GÉOMÉTRIE ALGÉBRIQUE. — *La descente sur les surfaces rationnelles fibrées en coniques.* Note de **Jean-Louis Colliot-Thélène** et **Jean-Jacques Sansuc,** présentée par Jean-Pierre Serre.

On montre que, sur une surface fibrée en coniques sur $\mathbf{P}^1$ ayant $r$ fibres géométriques dégénérées, les torseurs universels ([1], [2]) sont essentiellement des intersections de $r-2$ quadriques dans $\mathbf{P}^{2r-1}$. Ceci généralise la description des torseurs universels sur les surfaces de Châtelet donnée dans [4]. On en déduit des applications à l'arithmétique des surfaces rationnelles fibrées en coniques lorsque $r=4$ : finitude de la R-équivalence et approche plus géométrique de résultats récents de P. Salberger [9].

*ALGEBRAIC GEOMETRY.* — Descent upon conic bundles over the projective line.

*Let X be a conic bundle over the projective line $\mathbf{P}^1$, and let r be the number of its geometric degenerate fibres. Any universal torsor over X is shown to be essentially a complete intersection of $r-2$ quadrics in $\mathbf{P}^{2r-1}$. When $r=4$ and the ground field is a number field, this leads to a proof that R-equivalence on the rational points of X is finite and to a more geometric approach to recent results of P. Salberger.*

I. NOTATIONS ET RAPPELS. — Soient $k$ un corps, $\bar{k}$ une clôture séparable et $\mathfrak{g}=\mathrm{Gal}(\bar{k}/k)$. Soit X une $k$-variété algébrique. On note Pic X son groupe de Picard, Br X son groupe de Brauer et $\mathrm{Div}_{\mathrm{Y}}\mathrm{X}$ le groupe des diviseurs de X à support dans un fermé Y. Si $\mathrm{K}/k$ est une extension, on note X(K) l'ensemble des points K-rationnels de X et $\mathrm{X}_{\mathrm{K}} := \mathrm{X}\times_k \mathrm{K}$, puis K[X] l'anneau des fonctions régulières de $\mathrm{X}_{\mathrm{K}}$ et, si $\mathrm{X}_{\mathrm{K}}$ est intègre, K(X) son corps des fonctions rationnelles. On note enfin $\bar{\mathrm{X}}=\mathrm{X}_{\bar{k}}$ et $\mathrm{Br}_1\mathrm{X}=\ker(\mathrm{Br}\,\mathrm{X}\to\mathrm{Br}\,\bar{\mathrm{X}})$. On considère les conditions :

(1) X est lisse, géométriquement intègre, telle que $\bar{k}^*=\bar{k}[\mathrm{X}]^*$,

(2) le $\mathfrak{g}$-module $\mathrm{Pic}\,\bar{\mathrm{X}}$ est **Z**-libre de type fini.

Si S est un $k$-groupe algébrique de type multiplicatif lisse, on note $\hat{\mathrm{S}}$ le $\mathfrak{g}$-module de ses caractères sur $\bar{k}$. Les torseurs sur X sous S sont classés par le groupe de cohomologie étale $\mathrm{H}^1(\mathrm{X}, \mathrm{S})$. On appelle type d'un torseur son image par le morphisme naturel $\chi:\mathrm{H}^1(\mathrm{X},\mathrm{S})\to\mathrm{Hom}_{\mathfrak{g}}(\hat{\mathrm{S}},\mathrm{Pic}\,\bar{\mathrm{X}})$. Sous (2), on note $\mathrm{S}_0$ le $k$-tore dont le module des caractères est $\mathrm{Pic}\,\bar{\mathrm{X}}$ et $\lambda_0$ l'identité de $\mathrm{Pic}\,\bar{\mathrm{X}}$; on appelle torseur universel un torseur de type $\lambda_0$ (*cf.* [1] et [2]). Si $\mathrm{K}/k$ est une extension séparable finie on note $\mathrm{R}_{\mathrm{K}/k}\mathbf{G}_m$ la restriction à la Weil de K à $k$ du groupe multiplicatif $\mathbf{G}_{m,\mathrm{K}}$. Un $k$-tore est dit quasi-trivial s'il est $k$-isomorphe à un produit de tores du type $\mathrm{R}_{\mathrm{K}/k}\mathbf{G}_m$.

