GÉOMÉTRIE ALGÉBRIQUE. — *Cohomologie des groupes de type multiplicatif sur les schémas réguliers.* Note (*) de **Jean-Louis Colliot-Thélène** et **Jean-Jacques Sansuc**, présentée par M. Jean-Pierre Serre.

Pour X un schéma régulier connexe de corps des fonctions K et S un X-groupe de type multiplicatif de type fini, on étudie, en cohomologie fppf et pour $i=1, 2$, les restrictions $H^i(X, S) \to H^i(U, S_U)$ à un ouvert U et $H^i(X, S) \to H^i(K, S_K)$. On généralise des résultats connus pour S le groupe multiplicatif $\mathbf{G}_m$, par exemple l'injection du groupe de Brauer de X dans celui de K.

We describe how the first and second flat cohomology groups over a connected regular scheme with values in a multiplicative group of finite type behave when going over to the generic point or to an open set. Our results extend known facts about the Picard and Brauer groups of such a scheme.

1. Rappels et notations. — Tous les schémas considérés sont noethériens. Un schéma X est appelé *géométriquement localement factoriel*, noté g. l. f., si tout schéma étale sur X est localement factoriel, ce qui, d'après Auslander-Buchsbaum, est le cas si X est régulier. Pour les propriétés des tores et des groupes de type multiplicatif (toujours supposés de type fini), nous renvoyons aux exposés de Grothendieck (1). Les notations $H^i(X_{Zar}, F)$, $H^i(X_{ét}, F)$, $H^i(X, F)$ désignent les groupes de cohomologie d'un faisceau abélien F sur le site Zariski, étale, fppf d'un schéma X. Par revêtement, on entend un morphisme fini, plat et surjectif. Étant donné un groupe de type multiplicatif S sur un schéma X, on note $\hat{S} = \mathcal{H}om_{X\text{-groupe}}(S, \mathbf{G}_{m\,X})$. On utilise tacitement les isomorphismes

$$H^1(X, S) \simeq \mathrm{Ext}^1_{X_{fppf}}(\hat{S}, \mathbf{G}_{m\,X}) \simeq \mathrm{Ext}^1_{X_{ét}}(\hat{S}, \mathbf{G}_{m\,X}).$$

Un X-tore T est dit quasi trivial s'il existe un nombre fini de revêtements étales $X_i \to X$ du schéma X tels que T soit isomorphe au produit des X-tores $R_{X_i/X}\,\mathbf{G}_{m\,X_i}$, obtenus par descente à la Weil. Étant donné un schéma g. l. f. intègre X, $i_K : \mathrm{Spec}\,K \to X$ l'injection du point générique, $i_x : \mathrm{Spec}\,\varkappa(x) \to X$ l'injection d'un point x de X et $X^{(1)}$ l'ensemble des points x de X dont l'anneau local est de dimension 1, on dispose (2) de la suite exacte de faisceaux sur $X_{ét}$:

$$(1) \qquad 0 \to \mathbf{G}_{m,X} \to i_{K*}\,\mathbf{G}_{m\,K} \to \bigoplus_{x \in X^{(1)}} i_{x*}\,\mathbf{Z} \to 0.$$

2. Propriétés locales. — Le lemme important suivant a déjà été noté par Auslander et Brumer (3) : on y désigne par B* le groupe des unités de l'anneau B.

Lemme 2.1. — *Soit* A *un anneau semi-local g. l. f. intègre de corps des fractions* K, *et soit* B/A *un revêtement étale galoisien de groupe* G. *Soit* $L = B \otimes_A K$. *La suite exacte naturelle de* G-*modules*

$$0 \to B^* \to L^* \to \mathrm{Div}\,B \to 0$$

est G-*scindable. Pour tout foncteur covariant* Φ *de la catégorie des* G-*modules dans la catégorie des ensembles,* $\Phi(B^*)$ *s'injecte dans* $\Phi(L^*)$.

