une variable sur le corps des complexes, l'approximation forte hors d'un ensemble fini non vide de places vaut pour tout espace homogène d'un groupe semi-simple simplement connexe. En particulier l'approximation forte hors d'un ensemble fini non vide de places vaut pour les quadriques affines lisses de dimension au moins 2 sur un tel corps. L'approximation forte hors d'un ensemble fini de places ne vaut pas pour le groupe multiplicatif.

Abstract. — Let K be the function field of a curve over the complex field. Let X be a homogeneous space of a semisimple linear algebraic group over K. Strong approximation holds for X outside any finite nonempty set of places of K. Strong approximation fails for tori over K.

1. Introduction

Sur un corps de nombres, l'approximation faible, resp. l'approximation forte, ont été depuis longtemps discutées pour les groupes linéaires connexes, leurs espaces homogènes, et certaines variétés rationnellement connexes. Cette étude va de pair avec celle du principe local-global pour l'existence de points rationnels, resp. de points entiers. Sur un corps de nombres, on sait qu'une condition nécessaire pour qu'une variété lisse satisfasse l'approximation forte est qu'elle soit géométriquement simplement connexe (Kneser [**9**] pour les groupes, Minchev [**10**] en général).

Depuis une dizaine d'années, les techniques de déformation de courbes en géométrie algébrique complexe sont appliquées à l'étude de ces questions pour les variétés rationnellement connexes définies sur un corps $K = \mathbf{C}(\Gamma)$ de fonctions d'une variable sur les complexes, situation a priori plus simple que celle des variétés sur les corps de nombres. Dans l'article récent [**1**], Chen et Zhu établissent l'approximation forte sur K pour le complémentaire d'hypersurfaces lisses dans les intersections complètes lisses dans un espace projectif, sous certaines conditions sur les multidegrés.

Un cas très particulier de leurs résultats est celui des quadriques affines d'équation $\sum_{i=1}^{n} a_i x_i^2 = b$, avec les a_i et b dans K^* et $n \geq 4$, pour lesquelles ils établissent l'approximation forte, et en particulier un principe local-global pour les points entiers, analogues d'un résultat de M. Kneser sur les corps de nombres.

Pour les espaces homogènes de groupes linéaires connexes sur $K = \mathbf{C}(\Gamma)$, avec P. Gille nous avons établi l'approximation faible [**2**]. Un théorème général de Kneser [**9**] et Harder [**7**] donne l'approximation forte (en dehors d'un ensemble fini non vide de places) pour les groupes semi-simples simplement connexes (Théorème 3.1 ci-dessous). La question de l'approximation forte ne semble pas avoir été étudiée pour les autres groupes linéaires et leurs espaces homogènes.

Dans cette note, je remarque que pour $K = \mathbf{C}(\Gamma)$ l'approximation forte hors d'un ensemble fini non vide de places vaut pour tout K-groupe semisimple et plus généralement pour tout espace homogène d'un K-groupe semi-simple (Théorème 3.4). La démonstration combine le théorème 3.1 avec un théorème (Théorème 3.3) dont la démonstration était déjà essentiellement dans [**2**], et qui repose sur le théorème d'existence de Riemann.

Dans le cas particulier des quadriques affines mentionné ci-dessus, ceci donne l'approximation forte et le principe local-global pour les points entiers pour $n \geq 3$ (Corollaire 4.1, dont la démonstration n'utilise que le théorème de Harder).

On voit par contre facilement que l'approximation forte est en défaut pour le groupe multiplicatif $\mathbf{G}_{m,K}$.

Je remercie G. Lucchini Arteche, C. Demarche, P. Gille, D. Izquierdo et le rapporteur pour diverses remarques.

2. Définitions et rappels

Soit T un schéma de Dedekind intègre, de corps des fractions K. Pour P point fermé de T on note R_P le complété de l'anneau local de T en P et K_P le corps des fractions de R_P. On note $\mathbb{A}_K$ l'anneau des adèles de K. Pour $S \subset T$ un sous-ensemble fini, on note $\mathbb{A}_K^S$ l'anneau des adèles hors de S. Soit X une K-variété lisse. Pour tout point fermé $P \in T$, on munit $X(K_P)$ de la topologie définie par celle de K_P. On note $X(\mathbb{A}_K)$ l'espace topologique des points adèliques de X. Pour un sous-ensemble fini $S \subset T$, on note $X(\mathbb{A}_K^S)$ l'espace des points adéliques hors de S.