II. ÉQUATIONS LOCALES DES TORSEURS D'UN TYPE DONNÉ. — Soit X une $k$-variété algébrique vérifiant (1). Soient S un $k$-groupe algébrique de type multiplicatif lisse et $\lambda:\hat{\mathrm{S}}\to\mathrm{Pic}\,\bar{\mathrm{X}}$ un $\mathfrak{g}$-homomorphisme. Soit U un ouvert non vide de X tel que $\lambda$ se factorise par $\mathrm{P}_{\bar{\mathrm{X}},\bar{\mathrm{U}}} := \ker(\mathrm{Pic}\,\bar{\mathrm{X}}\to\mathrm{Pic}\,\bar{\mathrm{U}})$. Soit en outre

$$(\aleph)\qquad 1\to\mathrm{S}\to\mathrm{M}\to\mathrm{R}\to 1$$

une suite exacte de $k$-groupes de type multiplicatif lisses où M soit un $k$-tore quasi-trivial, telle qu'il existe un diagramme commutatif de $\mathfrak{g}$-modules

$$\begin{tikzcd}
1 \arrow[r] & \bar{k}[\mathrm{U}]^*/\bar{k} \arrow[r] & \mathrm{Div}_{\bar{\mathrm{Y}}}\bar{\mathrm{X}} \arrow[r] & \mathrm{P}_{\bar{\mathrm{X}},\bar{\mathrm{U}}} \arrow[r] & 0 \\
0 \arrow[r] & \hat{\mathrm{R}} \arrow[r] \arrow[u, "\rho"] & \hat{\mathrm{M}} \arrow[r] \arrow[u] & \hat{\mathrm{S}} \arrow[r] \arrow[u, "\lambda"'] & 0
\end{tikzcd}$$

où Y désigne le fermé X − U. Tout $\mathfrak{g}$-morphisme $\hat{\mathrm{R}}\to\bar{k}[\mathrm{U}]^*$ définit un $k$-morphisme $\mathrm{U}\to\mathrm{R}$ et inversement. Tout $k$-morphisme $\varphi:\mathrm{U}\to\mathrm{R}$ définit par pull-back de l'extension $(\aleph)$ un torseur sur U sous S modelé sur $(\aleph)$. Ayant ainsi fixé $\lambda$, U, $(\aleph)$ et $\rho$, considérons l'ensemble $\mathrm{Tors}(\mathrm{U}, \mathrm{S}; \aleph, \rho)$ des classes d'isomorphisme de tels torseurs $\varphi^*(\aleph)$ lorsque le

0249-6291/86/03030303 \$ 2.00 © Académie des Sciences

comorphisme $\hat{\varphi}: \hat{R} \to \bar{k}[U]^*$ est un relèvement de $\rho$. On note $\mathrm{Tors}(X, S; \lambda)$ l'ensemble des classes d'isomorphisme de torseurs sur X sous S de type $\lambda$ qui, s'il est non vide, est un espace principal homogène sous $H^1(k, S)$.

PROPOSITION. — *On garde les hypothèses et notations ci-dessus. La restriction de* X *à* U *définit une surjection* $\gamma: \mathrm{Tors}(X, S; \lambda) \to \mathrm{Tors}(U, S; \aleph, \rho)$. *Si, en outre, le* $\mathfrak{g}$*-morphisme naturel* $\bar{k}^* \to \bar{k}[U]^*$ *admet une* $\mathfrak{g}$*-rétraction,* $\gamma$ *est même une bijection.*

Cet énoncé a au moins deux aspects :

(i) il *décrit* localement la restriction d'un torseur $\mathscr{T}$ de type $\lambda$ comme un produit fibré d'un torseur-type ($\aleph$) par $\varphi: U \to R$, ce qui fournit souvent en pratique une description d'un *modèle* de $\mathscr{T}$ par des équations explicites;

(ii) il assure que certains torseurs définis par produit fibré d'un torseur-type sur une $k$-variété « ouverte » U *se prolongent* à toute $k$-compactification lisse X.

