Feuille d'exercices n°2

Exercice I

Soit k un corps. Soit $n \geq 1$. Pour $i \in \{1, \dots, n\}$, on note $\sigma_i(X_1, \dots, X_n)$ le i-ième polynôme symétrique élémentaire.

(1) Le morphisme $f \colon \mathbf{A}^n_k \to \mathbf{A}^n_k$ qui au niveau des anneaux correspond au morphisme $k[S_1, \dots, S_n] \to k[X_1, \dots, X_n]$ qui à S_i associe σ_i est-il une immersion fermée ? L'image de f est-elle fermée ?

(2) Notons $g \colon \mathbf{A}^1_k \to \mathbf{A}^n_k$ le morphisme qui au niveau des anneaux correspond au morphisme $k[X_1, \dots, X_n] \to k[X]$ défini par $X_i \longmapsto X$. Le morphisme $f \circ g$ est-il une immersion fermée ?

Exercice II (Ouverts X_f)

Soit X un schéma. Soit f une section globale de $\mathscr{O}_X$.

On note $X_f := \{x \in X, f_x \in \mathscr{O}^\times_{X,x}\}$.

(1) Déterminer X_f si $X = \mathrm{Spec}(A)$.

(2) En général, montrer que X_f est un ouvert de X.

(3) À quelle condition nécessaire et suffisante portant sur X_f est-il vrai que f appartient à $\Gamma(X, \mathscr{O}_X)^\times$?

(4) Soit U un ouvert de X. Montrer que $f_{|U}$ est inversible dans l'anneau $\Gamma(U, \mathscr{O}_U)$ si et seulement si $U \subset X_f$.

Exercice III (Plan épointé)

Soit A un anneau commutatif. On note $P := \mathbf{A}^2_A = \mathrm{Spec}(A[X, Y])$: c'est le plan affine sur A. On introduit O le (sous-schéma) fermé de P défini par l'idéal (X, Y). L'ouvert complémentaire de O dans P est noté U.

On note $D(X)$ (resp. $D(Y)$) les ouverts de P où X (resp. Y) sont inversibles.

(1) Montrer que $D(X)$ et $D(Y)$ sont contenus dans U et en constituent un recouvrement ouvert. Décrire $D(X) \cap D(Y)$.

(2) Déterminer l'anneau des sections du faisceau structural sur l'ouvert U.

(3) Que peut-on dire de l'application canonique $\Gamma(P, \mathscr{O}_P) \to \Gamma(U, \mathscr{O}_U)$.

(4) En déduire que le schéma U n'est pas affine (sauf peut-être dans un cas particulier que l'on précisera).

Exercice IV (Espace affine épointé)

On fixe $n \geq 1$.

(1) Montrer que l'espace affine $\mathbf{A}^n := \mathrm{Spec}(\mathbf{Z}[T_1, \dots, T_n])$ a la propriété que pour tout schéma X, l'ensemble des morphismes $X \to \mathbf{A}^n$ s'identifie à l'ensemble des n-uplets $(t_1, \dots, t_n)$ d'éléments de $\Gamma(X, \mathscr{O}_X)$.

On note $\mathbf{A}^n - O$ l'ouvert complémentaire du fermé $O := V(T_1, \dots, T_n)$.

(2) À quelle condition sur le n-uplet $(t_1, \dots, t_n)$ est-il vrai que le morphisme $X \to \mathbf{A}^n$ correspondant se factorise par l'ouvert $\mathbf{A}^n - O$?

(3) Comment se traduit cette condition dans le cas où X est affine ?

(4) Montrer que si A est un anneau local, alors tout morphisme $\mathrm{Spec}(A) \to \mathbf{A}^n - O$ se factorise par un des ouverts $D(T_i)$ pour $i \in \{1, \dots, n\}$.

On suppose $n \geq 2$.

(5) Construire un morphisme $\mathrm{Spec}(\mathbf{Z}) \to \mathbf{A}^n - O$ qui ne se factorise par aucun des ouverts $D(T_i)$. Ce morphisme est-il une immersion fermée ?

Exercice V (Conique)

Soit k un corps de caractéristique différente de 2. Soit $b \in k^\times$. On note :

$$q := X^2 + bY^2 - 1 \in k[X, Y]$$

On note $Q := \mathrm{Spec}(k[X, Y]/(q))$.

(1) Décrire l'ensemble $Q(k) := \mathrm{Hom}_k(\mathrm{Spec}(k), Q)$.

(2a) Soit $\lambda \in k$. Factoriser complètement le polynôme $q(x(T), y(T)) \in k[T]$ où $x(T) := 1 + T$ et $y(T) = \lambda T$.

(2b) En déduire une bijection $Q(k) - \{(1, 0)\} \simeq \{\lambda \in k, \lambda^2 \neq -b^{-1}\}$.

(3) Montrer que la bijection de la question précédente sur les k-points provient d'un isomorphisme de schémas :

$$Q - \{(1, 0)\} \simeq \mathrm{Spec}(k[\lambda, (1 + b\lambda^2)^{-1}])$$

(On considère ici λ comme une indéterminée, et on a identifié $(1, 0) \in Q(k)$ au point fermé de Q qui lui correspond.)

Exercice VI (Représentabilité)

Soit F un foncteur de la catégorie des anneaux (commutatifs) vers la catégorie des ensembles. On dit que F est représentable par un schéma affine X s'il existe un isomorphisme $F(A) \simeq \mathrm{Hom}(\mathrm{Spec}(A), X)$ fonctoriellement en A.
(1) Déterminer le schéma X_1 qui représente le foncteur $A \longmapsto A$.
(2) Déterminer le schéma X_2 qui représente le foncteur $A \longmapsto A^{\times}$.
(3) Soit $n \geq 1$. Déterminer le schéma X_3 qui représente le foncteur $A \longmapsto \{a \in A, a^n = 1\}$.
(4) Pour chacun des schémas X représentant les foncteurs des questions précédentes, déterminer $\mathrm{Hom}(T, X)$ pour tout schéma T.
(5) Dispose-t-on de morphismes canoniques $X_i \to X_j$ pour certaines valeurs de (i, j). Parmi ces morphismes, lesquels sont des immersions ouvertes, ou des immersions fermées ?
(6a) Le foncteur qui à un anneau A associe son nilradical est-il représentable par un schéma affine ?
(6b) Existe-t-il un schéma N tel que pour tout schéma T, on dispose d'une bijection fonctorielle entre $\mathrm{Hom}(T, N)$ et l'ensemble des sections localement nilpotentes du faisceau structural $\mathscr{O}_T$?

Exercice VII (Frobenius absolu)

Soit p un nombre premier. Soit X un schéma. On suppose que p est nul dans $\Gamma(X, \mathscr{O}_X)$.
(1) Montrer qu'il existe un unique morphisme $X \to \mathrm{Spec}(\mathbf{F}_p)$.
(2) Montrer qu'il existe un unique morphisme de schémas $F\colon X \to X$ qui vaille l'identité sur l'espace topologique sous-jacent et tel que pour tout ouvert U de X, l'application induite $\Gamma(U, \mathscr{O}_X) \to \Gamma(F^{-1}(U), \mathscr{O}_X) = \Gamma(U, \mathscr{O}_X)$ soit $a \longmapsto a^p$.