Pour $S \subset T$ sous-ensemble fini, on dit que la K-variété X satisfait l'approximation forte sur T hors de S si l'image diagonale de $X(K)$ est dense dans la projection sur $X(\mathbb{A}_K^S)$ de $X(\mathbb{A}_K)$. En d'autres termes, si $X(\mathbb{A}_K)$ est non vide, alors $X(K)$ est non vide et son image diagonale dans $X(\mathbb{A}_K^S)$ est dense. Si la propriété vaut pour $S = \emptyset$, on dit que X satisfait l'approximation forte sur T.

Si la K-variété X satisfait l'approximation forte hors de l'ensemble fini S, alors elle satisfait l'approximation forte hors de tout sous-ensemble fini $S' \subset T$ contenant S.

Soit K un corps. Un K-groupe réductif connexe G est dit quasi-déployé s'il possède un K-sous-groupe de Borel. On a le théorème suivant (M. Kneser [**9**, §5], G. Harder [**7**, Satz. 2.2.1]).

Théorème 2.1. — *Soient A un anneau de Dedekind, K son corps des fractions et G un K-groupe semi-simple simplement connexe quasi-déployé. Alors l'approximation forte sur* Spec A *vaut pour G.*

Un K-groupe semisimple G est dit presque K-simple si son revêtement simplement connexe ne se décompose pas en un produit de K-groupes. Un K-groupe semisimple G est dit absolument presque K-simple si, sur toute extenson de corps L/K, le L-groupe $G \times_K L$ est presque L-simple. Un K-groupe réductif connexe est dit K-isotrope s'il n'existe pas de K-homomorphisme non trivial du groupe multiplicatif $\mathbf{G}_{m,K}$ dans G. L'énoncé suivant est dû à P. Gille [**5**, Corollaire 5.11]. On peut montrer qu'il généralise le théorème ci-dessus.

Théorème 2.2. — *Soient A un anneau de Dedekind, K son corps des fractions et G un K-groupe semi-simple simplement connexe absolument presque K-simple K-isotrope. Supposons la K-variété G K-rationnelle, ou plus généralement rétracte rationnelle sur K. Alors l'approximation forte sur* Spec A *vaut pour G.*

3. L'approximation forte pour les groupes semi-simples et leurs espaces homogènes sur le corps des fonctions d'une courbe algébrique complexe

Théorème 3.1. — *Soit Γ une courbe connexe, projective et lisse sur $\mathbf{C}$, soit $K = \mathbf{C}(\Gamma)$ son corps des fonctions. L'approximation forte hors de tout ensemble fini non vide $S \subset \Gamma(\mathbf{C})$ vaut pour tout K-groupe semi-simple simplement connexe G.*

Démonstration. — Le corps $K = \mathbf{C}(\Gamma)$ étant un corps C_1 (Tsen), tout K-groupe G est quasi-déployé (Springer [**12**, Prop. 1.1, Prop. 1.2] ; voir [**11**, III.2.3] pour le cas général de la conjecture I de Serre, établi par Steinberg). Le théorème 2.1 (Harder) s'applique donc à l'ouvert affine $\Gamma \setminus S$, qui est le spectre d'un anneau de Dedekind, et établit le résultat pour G. $\square$

Proposition 3.2. — *(i) Soit $F = \mathbf{C}((t))$. Pour tout module galoisien fini μ sur F, de dual le module galoisien fini $\hat{\mu} = \mathrm{Hom}_{\mathbf{Z}}(\mu, \mathbf{Q}/\mathbf{Z}(1))$, l'accouplement évident*

$$H^1(F, \mu) \times \hat{\mu}(F) \to H^1(F, \mathbf{Q}/\mathbf{Z}(1)) = \mathbf{Q}/\mathbf{Z}$$

est une dualité parfaite de groupes finis.

(ii) Soit Γ une courbe connexe, projective et lisse sur $\mathbf{C}$, et soit $K = \mathbf{C}(\Gamma)$. Pour tout module galoisien fini μ sur F, de dual $\hat{\mu} = \mathrm{Hom}_{\mathbf{Z}}(\mu, \mathbf{Q}/\mathbf{Z}(1))$, on a une suite exacte naturelle

$$H^1(K, \mu) \to \bigoplus_{P \in \Gamma(\mathbf{C})} H^1(K_P, \mu) \to \mathrm{Hom}(\hat{\mu}(K), \mathbf{Q}/\mathbf{Z}) \to 0,$$

chaque application $H^1(K_P, \mu) \to \mathrm{Hom}(\hat{\mu}(K), \mathbf{Q}/\mathbf{Z})$ étant donnée par la flèche composée $H^1(K_P, \mu) \to \mathrm{Hom}(\hat{\mu}(K_P), \mathbf{Q}/\mathbf{Z}) \to \mathrm{Hom}(\hat{\mu}(K), \mathbf{Q}/\mathbf{Z})$ et étant en particulier surjective.