Un cas particulier important est celui où $\lambda$ est l'identité de $P_{\bar{X}, \bar{U}}$. On retrouve alors, sous l'hypothèse (2), la description locale des torseurs universels donnée dans ([2], p. 227).

III. — ÉQUATIONS DES TORSEURS UNIVERSELS SUR UNE SURFACE FIBRÉE EN CONIQUES SUR $\mathbf{P}_k^1$. — On suppose $k$ parfait de caractéristique $\neq 2$. On note $(u, v)$ les coordonnées homogènes sur la droite projective $\mathbf{P}_k^1$ et $x = u/v$ la coordonnée sur la droite affine $\mathbf{A}_k^1 = \mathbf{P}_k^1 - \infty$. Soit $X \xrightarrow{\pi} \mathbf{P}_k^1$ une $k$-surface lisse, fibrée en coniques sur $\mathbf{P}_k^1$. Une telle surface vérifie (1) et (2). On suppose la fibre à l'infini lisse. Soient $(e_i)_{i=1, \ldots, s}$ les points fermés de $\mathbf{P}_k^1$ en lesquels les fibres de $\pi$ sont dégénérées, $K_i = k(e_i)$ le corps résiduel en $e_i$ et $K_i'/K_i$ l'algèbre quadratique définie par les composantes irréductibles géométriques de la fibre de $e_i$. Soient $P(x) = \prod_i N_{K_i/k}(x - e_i)$ et $A = k[x]/(P(x)) = \prod_i K_i$. L'algèbre $A' = \prod_i K_i'$ est quadratique sur A et peut s'écrire $k[x, \sqrt{a(x)}]/(P(x))$ avec $a(x)$ séparable [si $b \in B$, on désigne par la notation $B[\sqrt{b}]$ l'algèbre $B[T]/(T^2 - b)$]. Ainsi : $K_i' = K_i[\sqrt{a_i}]$ avec $a_i = a(e_i)$. On note $r = \deg P$ le nombre de fibres géométriques dégénérées de $\pi$. La fibration $\pi$ définit une $k(x)$-algèbre de quaternions $\mathscr{A}$ dont la classe dans $\mathrm{Br}\, k(x) = \mathrm{Br}\, k(\mathbf{P}^1)$ a pour résidu en $e_i$ la classe de $a_i$ dans $K_i^*/K_i^{*2}$.

Soient $U_0$ l'ouvert de $\mathbf{A}_k^1$ complémentaire des $e_i$ et U l'ouvert $X_{U_0}$ de X. La suite exacte (2.1) de [3] est une présentation du module galoisien $\mathrm{Pic}\, \bar{X}$, d'où l'on tire des suites exactes naturelles de $k$-tores

$$(3) \qquad 1 \to \mathbf{G}_{mk} \to S_0 \to S \to 1,$$

$$(4) \qquad 1 \to S \to \mathbf{G}_{mk} \times \prod_i R_{K_i'/k} \mathbf{G}_m \xrightarrow{\nu} \prod_i R_{K_i/k} \mathbf{G}_m \to 1,$$

où $\nu(t, t_i') = (t^{-1} . N_i(t_i'))$ avec $N_i := N_{K_i'/K_i}$; on réécrit cette dernière

$$(5) \qquad 1 \to S \to M \to R \to 1.$$

La suite exacte (3) vient, par dualité, de celle de $\mathfrak{g}$-modules

$$0 \to \hat{S} \xrightarrow{\lambda} \mathrm{Pic}\, \bar{X} \xrightarrow{\omega} \mathbf{Z} \to 0,$$

