Proceedings of the International Congress of Mathematicians
Berkeley, California, USA, 1986

Arithmétique des variétés rationnelles et problèmes birationnels

JEAN-LOUIS COLLIOT-THÉLÈNE

Introduction. D'un point de vue géométrique, les équations en les variables x, y, z:

$$a = bx^p + cy^q + dz^r \qquad (1)_{p,q,r}$$

avec $a, b, c, d \in \mathbf{Q}$ non nuls et p, q, r entiers naturels tels que

$$1/p + 1/q + 1/r \geq 1$$

définissent des surfaces très simples, dites rationnelles: elles deviennent birationnelles au plan affine après extension finie du corps de base $\mathbf{Q}$. Mais classiquement, c'est seulement pour $(1)_{2,2,2}$ qu'on sait, pour toute valeur de (a, b, c, d), traiter les problèmes diophantiens fondamentaux: Existence de solutions $(x, y, z) \in \mathbf{Q}^3$? Densité de ces solutions? Paramétrage de toutes les solutions?

Avant d'étudier une équation du type (1), il est bon de savoir mesurer sa "complexité diophantienne." On dispose pour cela d'une classification k-birationnelle des surfaces rationnelles, due à F. Enriques, B. Segre, Yu. I. Manin et V. A. Iskovskih (§1).

Le §2 décrit la méthode de la descente. Ce programme général, développé par J.-J. Sansuc et l'auteur [**10**, **11**], et inspiré de la descente sur les courbes elliptiques, prolonge des travaux de F. Châtelet [**5**], P. Swinnerton-Dyer et Yu. I. Manin [**35**, **36**]. Il réduit les problèmes diophantiens ci-dessus à deux questions fondamentales sur des variétés algébriques auxiliaires, et il a réussi pour $(1)_{2,2,3}$ et $(1)_{2,2,4}$. Ceci a permis d'établir le principe de Hasse pour essentiellement tout système de deux formes quadratiques en au moins neuf variables et a contribué à la réponse négative au problème de Zariski (§4).

La K-théorie algébrique a permis de montrer que le groupe de Chow réduit $A_0(X)$ d'une surface rationnelle X définie sur un corps de nombres est un groupe fini (§3). On a proposé une conjecture sur sa valeur, conjecture qui a été établie pour $(1)_{2,2,3}$ et $(1)_{2,2,4}$ en même temps que les résultats du §2.

Le §4 rassemble divers problèmes et résultats qui relèvent de la géométrie classique (problèmes de rationalité et de rationalité stable) mais dont les méthodes

Supported by Comité National Français des Mathématiciens.

font appel à des techniques propres au cas où le corps de base n'est pas algébriquement clos (problème de Zariski, problème de Noether, centre de l'algèbre à division générique).[1]

1. La classification k-birationnelle des surfaces rationnelles. Soit k un corps parfait infini, $\bar{k}$ une clôture algébrique, $\mathfrak{g} = \mathrm{Gal}(\bar{k}/k)$. Une k-variété algébrique X de dimension n est dite rationnelle si $\overline{X} = X \times_k \bar{k}$ est intègre et $\bar{k}$-birationnelle à l'espace projectif $\mathbf{P}^n_{\bar{k}}$, et elle est dite k-rationnelle si elle est déjà k-birationnelle à l'espace $\mathbf{P}^n_k$. Étant donnée une k-surface rationnelle propre et lisse X et ω son fibré canonique, on appellera degré de X l'entier relatif $d = (\omega \cdot \omega) \leq 9$. On note $X(k)$ l'ensemble de ses points rationnels. On connaît deux grandes séries de surfaces rationnelles: les surfaces de Del Pezzo et les surfaces fibrées en coniques.

Une surface de Del Pezzo X est une k-surface propre et lisse sur laquelle ω^{-1} est ample [**18**, **36**]. Sur une telle surface, $1 \leq d \leq 9$. Pour $d = 9$, on trouve les surfaces de Severi-Brauer. Les quadriques lisses de $\mathbf{P}^3$ ont $d = 8$. Pour $d = 4$, on trouve les intersections lisses de deux quadriques dans $\mathbf{P}^4$, pour $d = 3$ les surfaces cubiques lisses dans $\mathbf{P}^3$, le plongement étant défini par le système linéaire anticanonique $|\omega^{-1}|$. Pour $d = 2$, ce système fait de X un revêtement double de $\mathbf{P}^2_k$ ramifié le long d'une quartique lisse. Pour $d = 1$ ce système a un unique point base (donc $X(k)$ est non vide) et $|\omega^{-2}|$ fait de X un revêtement double d'un cône quadratique, ramifié en son sommet et le long d'une sextique.

On appelle surface fibrée en coniques standard une k-surface lisse X munie d'un k-morphisme propre surjectif $p\colon X \to C$, où la base C et la fibre générique sont des courbes propres et lisses de genre 0, et où chacune des r fibres géométriques dégénérées est l'intersection transverse de deux courbes lisses de genre zéro. Pour une telle surface, $d = 8 - r$.

La *méthode d'adjonction* a permis à Enriques [**20**], Manin [**33**, **34**] et Iskovskih [**26**] de montrer que ces deux familles forment un système complet de représentants pour les classes d'équivalence k-birationnelle de k-surfaces rationnelles:

THÉORÈME 1 [**26**]. *Toute k-surface rationnelle propre et lisse k-minimale X est soit une surface de Del Pezzo avec* $\mathrm{Pic}\, X \simeq \mathbf{Z}$, *soit une surface fibrée en coniques standard avec* $\mathrm{Pic}\, X \simeq \mathbf{Z} \oplus \mathbf{Z}$.

Ainsi, les équations $(1)_{2,3,3}$, $(1)_{3,3,3}$, resp. $(1)_{2,3,4}$, $(1)_{2,4,4}$, resp. $(1)_{2,3,5}$, $(1)_{2,3,6}$ mènent à des surfaces de Del Pezzo de degré 3, resp. 2, resp. 1 et les équations $(1)_{2,2,n}$ à des surfaces fibrées en coniques.

Le théorème 1 et une analyse cas par cas donnent le résultat suivant, conjecturé par Manin [**32**] (et qu'on aimerait étendre au cas où $cdk \leq 1$):

PROPOSITION 2. *Si k est un corps C_1, toute k-surface rationnelle propre et lisse possède un point k-rationnel.*

[1] On trouvera dans le texte récent de Manin et Tsfasman [**37**] de nombreux compléments au présent rapport.