(iii) Soit $S \subset \Gamma(\mathbf{C})$ un ensemble non vide, et soit μ comme ci-dessus. L'application diagonale

$$H^1(K, \mu) \to \bigoplus_{P \notin S} H^1(K_P, \mu)$$

est surjective.

Démonstration. — L'énoncé (i) résulte simplement du fait que le groupe de Galois absolu de $\mathbf{C}((t))$ est $\hat{\mathbf{Z}}$ (Puiseux), engendré topologiquement par un élément σ, donc que $H^1(F, \mu) = \mu/(1 - \sigma)\mu$.

Pour $\mu = \mu_n$ le groupe constant défini par les racines n-ièmes de l'unité, l'énoncé (ii) résulte, via la suite de Kummer, du fait que le groupe des $\mathbf{C}$-points de la jacobienne de Γ est divisible.

Pour μ quelconque, l'énoncé (ii) est un théorème de type Poitou-Tate qui ne semble pas avoir été explicité dans la littérature classique. C'est maintenant le cas le plus simple ($d = -1$) d'un théorème d'Izquierdo sur les courbes sur les corps d-locaux (Izquierdo [**8**, Thm. 2.7]), étendant des résultats sur les cas $d = 0$ [**3**] et $d = 1$ [**6**, §2]. Nous laissons au lecteur le soin d'adapter les arguments de ces articles au cas plus simple ici considéré.

L'énoncé (iii) résulte de l'énoncé (ii). $\square$

L'énoncé (iii) est un cas particulier de l'énoncé suivant, qui sera utilisé pour la démonstration du théorème 3.4.

Théorème 3.3. — *Soit* Γ *une courbe connexe, projective et lisse sur* $\mathbf{C}$*, et soit* $K = \mathbf{C}(\Gamma)$*. Soit* $S \subset \Gamma(\mathbf{C})$ *fini non vide. Pour tout* K*-groupe linéaire* G*, l'application diagonale*

$$H^1(K,G) \to \oplus_{P \notin S} H^1(K_P,G)$$

est surjective.

Démonstration. — La somme directe désigne ici le sous-ensemble du produit des ensembles pointés $H^1(K_P,G)$ formé des éléments $\{\xi_P\}$ avec $\xi_P = 1$ pour presque tout point P. Soit $\{\xi_P\} \in \oplus_{P \notin S} H^1(K_P,G)$. Il suffit de suivre la démonstration du théorème 4.2 de [**2**]. On commence par se réduire au cas où G est un K-groupe fini. On peut supposer que S est réduit à un seul point P_0. On choisit ensuite un ensemble fini $T \subset \Gamma(\mathbf{C})$, contenant P_0, de complémentaire $U \subset \Gamma$ tel que G/K s'étende en un U-schéma en groupes fini étale $\mathcal{G}$ sur U, et que $\xi_P = 1$ pour $P \notin U$. On considère ensuite l'extension L/K maximale non ramifiée en dehors de T. La démonstration de [**2**, Thm. 4.2], qui repose sur le théorème d'existence de Riemann, produit $\eta \in H^1(L/K, G(L)) \subset H^1(K,G)$ d'image ξ_P pour $P \in T \setminus \{P_0\}$. Pour $P \notin T$, l'image de η est $1 \in H^1(K_P,G)$, puisque η est dans l'image de $H^1_{\text{ét}}(U,\mathcal{G})$. □

Théorème 3.4. — *Soit* Γ *une courbe connexe, projective et lisse sur* $\mathbf{C}$*, et soit* $K = \mathbf{C}(\Gamma)$*. L'approximation forte hors de tout ensemble fini non vide* $S \subset \Gamma(\mathbf{C})$ *vaut pour tout espace homogène d'un* K*-groupe semi-simple* G*.*