où $\omega$ est la restriction à la fibre générique, ou, ce qui revient au même, à $\bar{U}$. Ainsi, $P_{\bar{X}, \bar{U}} = \hat{S}$. De plus, le $\mathfrak{g}$-module $\bar{k}[U]^*/\bar{k}^*$ est de permutation, son dual est le $k$-tore $R = \prod_i R_{K_i/k} \mathbf{G}_m$ et la famille de fonctions $\{(x - e_i) \in K_i[U]\}$ définit une $\mathfrak{g}$-section de la projection $\bar{k}[U]^* \to \bar{k}[U]^*/\bar{k}^*$. Il existe donc des torseurs de type $\lambda$ sur X et la description locale des torseurs s'applique sur l'ouvert U : pour chaque

$$\alpha = \mathrm{cl}(\alpha_i) \in H^1(k, S) = (\prod_i K_i^*)/\mathrm{im}(\nu(k))$$

la fonction $\varphi_\alpha : U \to R = \prod_i R_{K_i/k} \mathbf{G}_m$ définie par $x \to \{\alpha_i (x - e_i)\}$ a pour comorphisme un relèvement de l'identité de $\hat{R} = \bar{k}[U]^*/\bar{k}^*$. D'après II, le torseur $\mathcal{T}^\alpha$ de type $\lambda$ associé à ce relèvement est, sur U, le pull-back par $\varphi_\alpha$ du torseur-type (4). Comme $\varphi_\alpha$ se factorise par $U_0$, on a le diagramme suivant dont les carrés sont cartésiens :

$$\begin{array}{ccccc} \mathcal{T}^\alpha_U & \to & W_0 & \to & M \\ \downarrow & & \downarrow & & \downarrow \\ U & \xrightarrow{\pi} & U_0 & \to & R. \end{array}$$

Les équations de $W_0$ sont donc données dans $\mathbf{A}^2_k \times_k \prod_i R_{K_i/k} \mathbf{A}^1$ par

$$(6) \qquad \alpha_i (x - e_i) = t^{-1} . N_i (t'_i) \neq 0, \qquad i = 1, \ldots, s,$$

où $(x, t; t'_i)$ sont les coordonnées, les $t'_i$ étant à valeurs dans $K'_i$. Considérons la $k$-variété $W = W_\alpha$ définie par les équations $(i = 1, \ldots, s)$

$$(7) \qquad \alpha_i (u - e_i v) = N_i (t'_i), \qquad (u, v) \neq (0, 0)$$

dans $\mathbf{A}^2_k \times_k \prod_i R_{K_i/k} \mathbf{A}^1$ de coordonnées $(u, v; t'_i)$. Le changement de variables $x = u/v$ et $t = v$ définit une $k$-immersion ouverte $W_0 \to W$ compatible avec les projections sur $U_0 \subset \mathbf{A}^1_k$ et $\mathbf{P}^1_k$ données respectivement par $x$ et par $(u, v)$.

LEMME. — *Avec les notations et hypothèses ci-dessus,*

$$\bar{k}[W]^* = \bar{k}^*, \qquad \operatorname{Pic} \bar{W} = 0, \qquad \operatorname{Br}_1 W = \operatorname{Br} k.$$

Ce lemme assure que pour toute compactification lisse Z de W, le g-module Pic $\bar{Z}$ est de permutation et les obstructions de Manin ([7], [8]) disparaissent donc sur Z.

THÉORÈME. — *Soit $W = W_\alpha$ la $k$-variété lisse définie par les équations* $(i = 1, \ldots, s)$

$$(8) \qquad \alpha_i (u - e_i v) = u_i^2 - a_i v_i^2, \qquad (u, v) \neq (0, 0)$$

*en les variables $(u, v; u_i, v_i)$, dans $\mathbf{A}^2_k \times_k \prod_i R_{K_i/k} \mathbf{A}^2$.*

(i) *La $k$-variété $W_\alpha$ est un ouvert d'un cône ayant pour base une intersection complète $V = V_\alpha$ de $r-2$ quadriques dans $\mathbf{P}^{2r-1}$, géométriquement intègre et non conique.*

(ii) *Tout modèle $k$-birationnel, propre et lisse, Z de W ou de V vérifie* $H^1(k, \operatorname{Pic} \bar{Z}) = 0$.