Il est utile de savoir quand des surfaces d'un certain type sont k-birationnelles à celles d'un autre type (en particulier si elles sont k-rationnelles). Pour $d \geq 5$, la réponse est simple: toute k-surface rationnelle propre et lisse de degré ≥ 5 est k-rationnelle dès que $X(k)$ est non vide. De plus, si k est un corps de nombres, le principe de Hasse vaut pour de telles surfaces (Manin [**33**]). Pour $d \leq 4$ commencent les problèmes arithmétiques sérieux. En utilisant la technique des *systèmes linéaires à points bases*, et suivant B. Segre [**49**], Manin [**34**] et Iskovskih [**23**, **24**, **25**, **27**] ont résolu les problèmes de classification k-birationnelle. Leurs principaux résultats peuvent s'énoncer ainsi [**37**, **50**]:

THÉORÈME 3. *Soient X et Y deux k-surfaces rationnelles k-minimales avec X de degré ≤ 4. Si $f\colon X \to Y$ est une k-application birationnelle, alors f peut s'écrire comme un composé d'applications k-birationnelles*

$$X = X_0 \xrightarrow{f_1} X_1 \xrightarrow{f_2} \cdots \xrightarrow{f_n} X_n = Y$$

de telle sorte que pour chaque i, ou bien X_{i-1} est k-isomorphe à X_i, ou bien X_{i-1} et X_i sont des fibrations en coniques standard et f_i est une transformation élémentaire en un point fermé (*non situé sur une fibre dégénérée*)

Joint à une description des surfaces qui peuvent à la fois être des fibrations en coniques relativement minimales et des surfaces de Del Pezzo [**26**], cet énoncé implique (cf. Skorobogatov [**50**]):

COROLLAIRE 4. *Conservons les hypothèses du Théorème* 3. *La surface X n'est pas k-rationnelle. Les degrés de X et Y coïncident. Les $\mathfrak{g}$-modules* $\operatorname{Pic}\overline{X}$ *et* $\operatorname{Pic}\overline{Y}$ *sont isomorphes, ainsi que les groupes* $\operatorname{Pic} X$ *et* $\operatorname{Pic} Y$. *Si X est une surface de Del Pezzo de degré $d \leq 3$ avec* $\operatorname{Pic} X \simeq \mathbf{Z}$ (*ce qui est le cas si $d = 3$*), *X n'est pas k-birationnelle à une surface fibrée en coniques. Si X est une surface de Del Pezzo de degré* 4 *avec* $\operatorname{Pic} X \simeq \mathbf{Z}$, *elle n'est pas k-birationnelle à une surface fibrée en coniques de même degré.*

Pour X/C une surface fibrée en coniques relativement minimale de degré $d \leq 3$, on a mieux (Iskovskih): la base et la fibre générique de la fibration ne dépendent que de la classe d'équivalence k-birationnelle de la surface X. Pour $d = 4$, on doit à Manin [**33**], Kunyavskiĭ, Skorobogatov, Tsfasman [**30**, **31**] une classification combinatoire fine suivant l'action de $\mathfrak{g}$ sur $\operatorname{Pic}\overline{X}$.

On dit qu'une k-variété X est k-unirationnelle s'il existe une application k-rationnelle dominante d'un espace projectif $\mathbf{P}_k^r$ sur X. Les points k-rationnels de X sont alors Zariski-denses. Sauf en ce qui concerne les surfaces fibrées en coniques de degré 1 ou 2, les résultats ci-après sont classiques ou dus à Manin [**34**]:

THÉORÈME 5. *Soit X une k-surface rationnelle, propre et lisse, de degré d, possédant un point k-rationnel. Si $d \geq 5$, X est k-rationnelle, et si $d = 4$ ou 3, elle est k-unirationnelle. Si $d = 2$ ou si X est une surface fibrée en coniques standard avec $d = 1$, et si de plus X possède des points k-rationnels en dehors de certaines courbes, alors X est k-unirationnelle.*

Les problèmes importants de la k-unirationalité et de la densité des points rationnels restent ouverts tant pour les surfaces fibrées en coniques de degré $d \leq 0$ (e.g. $(1)_{2,2,n}$ pour $n \geq 8$) que pour les surfaces de Del Pezzo de degré 1 (qui possèdent toujours un k-point!) (ainsi on ne sait pas si les équations originelles $(1)_{2,3,5}$ et $(1)_{2,3,6}$, qui sont des ouverts de surfaces de Del Pezzo de degré 1, ont toujours une solution). On ne sait pas non plus si $(1)_{2,3,4}$, qui est un ouvert d'une surface de Del Pezzo de degré 2 possédant un k-point, a toujours une solution rationnelle.

2. La descente: programme, résultats, perspectives.

2.1. *Le module galoisien* $\operatorname{Pic}\overline{X}$. Le $\mathfrak{g}$-module $\operatorname{Pic}\overline{X}$ est apparu à plusieurs titres dans les travaux de Manin et de Voskresenskiĭ [**32**, **36**, **53**, **56**] sur les variétés rationnelles. Son premier rôle est birationnel:

THÉORÈME 6. *Soient X et Y des k-variétés propres, lisses, géométriquement intègres, rationnelles. Alors:*

(i) *Les $\mathfrak{g}$-modules* $\operatorname{Pic}\overline{X}$ *et* $\operatorname{Pic}\overline{Y}$ *sont des $\mathfrak{g}$-modules $\mathbf{Z}$-libres de type fini.*

(ii) *S'il existe des entiers n et m tels que $X \times_k \mathbf{P}_k^n$ soit k-birationnelle à $Y \times_k \mathbf{P}_k^m$, alors* $\operatorname{Pic}\overline{X}$ *et* $\operatorname{Pic}\overline{Y}$ *sont isomorphes à addition près de $\mathfrak{g}$-modules de permutation. En particulier, si X est stablement k-rationnelle,* $\operatorname{Pic}\overline{X}$ *est stablement de permutation.*

(iii) (*Voskresenskiĭ*) *Si X et Y sont des compactifications lisses de k-tores algébriques, la réciproque de* (ii) *vaut.*

(iv) *Sous les hypothèses de* (ii), *les groupes* $H^1(\mathfrak{g}, \operatorname{Pic}\overline{X})$ *et* $H^1(\mathfrak{g}, \operatorname{Pic}\overline{Y})$ *coïncident et* $H^1(\mathfrak{g}, \operatorname{Pic}\overline{X}) = 0$ *si X est stablement k-rationnelle.*