Démonstration. — Soit X un tel espace homogène. Comme on n'a fait aucune hypothèse sur les stabilisateurs géométriques, on peut supposer G simplement connexe. On sait que l'on a $X(K) \neq \emptyset$. On a donc $X = G/H$ pour $H \subset G$ un K-sous-groupe fermé. Comme G est linéaire connexe, les ensembles $H^1(K,G)$ et $H^1(K_P,G)$ sont réduits chacun à un point. On a des suites exactes d'ensembles pointés ([**11**, I.5.4, Prop. 36 et Cor. 1]) :

$$\begin{array}{ccccccc}
G(K) & \to & X(K) & \to & H^1(K,H) & \to & 1 \\
\downarrow & & \downarrow & & \downarrow & & \\
G(\mathbb{A}_K^{P_0}) & \to & X(\mathbb{A}_K^{P_0}) & \to & \oplus_{P \neq P_0} H^1(K_P,H) & \to & 1.
\end{array}$$

Le théorème 3.3, une chasse au diagramme et le théorème 3.1 (approximation forte pour G semi-simple simplement connexe) donnent alors l'approximation forte pour X hors de la place P_0. □

Remarque 3.5. — Le théorème 3.1 et la proposition 3.2 suffisent à établir le théorème 3.4 pour les espaces homogènes $X = G/H$ dans les cas suivants :

(i) $X = G$ avec G semi-simple, et plus généralement :

(ii) $X = G/A$ avec G semi-simple simplement connexe et A sous-K-groupe abélien fini.

(iii) G semi-simple et H connexe.

Le théorème 3.3 permet de traiter le cas d'un groupe d'isotropie H quelconque.

Remarque 3.6. — Sur un corps de nombres, un groupe non simplement connexe ne saurait satisfaire l'approximation forte hors d'un nombre fini de places (Kneser [**9**]). Plus généralement, Minchev [**10**] a montré que si une variété normale sur un corps de nombres satisfait l'approximation forte hors d'un nombre fini de places, alors elle est géométriquement simplement connexe. La situation sur $K = \mathbf{C}(\Gamma)$ est différente, comme l'ont déjà remarqué Chen et Zhu [**1**, Cor. 1.5 et §5].

4. Applications aux quadriques affines et aux complémentaires de quadriques dans l'espace projectif

Pour $n \geq 4$, l'énoncé suivant est un cas particulier d'un résultat de Chen et Zhu [**1**, Thm. 1.4].

Corollaire 4.1. — *Soit Γ une courbe connexe, projective et lisse sur $\mathbf{C}$, soit $K = \mathbf{C}(\Gamma)$ et soit $S \subset \Gamma(\mathbf{C})$ fini non vide. Soient $n \geq 3$ et $q(x_1, \ldots, x_n)$ une forme quadratique non dégénérée sur K. Soit $b \in K^*$. L'approximation forte hors de S vaut pour la quadrique affine d'équation $q(x_1, \ldots, x_n) = b$.*

Démonstration. — Comme il est bien connu (cf. [**4**, §5]), la quadrique affine sur $K = \mathbf{C}(t)$ donnée par l'équation $q(x_1, \ldots, x_n) = b$ pour $n \geq 2$ possède un K-point et pour $n \geq 3$ peut s'écrire, après choix d'un K-point, comme quotient du groupe des spineurs de la forme quadratique q par un K-groupe linéaire connexe (tore pour $n = 3$, groupe semi-simple simplement connexe pour $n \geq 4$). L'énoncé est alors un cas particulier du théorème 3.4 – pour G semi-simple simplement connexe et H connexe, si bien que le résultat ici est une conséquence directe du théorème 3.1. □

Corollaire 4.2. — *Soient $n \geq 3$ et $b_1(t), \ldots, b_n(t) \in \mathbf{C}[t]$ des éléments non nuls. Pour $b(t) \in \mathbf{C}[t]$, l'équation*

$$\sum_{i=1}^{n} a_i(t) x_i(t)^2 = b(t)$$

a des solutions avec $x_i(t) \in \mathbf{C}[t]$ si et seulement si elle a des solutions modulo toute puissance de $\prod_{i=1}^{n} a_i(t)$.

Remarque 4.3. — Sur un corps de nombres totalement imaginaire, pour une quadrique affine d'équation $q(x_1, \ldots, x_n) = b$, avec q forme quadratique non dégénérée et $b \in k^*$, l'approximation forte vaut si $n \geq 4$, mais ne vaut pas en général pour $n = 3$ (cf. [**4**]).