(iii) *Si $k$ est un corps de nombres ou un corps local ou un corps $C_1$, ou si $a(x) \in k$ est constant, ou si $W_\alpha(k) \neq \varnothing$, le torseur $\mathcal{T}^\alpha$ de type $\lambda$ admet pour modèle $k$-birationnel le produit de $V_\alpha$ par une conique et par $\mathbf{P}^1_k$.*

(iv) *Sous les hypothèses de* (iii), *tout torseur universel sur X admet pour modèle $k$-birationnel le produit d'une variété telle que $V_\alpha$ par une conique et par $\mathbf{P}^2_k$.*

Les équations (7) donnent celles du théorème en posant $t'_i = u_i + v_i \sqrt{a_i}$. D'où (i) en décomposant les $u_i$, $v_i$ sur une base sur $k$. Le lemme donne (ii).

D'après la description locale donnée plus haut, le torseur $\mathcal{T}^\alpha$ a pour restriction sur $U = X_{U_0}$ le produit fibré $U \times_{U_0} W_0$. Il admet donc pour modèle le pull-back par $q$ : $W \to \mathbf{P}^1_k$ de la fibration en coniques $X \to \mathbf{P}^1_k$, lisse au-dessus de $U_0$ et ramifiée en $\{e_i\}$ tout comme W. Le passage de $\mathbf{P}^1_k$ à W a pour effet de tuer la ramification de la fibration en coniques, comme le montre un calcul facile de résidus utilisant les équations (7). La classe dans $\operatorname{Br} k(W)$ de $q^*(\mathcal{A})$ appartient ainsi à Br W, et même à $\operatorname{Br}_1 W$ par Tsen appliqué à $\mathcal{A}$ sur $\mathbf{P}^1$. D'après le lemme, ou par un calcul direct (P. Salberger), elle vient donc de $\alpha \in {}_2\operatorname{Br} k$. Sous les hypothèses de (iii), $\alpha$ est la classe d'une $k$-algèbre de quaternions, d'où l'énoncé.

L'application $H^1(X, S_0) \to H^1(X, S)$ transforme, par produit contracté via (3), un torseur universel $\mathcal{T}$ en un torseur $\mathcal{T}^\alpha$ de type $\lambda$ et on a ainsi, d'après (3), une fibration $\mathcal{T} \to \mathcal{T}^\alpha$ localement triviale de groupe $\mathbf{G}_m$, d'où (iv).

*Remarque.* — Ce théorème explique et généralise la « séparation de variables » qui simplifie les équations des torseurs universels sur les surfaces de Châtelet [4].

III. APPLICATIONS. — La méthode de descente ramène un certain nombre de questions sur X à des questions analogues sur les torseurs universels (*cf.* [2], § V), donc essentiellement, d'après le théorème, sur les $V_\alpha$. Si le nombre $r$ de fibres géométriques dégénérées est 4, les variétés $V_\alpha$ sont des intersections de 2 quadriques non coniques et géométriquement intègres dans $\mathbf{P}_k^7$. On peut alors utiliser [4]. On obtient ainsi :

COROLLAIRE 1. — *Soient $k$ un corps de nombres et $X \to \mathbf{P}_k^1$ une surface lisse, fibrée en coniques d'invariant $r=4$. La R-équivalence sur $X(k)$ est finie.*

Ceci utilise les résultats de finitude de [4], § III, appendice B, sur la R-équivalence sur une intersection de 2 quadriques dans $\mathbf{P}_k^7$. Si $X(k) \neq \varnothing$, on a une surjection $X(k)/R \to A_0(X)$ dont les fibres ont au plus $2^m$ éléments, où $m$ est le nombre de places réelles, et on conjecture même que c'est une bijection.