Notons $\operatorname{Br} X = H^2_{\text{ét}}(X, \mathbf{G}_m)$ le groupe de Brauer-Grothendieck. Pour X comme ci-dessus, on dispose d'une injection naturelle $\operatorname{Br} X/\operatorname{Br} k \hookrightarrow H^1(\mathfrak{g}, \operatorname{Pic}\overline{X})$ qui est un isomorphisme si $X(k)$ est non vide ou si k est un corps de nombres. C'est par le biais de ce lien à $\operatorname{Br} X$ que l'on voit apparaître le second rôle de $\operatorname{Pic}\overline{X}$, rôle dégagé par Manin [**35**, **36**], et qui est de donner de l'information sur l'ensemble $X(k)$ des points rationnels de X, tant sur leur existence que sur la répartition de $X(k)$ en classes pour la R-équivalence.

Soit X une k-variété propre et lisse sur un corps de nombres k. Si pour tout $(P_v) \in \prod_v X(k_v) \neq \emptyset$, il existe $\mathcal{A} \in \operatorname{Br} X$ avec $\sum_v i_v(\mathcal{A}(P_v)) \neq 0$, où $\mathcal{A}(P_v) \in \operatorname{Br} k_v$ est la fibre de $\mathcal{A}$ en $P_v \in X(k_v)$ et où $i_v \colon \operatorname{Br} k_v \to \mathbf{Q}/\mathbf{Z}$ est l'invariant local en v, alors $X(k) = \emptyset$: c'est là l'obstruction de Manin [**35**] au principe de Hasse pour X, obstruction qui rend compte de multiples contre-exemples à ce "principe."

On dit que l'obstruction de Manin au principe de Hasse est *la seule* pour une classe de k-variétés propres et lisses si pour toute X dans cette classe avec $X(k) = \emptyset$ et $\prod_v X(k_v) \neq \emptyset$, la condition ci-dessus est satisfaite. Sansuc [**47**] a ainsi établi que cette obstruction est la seule pour la classe $\mathcal{C}$ des (compactifications lisses des) espaces principaux homogènes sous un groupe linéaire connexe sans facteur de type E_8.

Manin [**36**] a aussi interprété et partiellement généralisé les exemples de Châtelet [**5**] au moyen de l'équivalence de Brauer sur $X(k)$ (obtenue par accouplement avec $\operatorname{Br} X$). Mais au moins pour les variétés rationnelles, ses résultats sont couverts par la méthode de la descente décrite ci-dessous. Rappelons la définition qu'il a introduite dans ce contexte: deux k-points P et Q d'une k-variété Y sont R-équivalents s'il existe une suite finie $P = P_0, \dots, P_i, P_{i+1}, \dots, P_n = Q$ de points de $Y(k)$ telle que pour tout i, P_i et P_{i+1} appartiennent à $\varphi_i(U_i(k))$, pour φ_i un k-morphisme d'un ouvert U_i de $\mathbf{P}^1_k$ vers Y.

2.2. *Le programme de la descente* [**10, 11**]. Soit S un k-tore, $\hat{S}$ son groupe des caractères, qui est un $\mathfrak{g}$-module $\mathbf{Z}$-libre de type fini. Si X est une k-variété, les torseurs sur X sous S sont classifiés par le groupe de cohomologie étale $H^1(X, S)$, et l'homomorphisme naturel $\chi\colon H^1(X,S) \to \operatorname{Hom}_{\mathfrak{g}}(\hat{S}, \operatorname{Pic} \overline{X})$ associe à la classe de tout torseur son *type*. Supposons désormais que X est une k-variété propre et lisse rationnelle. On peut considérer le k-tore S_0 tel que $\hat{S}_0 = \operatorname{Pic} \overline{X}$ puisque ce dernier $\mathfrak{g}$-module est alors $\mathbf{Z}$-libre de type fini. On appelle *torseur universel* un torseur sur X sous S_0 dont le type est *l'identité* de $\hat{S}_0$. Tout torseur $\mathcal{T}$ sur X définit par spécialisation une application $\theta_{\mathcal{T}} : X(k) \to H^1(k, S)$ qui associe à un k-point P la classe de la fibre $\mathcal{T}(P)$ de $\mathcal{T}$ en P. Cette classe est triviale si et seulement s'il existe un k-point sur la k-variété $\mathcal{T}$ qui s'envoie sur P par la projection structurale $p_{\mathcal{T}} : \mathcal{T} \to X$. Tordre un torseur $\mathcal{T}$ par l'opposé d'un élément $\alpha \in H^1(k,S)$ définit un torseur $\mathcal{T}^\alpha$ de même type. Etant donné un type $\lambda \in \operatorname{Hom}_{\mathfrak{g}}(\hat{S}, \operatorname{Pic} \overline{X})$, on a la décomposition (union disjointe):

$$X(k) = \bigcup_{\mathcal{T} \text{ de type } \lambda} p_{\mathcal{T}}(\mathcal{T}(k)) = \bigcup_{\alpha \in H^1(k,S)} p_{\mathcal{T}^\alpha}(\mathcal{T}^\alpha(k)),$$

où l'on peut se contenter d'écrire la réunion sur les α dans l'image de $\theta_{\mathcal{T}}$.

THÉORÈME 7. *Cette décomposition est plus grossière que la décomposition en classes pour la R-équivalence. La décomposition associée aux torseurs universels est plus fine que celle associée à tout autre type, et elle est plus fine que l'équivalence de Brauer. Elle est finie si k est un corps de nombres. Sous cette même hypothèse, si $X(k_v) \neq \emptyset$ pour toute place v de k et s'il n'y a pas d'obstruction de Manin au principe de Hasse pour X, pour tout type λ il existe un torseur $\mathcal{T}$ de ce type avec $\mathcal{T}(k_v) \neq \emptyset$ pour toute place v.*

La démonstration de ce théorème utilise en particulier les théorèmes de dualité de Tate-Nakayama en théorie du corps de classes.