Théorème 4.4. — *Soit Γ une courbe connexe, projective et lisse sur $\mathbf{C}$, soit $K = \mathbf{C}(\Gamma)$ et soit $P_0 \in \Gamma(\mathbf{C})$. Soit G un K-groupe linéaire. Soit X une K-variété lisse géométriquement intègre et $Y \to X$ un torseur sur X sous le K-groupe G. Si pour tout 1-cocycle $\zeta \in Z^1(K,G)$, l'espace total du torseur tordu Y^ζ satisfait l'approximation forte hors de P_0 et satisfait $Y^\zeta(K_{P_0}) \neq \emptyset$, alors X satisfait l'approximation forte hors de S.*

Démonstration. — Ceci se déduit du théorème 3.3 par le même argument que pour le théorème 3.4. □

Pour $n \geq 3$, le corollaire suivant est un cas particulier de [**1**, Cor. 1.5].

Corollaire 4.5. — *Soit Γ une courbe connexe, projective et lisse sur $\mathbf{C}$, et soit $K = \mathbf{C}(\Gamma)$. Soient $n \geq 2$ un entier et $q(x_0, \ldots, x_n)$ une forme quadratique non dégénérée sur K. Soit X le complémentaire de la quadrique $q = 0$ dans $\mathbf{P}^n_K$. Pour tout ensemble fini non vide $S \subset \Gamma(\mathbf{C})$, l'approximation forte hors de S vaut pour X.*

Démonstration. — Soit $Y \subset \mathbf{A}^{n+1}_K$ la quadrique d'équation $q(x_0, \ldots, x_n) = 1$. La projection $Y \to X$ fait de Y un torseur sur X sous le groupe μ_2. On a $H^1(K, \mu_2) = K^*/K^{*2}$, tout torseur tordu de $Y \to X$ a son espace total défini par une équation $q(x_0, \ldots, x_n) = c$ pour $c \in K^*$ convenable. Le corollaire 4.1 et le théorème 4.4 donnent le résultat. □

Remarque 4.6. — Dans le cas $\mu = \mu_d$, le groupe des racines d-ièmes de l'unité, l'argument donné au théorème 4.4 est très proche de celui utilisé dans [**1**, §5] pour passer de l'approximation forte hors de P_0 sur les hypersurfaces affines lisses d'équation $f(x_0, \ldots, x_n) = c$, avec $c \neq 0$ et f homogène de degré d non singulière, (approximation forte établie dans [**1**] pour $d^2 \leq n+1$) à l'approximation forte pour les ouverts de $\mathbf{P}^n_K$ d'équation $f(x_0, \ldots, x_n) \neq 0$.

5. L'approximation forte ne vaut pas pour les tores

Proposition 5.1. — *Pour $K = \mathbf{C}(\mathbf{P}^1) = \mathbf{C}(t)$, pour tout ensemble fini S de points de $\mathbf{P}^1(\mathbf{C})$, l'approximation forte hors de S est en défaut pour la K-variété $\mathbf{G}_{m,K}$.*

Démonstration. — Pour $P \in \mathbf{P}^1(\mathbf{C})$, notons $U_P \subset K_P^*$ le groupe des unités. On peut supposer que S consiste en les points distincts $t = e_1, \ldots, e_n, \infty$. Le groupe M intersection de K^* et de $\prod_{P \notin S} U_P$ est formé des éléments de la forme $c.\prod_{i=1}^n (t-e_i)^{n_i}$ avec $c \in \mathbf{C}^*$ et les $n_i \in \mathbf{Z}$. Fixons $a, b \in \mathbf{C}$ distincts et distincts des e_i. Si K^* était dense dans $\prod_{P \notin S} U_P$ l'image de M par l'évaluation simultanée en a et b serait égale à $\mathbf{C}^* \times \mathbf{C}^*$. Prenant le quotient sur les deux facteurs, ceci impliquerait que tout élément de $\mathbf{C}^*$ appartient au sous-groupe engendré par les $(a-e_i)/(b-e_i)$, $i=1,\ldots,n$, donc que $\mathbf{C}^*$ serait un groupe de type fini. $\square$

La proposition montre que l'approximation forte sur $\mathbf{C}[t]$ ne vaut pas pour une équation $xy=1$ sur $K=\mathbf{C}(t)$. La condition $n\geq 3$ dans le corollaire 4.2 est donc nécessaire.