Démonstration. — Comme B est localement factoriel, le G-module Div B s'identifie à une somme directe de G-modules du type $\mathbf{Z}[G/H]$, pour H sous-groupe de G. Par ailleurs, la suite spectrale de Čech, pour la cohomologie étale, le faisceau $\mathbf{G}_m$ sur le spectre de B^H et le revêtement étale galoisien B/B^H, donne l'injection $H^1(H, B^*) \hookrightarrow \mathrm{Pic}(B^H)$, et ce dernier groupe est nul car B^H est semi-local. Ainsi :

$$\mathrm{Ext}^1_G(\mathrm{Div}\,B, B^*) \simeq \mathrm{Ext}^1_G(\bigoplus_{i \in I} \mathbf{Z}[G/H_i], B^*) \simeq \prod_{i \in I} \mathrm{Ext}^1_G(\mathbf{Z}[G/H_i], B^*) \simeq \prod_{i \in I} H^1(H_i, B^*) = 0.$$

APPLICATION. — Soit K/k une extension galoisienne de corps, de groupe de Galois $\mathfrak{g}$, et soit X une k-variété algébrique géométriquement intègre; soit $K(X)$ le corps des fractions de X_K. Si X admet un k-point lisse, la flèche de $\mathfrak{g}$-modules continus $K^* \to K(X)^*$ admet une $\mathfrak{g}$-rétraction; ainsi, pour $i \geqq 0$, les applications $H^i(\mathfrak{g}, K^*) \to H^i(\mathfrak{g}, K(X)^*)$ sont injectives.

PROPOSITION 2.2. — *Soit* A *un anneau semi-local g.l.f. intègre de corps des fractions* K, *et soit* S *un* A-*groupe de type multiplicatif. Les applications naturelles*

$$H^i(A, S) \to H^i(K, S_K)$$

sont injectives pour $i=0, 1, 2$.

Indications sur la démonstration. — Soit $i=1$. Le A-groupe S est déployé par un revêtement étale galoisien connexe B/A de groupe G. Considérons, en cohomologie *fppf*, le diagramme d'inflation-restriction, où $L = B \otimes_A K$:

$$\begin{array}{ccccc} 0 \to H^1(G, \mathrm{Hom}_Z(\hat{S}(B), B^*)) & \to & H^1(A, S) & \to & H^1(B, S_B) \\ \downarrow \varphi & & \downarrow \rho & & \downarrow \rho_B \\ 0 \to H^1(G, \mathrm{Hom}_Z(\hat{S}(B), L^*)) & \to & H^1(K, S_K) & \to & H^1(L, S_L) \end{array}$$

On vérifie aisément, S_B étant diagonalisable, que ρ_B est injective. L'injectivité de ρ résulte alors de celle de φ, elle-même conséquence de 2.1 pour $\Phi = \Phi_S$ avec $\Phi_S(-) = H^1(G, \mathrm{Hom}_Z(\hat{S}(B), -))$. Soit $i=2$. Le cas où S est un A-tore quasi trivial résulte du cas $S = \mathbf{G}_m$ établi par Grothendieck [2]. En général, il existe une suite exacte

$$(2) \qquad 1 \to S \to T' \to T \to 1,$$

avec T′ un tore quasi trivial et T un tore. Les suites de cohomologie *fppf* associées, sur A et sur K, le théorème 90 de Hilbert, le résultat pour T et $i=1$ et celui pour T′ et $i=2$ donnent le résultat pour S et $i=2$.

COROLLAIRE 2.3. — *Soit* A *un anneau semi-local g.l.f. intègre de corps des fractions* K. *Soient* B_i/A $(i=1, \ldots, n)$ *des revêtements étales intègres, de corps de fractions* K_i, *et soit* N_i *la norme de* B_i *à* A. *Soient* $a_1, \ldots, a_n$ *des entiers relatifs. Si un élément* x *de* A^* *s'écrit* $\prod_{i=1}^{n} N_i(x_i^{a_i})$, *avec* $x_i \in K_i^*$, *il s'écrit aussi ainsi avec* $x_i \in B_i^*$.

