

---

**Partiel de maths discrètes****26 octobre 2009 – Durée : 2 heures***Les documents, calculatrices et téléphones portables sont interdits.*

---

**Toutes les réponses doivent être justifiées.****Exercice 1.**

Soit  $n$  un entier naturel. Montrer que  $2n^2 + 5n + 3$  et  $n + 2$  sont premiers entre eux. Donner une relation de Bézout entre ces deux nombres.

**Exercice 2.**

- a) Soit  $a = 100\,000$ . Décomposer  $a$  en produit de nombres premiers.
- b) Soit  $n$  un entier naturel. Pour quelles valeurs de  $n$  l'entier  $4^n$  divise-t-il  $a$  ?
- c) Soit  $n$  un entier naturel. Déterminer, en fonction de  $n$ , le pgcd et le ppcm de  $4^n$  et de 14.

**Exercice 3.**

- a) Soit  $c \in \mathbb{Z}$ . Déterminer tous les couples d'entiers relatifs  $(x, y)$  tels que  $5x + 2y = c$ .
- b) En vue d'une soirée entre copains, Paul achète des pizzas à 5 euros et des paquets de chips à 2 euros. Il veut dépenser exactement 41 euros. Combien y a-t-il de solutions ? Quelle est la solution lui permettant d'acheter le plus de pizzas ?

**Exercice 4.**

Soit  $n$  un entier naturel. Montrer que 3 divise  $7^n - 1$ .

**Exercice 5.**

- a) Déterminer les restes modulo 7 de  $10, 10^2, 10^3, 10^4$  et  $10^5$ .
- b) En déduire que 111 111 est multiple de 7.

**Exercice 6.**

Déterminer tous les entiers relatifs tels que  $11x \equiv 5 \pmod{50}$ .

**Exercice 7.**

Peut-on trouver trois entiers naturels non nuls  $a, b, c$  tels que  $\text{pgcd}(a, b) = 8$ ,  $\text{pgcd}(a, c) = 15$  et  $\text{pgcd}(b, c) = 3$  ?

---

*Barème indicatif : 3 – 3 – 5 – 2 – 3 – 3*