On peut aussi donner un contre-exemple au principe local-global pour les solutions dans $\mathbf{C}[t]$ d'une équation

$$a(t)x^2+b(t)y^2=c(t)$$

avec $a(t),b(t),c(t)\in\mathbf{C}[t]$ non nuls. L'exemple suivant m'a été communiqué par D. Izquierdo :

$$(t+1)x^2+t^2y^2=1.$$

Le lemme de Hensel donne des solutions dans tous les complétés de $\mathbf{C}[t]$ en les points de $\mathbf{A}^1(\mathbf{C})$, et il y a une solution dans $\mathbf{C}(t)$ par le théorème de Tsen. Mais il n'y a pas de solution avec $x,y\in\mathbf{C}[t]$. C'est clair si $x=0$, et si $x\neq 0$ le polynôme $(t+1)x^2$ est de degré impair et le polynôme t^2y^2 est de degré pair, leur somme ne peut être une constante.

Remarque 5.2. — Dans [**2**, §3] nous avons donné un contre-exemple à l'approximation faible pour une surface d'Enriques $X/\mathbf{C}(t)$. L'obstruction utilisée est une obstruction de réciprocité associée à un élément de $H^1_{\text{ét}}(X,\mathbf{Z}/2)$. Comme X est projective, cela donne immédiatement un contre-exemple à l'approximation forte en dehors d'ensembles finis de places de K.

La situation est là très différente de celle d'une isogénie de groupes linéaires connexes, comme discutée dans la démonstration du théorème 3.4. Dans [**2**, §3], on a un $\mathbf{Z}/2$-torseur $Y\to X$, définissant pour tout point P une application $X(K_P)\to H^1(K_P,\mathbf{Z}/2)$. Pour presque tout point P, cette application a son image réduite à zéro. Si par contre on considère une isogénie

$$1\to\mu\to\tilde{G}\to G\to 1$$

avec $\tilde{G}$ et G des K-groupes linéaires connexes, pour tout point P l'application associée $G(K_P)\to H^1(K_P,\mu)$ est surjective.

Références

[1] Qile Chen et Yi Zhu, Strong approximation over function fields, http ://arxiv.org/abs/1510.04647

[2] J.-L. Colliot-Thélène et P. Gille, Remarques sur l'approximation faible sur un corps de fonctions d'une variable, in *Arithmetic of higher dimensional algebraic varieties* (B. Poonen, Yu. Tschinkel, eds.), Progress in Mathematics **226** (2004) Birkhäuser Boston, Cambridge, MA, pp. 121–133.

[3] J.-L. Colliot-Thélène et D. Harari, Dualité et principe local-global pour les tores sur une courbe au-dessus de $C((t))$, Proc. Lond. Math. Soc. (3) **110** (2015), no. 6, 1475–1516.

[4] J.-L. Colliot-Thélène et F. Xu, Brauer-Manin obstruction for integral points of homogeneous spaces and representation by integral quadratic forms, Compositio Math. **145** (2009), 309–363.

[5] P. Gille, Le problème de Kneser-Tits, in *Séminaire Bourbaki 2006-2007*, Astérisque **326** (2009), 39–81.

[6] D. Harari, C. Scheiderer et T. Szamuely, Weak approximation for tori over p-adic function fields, Int. Math. Res. Not. IMRN 2015 no. 10, 2751–2783.

[7] G. Harder, Halbeinfache Gruppenschemata über Dedekindringen, Inventiones math. **4** (1967) 165–191.

[8] D. Izquierdo, Théorèmes de dualité pour les corps de fonctions sur des corps locaux supérieurs, Math. Zeitschrift **284**, no. 1-2 (2016) 615–642.

[9] M. Kneser, Starke Approximation in algebraischen Gruppen, I. J. für die reine und angew. Math. (Crelle) **218** (1965) 190–203.

[10] Kh. P. Minchev, Approximation forte pour les variétés sur un corps de nombres algébriques (en russe), Dokl. Akad. Nauk BSSR (1989) Tom XXXIII no.1, pp. 5–8.

[11] J-P. Serre, *Cohomologie galoisienne*, Springer LNM **5**. Cinquième édition, révisée et complétée, 1994.

[12] T. A. Springer, Quelques résultats sur la cohomologie galoisienne, in *Colloque sur la théorie des groupes algébriques*, CBRM (Bruxelles) (1962) 129–135.

15 avril 2016, soumis à European Journal of Mathematics le 20 août 2016, version révisée le 4 février 2017

Jean-Louis Colliot-Thélène, CNRS, Université Paris Sud/Paris-Saclay, Mathématiques, Bâtiment 425, 91405 Orsay Cedex, France • *E-mail :* jlct@math.u-psud.fr