Cet énoncé, qui ne s'étend pas au cas A normal, peut aussi être déduit directement de 2.1.

COROLLAIRE 2.4. — *Soit* A *un anneau semi-local g.l.f. intègre de corps des fractions* K, *avec* $2 \in A^*$. *Si une* A-*forme quadratique non dégénérée de rang* $n \leqq 4$ *a un zéro non trivial dans* K, *elle a un zéro dans* A, *dont les coordonnées engendrent* A.

Ce résultat ne s'étend pas à $n > 4$; pour A supposé de plus régulier, c'est une question ouverte [4].

3. GLOBALISATION.

PROPOSITION 3.1. — *Soit* X *un schéma g.l.f. intègre,* K *son corps des fractions, et soit* S *un* X-*groupe de type multiplicatif. La suite exacte de faisceaux sur* X_{Zar}, *définissant* $\mathscr{D}iv^S$:

$$0 \to S \to S(K) \to \mathscr{D}iv^S \to 0$$

[*où* S(K) *est considéré comme faisceau constant*] *est une résolution du faisceau Zariski défini par* S *par des faisceaux flasques.*

La démonstration utilise la suite analogue pour la topologie étale et la proposition 2.2, dans le cas $i=1$.

COROLLAIRE 3.2. — *Soient* X *et* S *comme ci-dessus, et* U *un ouvert de* X.

(i) *Pour* $i \geqq 2$, $H^i(X_{Zar}, S) = 0$.

(ii) *La restriction* $H^1(X_{Zar}, S) \to H^1(U_{Zar}, S)$ *est surjective*.

(iii) *On a la suite exacte naturelle* :

$$0 \to H^1(X_{Zar}, S) \to H^1(X, S) \to H^1(K, S_K).$$

En particulier un torseur sur X sous S qui admet une section rationnelle est localement trivial pour la topologie de Zariski. A-t-on, pour X régulier et S un X-groupe semi-simple, le même énoncé ? La réponse à cette question de Grothendieck n'est en fait connue que dans des cas très particuliers [*cf.* (4)].

DÉFINITION 3.3. — *Soit* X *un schéma normal connexe,* T *un* X-*tore déployé par un revêtement étale connexe galoisien* Y/X *de groupe* G. *On dit que* T *est un* X-tore flasque *si, pour tout sous-groupe* H *de* G, *on a* $H^{-1}(H, \hat{T}(Y)) = 0$.

On vérifie que cette définition ne dépend pas du choix de Y, et qu'un tore flasque le reste par changement de base. Les tores quasi triviaux sont flasques, mais ce ne sont pas les seuls. Cette notion est importante pour l'étude des tores généraux, comme l'ont montré les travaux d'Endo-Miyata, Voskresenskiĭ, et des auteurs (5).

THÉORÈME 3.4. — *Soit* X *un schéma g.l.f. intègre de corps des fractions* K, *soit* U *un ouvert non vide de* X *et soit* T *un* X-*tore flasque.*

(i) *Les restrictions* $H^1(X, T) \to H^1(U, T_U)$ *et* $H^1(X, T) \to H^1(K, T_K)$ *sont surjectives.*

(ii) *Les restrictions* $H^2(X, T) \to H^2(U, T_U)$ *et* $H^2(X, T) \to H^2(K, T_K)$ *sont injectives.*

Dans le cas local, la flèche φ du diagramme de 2.2 est un isomorphisme pour S flasque, car alors $\Phi_S(\mathrm{Div}\ B) = 0$, ce qui, joint à 2.2, donne le théorème pour X local. La suite spectrale $H^p(X_{Zar}, R^q p_* T) \Rightarrow H^n(X_{ét}, T)$ déduite de $p : X_{ét} \to X_{Zar}$ donne alors les résultats globaux en utilisant le corollaire 3.2. On peut également les obtenir directement, suivant la méthode de (2) pour $T = \mathbf{G}_m$, à partir de la suite (1) et de la suite analogue relative à U au lieu de K, en utilisant le lemme-clef suivant :