L'étude des points rationnels sur X est ainsi ramenée à l'étude des points rationnels sur certaines variétés auxiliaires, en principe plus simples:

THÉORÈME 8. *Sur les (k-compactifications lisses des) torseurs universels (lesquels sont des k-variétés rationnelles) les obstructions tant à la k-rationalité (Théorème* 6*) qu'au principe de Hasse (obstruction de Manin) liées au module de Picard disparaissent.*

Etant données une classe $\mathcal{C}$ de k-variétés propres et lisses rationnelles, on considère alors les deux hypothèses fondamentales:

(H1) *Les torseurs universels sur X dans $\mathcal{C}$ qui possèdent un point k-rationnel sont des k-variétés k-rationnelles.*

(H2) *Si k est un corps de nombres, le principe de Hasse vaut pour les torseurs universels sur X dans $\mathcal{C}$.*

Si ces deux hypothèses valent, le programme de la descente réussit parfaitement: l'arithmétique des variétés de la classe $\mathcal{C}$ est alors essentiellement connue, au moins d'un point de vue qualitatif [**11**]. L'obstruction de Manin au principe de Hasse sur une variété X de $\mathcal{C}$ est alors la seule obstruction possible, et $X(k)$ se découpe en un nombre fini de classes pour la R-équivalence, chacune paramétrée par les k-points d'une k-variété k-rationnelle.

Pour essayer d'établir (H1) ou (H2), il est important d'avoir des équations concrètes des torseurs universels: on dispose pour cela d'"équations locales" qui permettent de les représenter comme des produits fibrés convenables.

2.3. *Les résultats.*

2.3.1. *Les tores* [**12**, **11**, **15**, **56**, **52**]. Si X est une k-compactification lisse d'un k-tore T, on dispose de la suite exacte de $\mathfrak{g}$-modules $\mathbf{Z}$-libres de type fini de Voskresenskiĭ [**53**, **56**]:

$$0 \to \hat{T} \to \mathrm{Div}_\infty \overline{X} \to \mathrm{Pic}\, \overline{X} \to 0,$$

et de la suite duale de k-tores: $1 \to S \to P \to T \to 1$.

La description locale des torseurs universels révèle que le torseur sur T sous S défini par cette suite est la restriction à l'ouvert $T \subset X$ du torseur universel sur X trivial en $0 \in T(k)$. Comme P est un tore quasi-trivial (dual du $\mathfrak{g}$-module de permutation défini par les diviseurs à support hors de T), on conclut que $\mathcal{T}$ est une k-variété k-rationnelle. Un argument similaire vaut pour les autres torseurs universels, qui ici possèdent tous un k-point. Le programme de la descente réussit ici parfaitement, et mène à l'isomorphisme $T(k)/R \simeq H^1(k, S)$ qui permet de calculer effectivement la R-équivalence (finie si k est un corps de nombres) sur $T(k)$.

2.3.2. *Les surfaces de Châtelet généralisées* [**16**, **8**]. Il s'agit des modèles propres et lisses des surfaces d'équation affine (2), généralisant $(1)_{2,2,3}$ et $(1)_{2,2,4}$:

$$y^2 - az^2 = P(x) \qquad (a \in k^*), \tag{2}$$

où $P(x)$ est un polynôme séparable de degré 3 ou 4. On trouvera dans [**17**] une description de nombreux modèles naturels, singuliers ou non, de ces surfaces. Du point de vue de la classification du §1, ce sont les surfaces rationnelles non triviales les plus simples (fibrations en coniques au-dessus de $\mathbf{P}^1_k$, de degré 4 et possédant une section sur une extension quadratique de k).

Dans [**16**], en collaboration avec Swinnerton-Dyer, on établit (H1) et (H2) pour ces surfaces. Pour cela, on montre en utilisant les équations locales des torseurs universels que ce sont essentiellement des intersections de deux quadriques dans $\mathbf{P}^7_k$, intersections qui possèdent une paire de sous-espaces linéaires gauches conjugués. Un argument géométrique facile donne alors (H1). Pour (H2), on établit le principe de Hasse sur une intersection de deux quadriques dans $\mathbf{P}_k^n$ ($n \geq 4$) possédant une paire de droites conjuguées, et n'étant pas d'un type exceptionnel si $n = 5$, en se réduisant au cas connu $n = 4$ par *sections hyperplanes* définies sur k et contenant les deux droites. Ce processus, où l'on doit conserver l'hypothèse d'existence de solutions locales partout, est un peu délicat (il y a des contre-exemples pour $n = 5$). On le mène à bien par une analyse très précise des équations.

Une méthode très différente, développée avec D. Coray [**8**], permet d'établir le principe de Hasse pour certaines intersections de deux quadriques et avait donné les premiers résultats arithmétiques sur les équations (2). Cette méthode est fondée sur la théorie des formes quadratiques sur $k(t)$ et sur un théorème de Amer et Brumer.

L'arithmétique des surfaces (2) est ainsi parfaitement comprise. Ainsi:

THÉORÈME 9. *Si $P(x)$ est un polynôme irréductible du $4^{\text{ème}}$ degré, l'équation (2) satisfait le principe de Hasse.*

En utilisant ce nouveau cas du principe de Hasse comme constituant élémentaire dans la technique des *sections hyperplanes*, ainsi que le théorème d'irréductibilité de Hilbert, on montre:

THÉORÈME 10. *Deux formes quadratiques en au moins neuf variables sur un corps de nombres k totalement imaginaire ont un zéro commun non trivial.*

Si le corps de nombres k est réel, les obstructions de nature réelle à l'existence d'un zéro commun sont, à des détails techniques près, les seules.

Coray et Tsfasman [**17**] ont établi que l'arithmétique des surfaces cubiques singulières non coniques et des intersections singulières non coniques de deux quadriques dans $\mathbf{P}_k^4$ se ramène à celle des surfaces rationnelles lisses de degré $d \geq 5$ ou à celle des surfaces de Châtelet généralisées: ainsi l'arithmétique de telles surfaces est aussi parfaitement comprise.

2.4. *Les perspectives.* L'hypothèse (H1) ne vaut pas toujours pour $\dim X > 2$, mais la question est ouverte en dimension deux, où le $\mathfrak{g}$-module $\operatorname{Pic} \overline{X}$ semble fournir un grand contrôle de X (§3). Notons néanmoins que (H1) implique la k-unirationalité des surfaces X avec $X(k) \neq \emptyset$! Faute de pouvoir établir d'emblée (H1) ou (H2) pour toutes les surfaces rationnelles, la première tâche est d'étudier ces questions sur les classes les plus simples de surfaces rationnelles.