COROLLAIRE 2. — *Soient $k$ un corps de nombres et $X \to \mathbf{P}_k^1$ une surface lisse, fibrée en coniques d'invariant $r=4$. Si le principe de Hasse fin vaut pour les intersections non coniques et géométriquement intègres de 2 quadriques dans $\mathbf{P}_k^7$, l'obstruction de Manin est la seule obstruction au principe de Hasse et à l'approximation faible pour X, et si $X(k) \neq \varnothing$, la conjecture A de [3] vaut pour X.*

La démonstration utilise [2], § IV, et [4], § VIII.

COROLLAIRE 3. — *Soient $k$ un corps de nombres et $X \to \mathbf{P}_k^1$ une surface lisse, fibrée en coniques d'invariant $r=4$. Si l'un des $e_i$ est rationnel, ou si l'un des $e_i$ est quadratique avec $K_i'/k$ biquadratique, on a les conclusions du corollaire 2.*

On constate en effet sur les équations que les intersections de 2 quadriques $V_\alpha$ dans $\mathbf{P}_k^7$ contiennent 2 points singuliers conjugués dans le premier cas et 2 droites conjuguées dans le second. On conclut alors grâce aux résultats de [4], §§ IX et XII ou XIV, qui établissent le principe de Hasse pour l'ouvert de lissité de telles intersections de 2 quadriques. De fait, le premier cas se ramène à [4], § VIII, car X est $k$-birationnelle à une surface de Châtelet, d'après Iskovskih [6] et Coray et Tsfasman [5].

Les corollaires 2 et 3 ont été d'abord obtenus par P. Salberger [9] par une autre méthode de réduction à [4] fondée sur la K-théorie. Nous le remercions de nous les avoir communiqués.

Reçue le 26 mai 1986.

RÉFÉRENCES BIBLIOGRAPHIQUES

[1] J.-L. COLLIOT-THÉLÈNE et J.-J. SANSUC, *Comptes rendus*, 282, série A, 1976, p. 113-1116; 284, série A, 1977, p. 967-970; 284, série A, 1977, p. 1215-1218.

[2] J.-L. COLLIOT-THÉLÈNE et J.-J. SANSUC, La descente sur les variétés rationnelles, in *Journées de géométrie algébrique d'Angers* 1979, A. BEAUVILLE éd., Sijthoff & Noordhoff, 1980, p. 221-235.

[3] J.-L. COLLIOT-THÉLÈNE et J.-J. SANSUC, *Duke Math. J.*, 48, 1981, p. 421-447.

[4] J.-L. COLLIOT-THÉLÈNE, J.-J. SANSUC et Sir Peter SWINNERTON-DYER, *Intersections of two quadrics and Châtelet surfaces*, preprint, Orsay, 1986, cf. *Comptes rendus*, 298, série I, 1984, p. 377-380.

[5] D. F. CORAY et M. A. TSFASMAN, *Arithmetic on singular del Pezzo surfaces*, preprint, Genève, 1986.

[6] V. A. ISKOVSKIH, *Mat. Sb.*, 88, (130), 1972, p. 31-37 (= *Math. U.S.S.R. Sb.*, 17, 1972, p. 30-36).

[7] Y. I. MANIN, *Actes du congrès intern. math. Nice*, 1, 1970, p. 401-411.

[8] Y. I. MANIN, *Cubic forms*, North-Holland, Amsterdam, 1974 et 1986.

[9] P. SALBERGER, *Comptes rendus*, 303, série I, 1986 (à paraître).

J.-L. C.-T. : *C.N.R.S., Mathématiques*, Bât. n° 425, *Université de Paris-Sud*, 91405 *Orsay Cedex*;
J.-J. S. : *École normale supérieure*, 45, *rue d'Ulm*, 75230 *Paris Cedex* 05.