LEMME 3.5. — *Pour* T *un tore flasque sur un schéma normal connexe* X, *on a*

$$\mathrm{Ext}^1_{X_{ét}}(\hat{T}, \mathbf{Z}) = 0.$$

Remarque 3.6. — D'après 3.4. $(i)_U$, tout torseur sur U sous un X-tore flasque se prolonge à X : ceci a déjà été utilisé dans (5). L'énoncé 3.4. $(i)_K$ permet de montrer, d'une autre manière que dans (5), que pour K un corps de type fini sur le corps premier et T un K-tore flasque, $H^1(K, T)$ est fini. Les énoncés 2.2 et 3.4 (ii) généralisent des résultats d'Auslander-Goldman (6) et Grothendieck (2) sur le groupe de Brauer.

4. AUTRES PROPRIÉTÉS GLOBALES.

PROPOSITION 4.1. — *Soit* X *un schéma g.l.f. intègre de corps des fractions* K, *et* S *un* X-*groupe de type multiplicatif. On a*

$$\mathrm{Im}(H^1(X, S) \to H^1(K, S_K)) = \bigcap_{P \in X^{(1)}} \mathrm{Im}(H^1(\mathcal{O}_{X,P}, S) \to H^1(K, S_K)).$$

Ceci s'obtient par comparaison des suites d'Ext de faisceaux étales déduites de (1) et des suites analogues sur les $\mathcal{O}_{X,P}$. L'énoncé analogue avec S un X-groupe réductif est clair si la dimension de X est 1; il peut être établi dans de nombreux cas pour X régulier de dimension 2, et c'est une question ouverte pour X régulier de dimension >2.

PROPOSITION 4.2. — *Soit* A *un anneau noethérien intègre, de corps des fractions* K, *et* S *un* A-*groupe de type multiplicatif. Soit* t *une indéterminée* :

(i) *si* A *est normal*, $H^1(A, S) \simeq H^1(A[t], S)$;

(ii) *si* K *est de caractéristique zéro et* A *régulier*, $H^2(A, S) \simeq H^2(A[t], S)$.

Le (i) se ramène au cas $S = \mathbf{G}_m$. Le (ii), dans le cas d'un tore S quasi trivial, s'obtient comme l'énoncé analogue pour le groupe de Brauer (6), le cas général s'obtient alors à partir d'une suite (2).

Le contenu de cette Note fera prochainement l'objet d'un exposé détaillé.

(*) Séance du 26 juin 1978.

(1) A. GROTHENDIECK, Exposés VIII à X in *SGA* 3 (*Lecture Notes in Math.*, n° 152, Springer, Berlin, 1970).

(2) A. GROTHENDIECK, *Le groupe de Brauer II*, in *Dix exposés sur la cohomologie des schémas*, North-Holland, Amsterdam, 1968.

(3) M. AUSLANDER et A. BRUMER, *Nederl. Akad. Wetensch. Proc. Ser. A*, 71, 1968, p. 286-296.

(4) J.-L. COLLIOT-THÉLÈNE, *Formes quadratiques sur les anneaux semi-locaux réguliers*, Montpellier, 1977 (soumis à publication dans *Mémoires de la S.M.F.*).

(5) J.-L. COLLIOT-THÉLÈNE et J.-J. SANSUC, *Ann. scient. Éc. Norm. sup.*, 4e série, 10, 1977, p. 175-229.

(6) M. AUSLANDER et O. GOLDMAN, *Trans. Amer. Math. Soc.*, 97, 1960, p. 367-409.

J.-L. C.-T. : 81, *avenue du Général-Leclerc*, 75014 *Paris*;

J.-J. S. : *E.N.S.*, 45, *rue d'Ulm*, 75230 *Paris Cedex* 05.