2.4.1. Sur une fibration en coniques standard quelconque $X/\mathbf{P}_k^1$ de degré $8 - r$, l'étude des torseurs universels se ramène à celle de certaines intersections de $r - 2$ quadriques dans $\mathbf{P}_k^{2r-1}$ [**10**]. Pour $r = 4$, ceci a déjà permis d'obtenir d'autres résultats [**41**], en particulier la finitude de la R-équivalence [**10**]. Pour pouvoir aller plus loin, il faudrait connaître le principe de Hasse "lisse" pour les intersections non coniques de deux quadriques dans $\mathbf{P}_k^7$. Le cas $r = 5$, qui correspond aux surfaces cubiques lisses avec une droite définie sur k, mène à des intersections de 3 quadriques dans $\mathbf{P}_k^9$.

2.4.2. En utilisant comme constituant élémentaire les surfaces cubiques avec exactement trois points singuliers conjugués (Skolem, cf. [**17**]) on peut développer la méthode des sections hyperplanes comme dans [**16**]: on peut ainsi établir le principe de Hasse lisse pour la plupart des hypersurfaces cubiques possédant trois points singuliers conjugués, et développer sur les hypersurfaces d'équation affine $N_{K/k}(x+\omega y+\omega^2 z)=P(t)$, où $K=k(\omega)$ est une extension cubique de k et $P(t)$ est un polynôme de degré 2 ou 3, une théorie analogue à celle des surfaces de Châtelet généralisées (travail en préparation avec P. Salberger).

2.4.3. Il est souhaitable de calculer explicitement l'obstruction de Manin dans des exemples concrets. C'est facile dans le cas $(1)_{2,2,n}$, et dans ce cas on a établi, pour $k=\mathbf{Q}$, un lien entre (H2) et l'hypothèse de Schinzel sur les premiers représentés par des polynômes [**14**]. Dans le cas $(1)_{3,3,3}$ (surfaces cubiques diagonales sur $\mathbf{Q}$), c'est moins facile, mais cela a été mené à bien avec D. Kanevsky dans [**9**]. Ceci a permis des calculs numériques (M. Vallino) qui ont conforté l'hypothèse que l'obstruction de Manin au principe de Hasse pour $(1)_{3,3,3}$ est la seule. Il en serait ainsi si certaines intersections très particulières de deux hypersurfaces cubiques dans $\mathbf{P}^8_k$ satisfaisaient le principe de Hasse [**9**].

2.4.4. Si l'obstruction de Manin au principe de Hasse pour les intersections lisses de deux quadriques dans $\mathbf{P}^4_k$ était la seule, on en déduirait par la méthode des sections hyperplanes que le principe de Hasse vaut pour les intersections lisses de deux quadriques dans $\mathbf{P}^n_k$ pour $n\geq 5$. Pour d'autres conséquences du même type, voir l'exposé de Kanevsky [**28**].

3. Groupe de Chow et K-théorie. On note $\mathrm{CH}_0(X)$ le groupe de Chow des 0-cycles (combinaisons linéaires à coefficients entiers de points fermés) modulo l'équivalence rationnelle sur une k-variété X et, si X est propre, on note $A_0(X)$ le sous-groupe des classes de 0-cycles de degré 0.

3.1. *Surfaces rationnelles.* S. Bloch [**2**] montra comment la cohomologie galoisienne du complexe des sections sur $\overline{X}$ de la résolution de Quillen du faisceau $\mathcal{K}_2$ donne naissance, lorsque X est une k-surface rationnelle propre et lisse, à une suite exacte

$$\cdots \to H^1(\mathfrak{g}, K_2\overline{k}(X)) \to A_0(X) \xrightarrow{\Phi} H^1(k, S_0) \to \cdots \tag{3}$$

où S_0 est le k-tore dual de $\operatorname{Pic}\overline{X}$ (l'homomorphisme caractéristique Φ n'est pas sans rapport avec les torseurs universels, voir [**13**]). Des arguments de bonne réduction montrent alors que si k est un corps de nombres, Φ a une image finie, et des résultats de Merkur'ev/Suslin [**38**] impliquent [**6**] que le groupe $H^1(\mathfrak{g}, K_2\overline{k}(X))$ est nul pour toute k-variété X possèdant un k-point lisse, et que Φ est toujours injective si k est un corps de nombres: *le groupe $A_0(X)$ est donc fini pour toute surface rationnelle définie sur un corps de nombres* (résultat obtenu d'abord par Bloch [**2**] pour X fibrée en coniques sur $\mathbf{P}^1_k$, via des techniques de formes quadratiques). Un résultat de finitude similaire vaut si k est un corps local, et le groupe $A_0(X)$ est alors nul si X a bonne réduction.

Les dualités locales et globales de Tate-Nakayama permettent d'intégrer la flèche diagonale $H^1(k,S_0)\to\coprod_v H^1(k_v,S_0)$, de noyau $Ш^1(k,S_0)$ (v parcourt

les places de k), dans une longue suite exacte. Sansuc et moi-même [**13**, **48**] conjecturons que, via Φ, cette suite induit une suite exacte de groupes finis:
(H3) $0 \to Ш^1(k, S_0) \to A_0(X) \xrightarrow{\iota} \coprod_v A_0(X_v) \to \mathrm{Hom}(H^1(\mathfrak{g}, \mathrm{Pic}\,\overline{X}), \mathbf{Q}/\mathbf{Z})$.
Cette conjecture assurerait que le groupe global $A_0(X)$ est gros dès qu'il en est ainsi de la somme des groupes locaux (les termes extrêmes étant peu affectés par l'arithmétique de la surface). Si $X(k)$ est non vide, (H2) (§2) donne pour $\mathrm{Ker}\,\iota$ la valeur prédite par (H3). Dans [**16**], on établit en fait toute la conjecture (H3) pour les surfaces de Châtelet généralisées X avec $X(k) \neq \emptyset$, en utilisant en outre un résultat d'effectivité sur les 0-cycles de degré ≥ 1 ([**7**], voir aussi [**39**] pour une démonstration via (4) ci-dessous et le théorème de Riemann-Roch de Witt).

Il serait intéressent de calculer les groupes locaux $A_0(X_v)$ en fonction de la mauvaise réduction de X_v (travaux en cours de Bloch, Coombes, Muder).

3.2. *Généralisations.*

3.2.1. Soit Y un schéma de Dedekind intègre de corps des fonctions K, à corps résiduels parfaits, soit A une algèbre simple centrale sur K, d'indice n et soit Λ un faisceau d'ordres héréditaires dans A. Le groupe des classes $\mathrm{Cl}(\Lambda)$ est le sous-groupe de rang 0 du groupe de Grothendieck $K_0^{lf}(\Lambda)$ des Λ-modules $\mathcal{O}_Y$-cohérents localement libres. Lorsque $n = 2$, on associe à Λ une fibration en coniques standard X_Λ sur Y, et Salberger [**39**] a établi un isomorphisme

$$\mathrm{CH}_0(X_\Lambda) \simeq \mathrm{Cl}(\Lambda) \tag{4}$$

qui doit admettre des généralisations pour $n > 2$. Si k est un corps de nombres, $n = 2$ et Y est la droite affine $\mathbf{A}_k^1$, le résultat de finitude indiqué plus haut implique alors que $\mathrm{Cl}(\Lambda)$ est *fini*. Dans [**40**], en ayant recours à la première définition de la K-théorie pour définir un nouvel homomorphisme caractéristique ainsi qu'à un résultat de Merkur'ev/Suslin, Salberger montre que ce résultat de finitude s'étend au cas où $Y = \mathbf{A}_k^1$ et où $n > 2$ est sans facteur carré.

3.2.2. Lorsque k est un corps de nombres, une conjonction de la méthode de Bloch et d'un résultat récent de K. Kato sur la cohomologie étale des courbes a permis à M. Gros [**21**] et à T. Ôkochi de montrer que le groupe $A_0(X)$ est un groupe de type fini quand X est une surface fibrée en coniques au-dessus d'une courbe de genre quelconque. La méthode devrait permettre d'étendre le résultat de génération finie de 3.2.1 au cas où la courbe de base Y est une courbe lisse affine quelconque.

3.2.3. Le groupe $A_0(X)$ est fini si X est projective et lisse sur un corps fini (Kato, Saito) et il est nul si X est rationnelle (Bloch). Pour certaines surfaces X sur k p-adique, on dispose de résultats de finitude pour $A_0(X)_{\mathrm{tors}}$.

4. Questions de rationalité en géométrie algébrique.

4.1. *Le problème de Zariski.* On dit qu'une k-variété intègre X de dimension d est stablement k-rationnelle s'il existe un entier n que $X \times_k \mathbf{P}_k^n$ soit k-birationnel à $\mathbf{P}_k^{n+d}$. C'était une question de Zariski (1949) de savoir si toute telle k-variété est déjà k-rationnelle. Il en est ainsi si $d = 1$ (Lüroth) ou si k est algébriquement clos et $d = 2$ (Castelnuovo). Dans l'article commun [**1**], nous montrons que la réponse est négative si $d = 2$ et k non algébriquement clos convenable, et si $d = 3$ et $k = \mathbf{C}$. Pour $d = 2$, on considère un modèle propre et lisse X de la surface de Châtelet (2) avec $a \in k^*$ non carré et $P(x)$ polynôme irréductible du $3^{\text{ème}}$ degré en x, de discriminant égal à a. Le $\mathfrak{g}$-module $\operatorname{Pic} \overline{X}$ est alors stablement de permutation, et comme on connaît (H1) (voir §2.3.2), on conclut que X est stablement k-rationnelle; le Corollaire 4 montre par ailleurs que la surface X n'est pas k-rationnelle. On obtient ainsi des exemples avec $k = \mathbf{Q}$ et $k = \mathbf{C}(t)$, auquel cas la variété de dimension 3 sur $\mathbf{C}$ définie par (2) est stablement $\mathbf{C}$-rationnelle. Dans ce dernier cas, la méthode de la jacobienne intermédiaire (Clemens/Griffiths, Mumford, Beauville) et un choix convenable du polynôme $P(x) \in \mathbf{C}(t)[x]$ montrent qu'un modèle projectif et lisse Y de la variété de dimension 3 définie par (2) n'est pas $\mathbf{C}$-rationnelle.

4.2. *Le problème de Noether: corps d'invariants d'un groupe fini.* Soit k un corps, G un groupe fini, $k(G)$ le corps des fractions de l'algèbre symétrique de la représentation régulière de G sur k, et soit $L = k(G)^G$ le corps des invariants. Le corps L est-il transcendant pur sur k? Il en est ainsi lorsque k est algébriquement clos et G abélien (Fischer, 1912). Si G est abélien et k non algébriquement clos, la réponse peut être négative (Swan [**51**, **52**], Voskresenskiĭ [**54**, **55**, **56**]). On dispose de critères très complets de rationalité dans ce cas (Endo/Miyata, Lenstra, Voskresenskiĭ) car, comme l'a remarqué Voskresenskiĭ, L n'est autre que le corps des fonctions d'un certain k-tore T_G, auquel on peut appliquer le Théorème 6. Le plus petit contre-exemple est $k = \mathbf{Q}$, $G = \mathbf{Z}/8$ qui, comme l'a remarqué Saltman [**42**, **52**], peut être ramené au fameux contre-exemple de Wang au théorème de Grunwald: le $\mathbf{Q}$-tore $T_{\mathbf{Z}/8}$ est loin d'être $\mathbf{Q}$-rationnel, car il ne satisfait pas l'approximation faible. Saltman [**42**, **43**] a exploré plus avant les liens qui relient la rationalité et les propriétés d'approximation faible, ou de relèvement (voir aussi [**15**]).

Saltman [**44**, **46**] a récemment donné une réponse négative au problème d'Emmy Noether lorsque k est algébriquement clos. Ses exemples reposent sur le groupe de Brauer "non-ramifié" $\operatorname{Br}_{\mathrm{nr}} L$ d'un corps de fonctions L ($= \operatorname{Br} X$ pour X un modèle projectif et lisse du corps de fonctions L—i.e. l'invariant utilisé par Artin/Mumford dans leur réponse négative au problème de Lüroth). L'exemple de [**46**] est un sous-produit de l'étude des groupes $\operatorname{Br}_{\mathrm{nr}} \mathbf{C}(M)^G$ pour $\mathbf{C}(M)$ le corps des fractions de l'algèbre de groupes sur $\mathbf{C}$ d'un G-module fidèle $\mathbf{Z}$-libre de type fini M. On aimerait connaître la valeur exacte de ces groupes $\operatorname{Br}_{\mathrm{nr}} \mathbf{C}(M)^G$.

4.3. *Corps d'invariants d'un groupe linéaire connexe.* Etant donné un groupe linéaire connexe G et une action linéaire presque libre de G sur un vectoriel complexe V, on peut se demander si le "quotient" V/G est une variété rationnelle. Ce problème apparaît naturellement dans l'étude de nombreux espaces de modules (Katsylo, Bogomolov, Dolgachev [**3**, **29**, **19**]). La rationalité *stable* de V/G ne dépend en fait pas de la représentation presque libre V (voir [**19**]). Elle est connue dans plusieurs cas si G est semisimple et simplement connexe (Bogomolov [**4**]). Quand G n'est pas simplement connexe, la situation est plus délicate: un cas célèbre sans réponse est celui de l'action de PGL_n sur les paires de matrices (n, n), définie par $g(A, B) = (gAg^{-1}, gBg^{-1})$ (problème du centre de l'algèbre à division générique). En utilisant une réduction due à Procesi et Formanek on a pu montrer [**45**, **15**] que le groupe de Brauer non-ramifié du quotient est trivial si bien que la méthode d'Artin/Mumford ne saurait donner la réponse.

Il serait temps d'essayer de calculer effectivement, tant sur les exemples de Saltman que sur le centre de l'algèbre à division générique, les invariants birationnels cohomologiques supérieurs proposés par Grothendieck [**22**, §9].

Je remercie Jean-Jacques Sansuc pour sa constante collaboration.

BIBLIOGRAPHIE

1. A. Beauville, J.-L. Colliot-Thélène, J.-J. Sansuc et Sir Peter Swinnerton-Dyer, *Variétés stablement rationnelles non rationnelles*, Ann. of Math. **121** (1985), 283–318.

2. S. Bloch, *On the Chow groups of certain rational surfaces*, Ann. Sci. École Norm. Sup. (4) **14** (1981), 41–59.

3. F. A. Bogomolov and P. I. Katzylo, *Rationalité de quelques variétés quotients*, Mat. Sb. **126** (1985), 584–589=Math. USSR-Sb. **54** (1986), 571–576.

4. F. A. Bogomolov, *Rationalité stable des espaces-quotients des groupes simplement connexes*, Mat. Sb. **130** (1986), 3–17.

5. F. Châtelet, *Points rationnels sur certaines courbes et surfaces cubiques*, Enseign. Math. (2) **5** (1959), 153–170.

6. J.-L. Colliot-Thélène, *Hilbert's theorem* 90 *for* K_2, *with application to the Chow groups of rational surfaces*, Invent. Math. **71** (1983), 1–20.

7. J.-L. Colliot-Thélène et D. Coray, *L'équivalence rationnelle sur les points fermés des surfaces rationnelles fibrées en coniques*, Compositio Math. **39** (1979), 301–332.

8. J.-L. Colliot-Thélène, D. Coray et J.-J. Sansuc, *Descente et principe de Hasse pour certaines variétés rationnelles*, J. Reine Angew. Math. **320** (1980), 150–191.

9. J.-L. Colliot-Thélène, D. Kanevsky et J.-J. Sansuc, *Arithmétique des surfaces cubiques diagonales*, Lecture Notes in Math. (G. Wüstholz, ed.), Springer-Verlag (à paraître).

10. J.-L. Colliot-Thélène et J.-J. Sansuc, C. R. Acad. Sci. Paris Sér. A-B **282** (1976), A1113–A1116; **284** (1977), A967–A970, A1215–A1218; **303** (1986), I303–I306.

11. ———, *La descente sur les variétés rationnelles*, Journées de Géométrie Algébrique d'Angers (A. Beauville, éd.), Sijthoff and Noordhoff, Alphen aan den Rijn, 1980, pp. 223–237; *La descente sur les variétés rationnelles*. II, Duke Math. J. **54** (1987) (à paraître).

12. ———, *La R-équivalence sur les tores*, Ann. Sci. École Norm. Sup. (4) **10** (1977), 175–229.

13. ———, *On the Chow groups of certain rational surfaces: a sequel to a paper of S. Bloch*, Duke Math. J. **48** (1981), 421–447.

14. ———, *Sur le principe de Hasse et l'approximation faible, et sur une hypothèse de Schinzel*, Acta Arith. **41** (1982), 33–53.

15. ———, *Principal homogeneous spaces under flasque tori, applications*, J. Algebra **106** (1987), 148–205.

16. J.-L. Colliot-Thélène, J.-J. Sansuc and Sir Peter Swinnerton-Dyer, *Intersections of two quadrics and Châtelet surfaces*, J. Reine Angew. Math. I, **373** (1987), 37–107; II, **374** (1987), 72–168 (cf. C. R. Acad. Sci. Paris Sér. I Math. **298** (1984), 377–380).

17. D. F. Coray and M. A. Tsfasman, *Arithmetic on singular Del Pezzo surfaces*, Proc. London Math. Soc. (to appear).

18. M. Demazure, *Surfaces de Del Pezzo*. II, III, IV, V, Séminaire sur les Singularités des Surfaces, Lecture Notes in Math., vol. 777, Springer-Verlag, 1980, pp. 23–69.

19. I. Dolgachev, *Rationality of fields of invariants*, Proceedings of the 1985 Bowdoin Conference on Algebraic Geometry.

20. F Enriques, *Sulle irrazionalità da cui può farsi dipendere la risoluzione d'un' equazione algebrica $f(x,y,z)=0$ con funzioni razionali di due parametri*, Math. Ann. **49** (1897), 1–23.

21. M. Gros, *0-cycles de degré 0 sur les surfaces fibrées en coniques*, J. Reine Angew. Math. **373** (1987), 166–184.

22. A. Grothendieck, *Le groupe de Brauer*, III : *Exemples et compléments*, Dix Exposés sur la Cohomologie des Schémas, North-Holland, Amsterdam; Masson, Paris, 1968.

23. V. A. Iskovskih, *Surfaces rationnelles avec un pinceau de courbes rationnelles*, Mat. Sb. **74** (1967), 608–638=Math. USSR-Sb. **3** (1967), 563–587.

24. ——, *Surfaces rationnelles avec un pinceau de courbes rationnelles dont le carré de la classe canonique est positif*, Mat. Sb. **83** (1970), 90–119=Math. USSR-Sb. **12** (1970), 91–117.

25. ——, *Propriétés birationnelles des surfaces de degré 4 dans* $\mathbf{P}_k^4$, Mat. Sb. **88** (1972), 31–37=Math. USSR-Sb. **17** (1972), 575–577.

26. ——, *Modèles minimaux des surfaces rationnelles sur les corps quelconques*, Izv. Akad. Nauk SSSR Ser. Mat. **43** (1979), 19–43=Math. USSR-Izv. **14** (1980), 17–39.

27. ——, *Générateurs et relations dans le groupe des automorphismes birationnels de deux classes de surfaces rationnelles*, Trudy Mat. Inst. Steklov. **165** (1984), 67–78=Proc. Steklov Inst. Math. **3** (1985), 73–84.

28. D. Kanevsky, *Applications of the conjecture on the Manin obstruction to various diophantine problems*, Journées Arithmétiques de Besançon (juin 1985), Astérisque **147-148** (1987), 307–314.

29. P. I. Katsylo, *Rationalité des espaces de modules de courbes hyperelliptiques*, Izv. Akad. Nauk SSSR Ser. Mat. **48** (1984), 705-710=Math. USSR-Izv. **25** (1985), 45–50.

30. B. È. Kunyavskiĭ and M. A. Tsfasman, *Zéro-cycles sur les surfaces rationnelles et tores de Néron-Severi*, Izv. Akad. Nauk SSSR Ser. Mat. **48** (1984), 631–654=Math. USSR-Izv. **24** (1985), 583–603.

31. B. È. Kunyavskiĭ, A. N. Skorobogatov and M. A. Tsfasman, *Combinatoire et géométrie des surfaces de Del Pezzo de degré* 4, Uspekhi Mat. Nauk **40** (1985), 145–146=Russian Math. Surveys **40** (1985), 131–132.

32. Yu. I. Manin, *Rational surfaces and Galois cohomology*, Actes du Congrès Intern. Math. (Moscou, 1966), Izdat. "Mir", Moscou, 1968, pp. 495–509.

33. ——, *Surfaces rationnelles sur les corps parfaits*, Inst. Hautes Études Sci. Publ. Math. **30** (1966), 55–113=Transl. Amer. Math. Soc. (2) **84** (1969), 137–186.

34. ——, *Surfaces rationnelles sur les corps parfaits*. II, Mat. Sb. **72** (1967), 161–192=Math. USSR-Sb. **1** (1967), 141–168.

35. ——, *Le groupe de Brauer-Grothendieck en géométrie diophantienne*, Actes du Congrès Intern. Math. (Nice, 1970), Gauthier-Villars, Paris, 1971, Tome 1, pp. 401–411.

36. ——, *Formes cubiques: algèbre, géométrie, arithmétique*, Izdat. "Nauka", Moscou, 1972; trad. ang. North-Holland, Amsterdam-London, 1974, 2ème éd., 1986.

37. Yu. I. Manin and M. A. Tsfasman, *Variétés rationnelles: algèbre, géométrie, arithmétique*, Uspekhi Mat. Nauk **41** (1986), 43–94=Russian Math. Surveys **41** (1986), 51–116.

38. A. S. Merkur'ev and A. A. Suslin, *K-cohomologie des variétés de Severi-Brauer et l'application de norme résiduelle*, Izv. Akad. Nauk SSSR Ser. Mat. **46** (1982), 1011–1046=Math. USSR-Izv. **21** (1983), 307–340.

39. P. Salberger, *K-theory of orders and their Brauer-Severi schemes*, Thesis, Dept. of Math., Univ. of Göteborg, 1985.

40. ——, *Galois descent and class groups of orders*, Orders and Their Applications (I. Reiner and K. W. Roggenkamp, eds.), Lecture Notes in Math., vol. 1142, Springer-Verlag, 1985.

41. ——, *Sur l'arithmétique de certaines surfaces de Del Pezzo*, C. R. Acad. Sci. Paris **303** (1986), I273–I276.

42. D. J. Saltman, *Generic Galois extensions and problems in field theory*, Adv. in Math. **43** (1982), 250–283.

43. ——, *Retract rational fields and cyclic Galois extensions*, Israel J. Math. **47** (1984), 165–215.

44. ——, *Noether's problem over an algebraically closed field*, Invent. Math. **77** (1984), 71–84.

45. ——, *The Brauer group and the centre of generic matrices*, J. Algebra **97** (1985), 53–67.

46. ——, *Multiplicative field invariants*, J. Algebra **106** (1987), 221–238.

47. J.-J. Sansuc, *Groupe de Brauer et arithmétique des groupes algébriques linéaires sur un corps de nombres*, J. Reine Angew. Math. **327** (1981), 12–80.

48. ——, *A propos d'une conjecture arithmétique sur le groupe de Chow d'une surface rationnelle*, Sém. de Théorie des Nombres de Bordeaux, 1981–1982, Exp. 33.

49. B. Segre, *The rational solutions of homogeneous cubic equations in four variables*, Math. Notae **11** (1951), anno II, 1–68.

50. A. N. Skorobogatov, *Invariants birationnels des surfaces rationnelles*, Mat. Zametki **39** (1986), 736–746=Math. Notes **39** (1986), 404–408.

51. R. G. Swan, *Invariant rational functions and a problem of Steenrod*, Invent. Math. **7** (1969), 148–158.

52. ——, *Noether's problem in Galois theory* (Bhama Srinivasan and Judith Sally, eds.), Springer-Verlag, 1983, pp. 21–40.

53. V. E. Voskresenskiĭ, *Propriétés birationnelles des groupes algébriques linéaires*, Izv. Akad. Nauk SSSR Ser. Mat. **34** (1970), 3–19=Math. USSR-Izv. **4** (1970), 1–17.

54. ——, *Sur la question de la structure du sous-corps des invariants d'un groupe cyclique d'automorphismes du corps* $\mathbf{Q}(x_1, \dots, x_n)$, Izv. Akad. Nauk SSSR **34** (1970), 366–375=Math. USSR-Izv. **4** (1970), 371–380.

55. ——, *Quelques problèmes de géométrie birationnelle des tores algébriques*, Proc. Internat. Congr. Math. (Vancouver, 1974), vol. 1, Canad. Math. Congress, Montreal, Quebec, 1975, pp. 343–347.

56. ——, *Tores algébriques*, "Nauka", Moscou, 1977.

CENTRE NATIONAL DE LA RECHERCHE SCIENTIFIQUE, MATHÉMATIQUES, BÂTIMENT 425, UNIVERSITÉ DE PARIS-SUD, F-91405, ORSAY, FRANCE