Analyse I
Maths 104 - Maths 104b

Thierry Ramond
Mathématiques
Université Paris Sud
e-mail: thierry.ramond@math.u-psud.fr

version du 29 août 2010

Table des matières

Chapitre 1

Nombres réels

1.1 Ensembles de nombres

Vous avez rencontré jusqu'à présent différents types de nombres : d'abord les entiers, ou entiers naturels, dès la petite enfance, puis au collège les entiers relatifs et les rationnels. Vous avez noté $\mathbb{N}$ l'ensemble des entiers, $\mathbb{Z}$ celui des entiers relatifs, et $\mathbb{Q}$ celui des rationnels. En identifiant les entiers naturels aux entiers relatifs positifs, vous avez écrit $\mathbb{N} \subset \mathbb{Z}$, puis en identifiant les entiers relatifs aux fractions rationnelles dont le dénominateur est 1, vous avez aussi écrit

$$\mathbb{N} \subset \mathbb{Z} \subset \mathbb{Q}.$$

Dans $\mathbb{Q}$ vous savez faire des additions et des soustractions, des multiplications et des divisions. Vous savez aussi comparer deux nombres rationnels quelconques.

Ça n'est pas tout.Vous avez rencontré π et $\sqrt{2}$, et on vous a dit qu'il ne s'agit pas de nombres rationnels. Vous avez alors admis l'existence d'un ensemble de nombre noté $\mathbb{R}$, dit ensemble des nombres réels, tel que $\mathbb{Q} \subset \mathbb{R}$, et dans lequel vous pouvez faire additions, soustractions, multiplications et divisions, et aussi comparer deux nombres réels quelconques.

Dans ce premier chapitre, on veut d'abord faire le point sur les règles qui régissent la manipulation des nombres réels. On veut aussi mettre l'accent sur une propriété essentielle de $\mathbb{R}$, qui n'est pas vraie dans l'ensemble $\mathbb{Q}$ des rationnels, et dont on va déduire la plupart des résultats de ce cours : la propriété de la borne supérieure.

Pour commencer, il est temps de montrer la

Proposition 1.1.1 *Il n'existe pas de nombre rationnel dont le carré est 2. Autrement dit : $\sqrt{2}$ n'est pas un rationnel.*

Preuve: On raisonne par l'absurde : supposons le contraire. Il existe une fraction irreductible $\frac{p}{q}$ telle que $2 = \frac{p^2}{q^2}$. Mais alors $p^2 = 2q^2$, donc p^2 est pair. Puisque seuls les nombres pairs ont un carré pair, p est pair et s'écrit $p = 2k$. Du coup $2q^2 = 4k^2$ donc q^2 est pair, et q est pair. C'est absurde puisque la fraction p/q est irreductible. □

Au passage, il est important de s'interroger sur ce que signifie cette "preuve", ou plus précisément sur ce que l'on entend en mathématique lorsque l'on parle de "démonstration" : à partir de propriétés déjà établies (des théorèmes) et de notions déjà définies, on déduit une nouvelle propriété en utilisant les règles de la logique mathématique. Ici par exemple, on a utilisé les notions de fraction irréductible et de nombre pair, on a utilisé la propriété "si n^2 est pair alors n est pair"... Dans ce "jeu de construction" que sont les mathématiques, il faut bien sûr avoir un socle : c'est le rôle de ce que l'on nomme **axiomes**. Un axiome est un énoncé mathématique admis une fois pour toutes, et qui n'a pas pour vocation d'être démontré. Vous avez par exemple certainement entendu parler des axiomes d'Euclide, qui fondent la géométrie euclidienne, dont le célèbre "par un point passe une et une seule droite parallèle à une droite donnée". La démarche mathématique telle que l'on vient de l'esquisser peut paraître fastidieuse. Mais il faut avoir en tête l'une des spécificités importantes des mathématiques par rapport aux autres sciences : une fois que vous avez démontré un théorème, celui-ci est vrai pour l'éternité ! [1]

Au niveau où se situe ce cours, on va voir affleurer quelques axiomes de l'analyse concernant les nombres réels : les théorèmes que nous établirons ensuite reposeront parfois directement sur ce socle. La propriété de la borne supérieure évoquée plus haut est l'un de ces axiomes.

1.2 Règles de calcul dans $\mathbb{R}$

Rappelons-le, on admet l'existence d'un ensemble $\mathbb{R}$, qu'on appelle ensemble des nombres réels, qui contient $\mathbb{Q}$. On admet aussi que l'on peut manipuler ces réels suivant certaines règles (finalement un petit nombre) que l'on énonce maintenant.

1.2.1 Somme et produit

Si a et b sont deux réels quelconques, on sait définir le réel **somme de** a **et** b, noté $a + b$, et le réel **produit de** a **et** b, noté $a \times b$. Voici les quelques règles (axiomes) qui fondent le calcul dans $\mathbb{R}$ tel que vous le pratiquez depuis toujours !

– Pour l'addition :

  Règle 1 : $a + b = b + a$ pour tous réels a et b.

  Règle 2 : $a + (b + c) = (a + b) + c$ pour tous réels a, b et c.

  Règle 3 : $a + 0 = 0 + a = a$ pour tout réel a.

  Règle 4 : Pour tout $a \in \mathbb{R}$, il existe un unique réel, noté $-a$, qui vérifie $a + (-a) = (-a) + a = 0$.

  On résume ces quatre propriétés en disant que $(\mathbb{R}, +)$ (lire : $\mathbb{R}$ muni de l'addition) est un groupe commutatif (la commutativité est la propriété énoncée dans la règle 1).

– Pour la multiplication :

  Règle 5 : $a \times b = b \times a$ pour tous réels a et b.

  Règle 6 : $a \times (b \times c) = (a \times b) \times c$ pour tous réels a, b et c.

1. Le mathématicien et logicien Kurt Gödel vient de se retourner dans sa tombe, mais nous ne raconterons pas cette histoire là maintenant. Si vous êtes curieux, interrogez votre moteur de recherche préféré...

Règle 7 : $a \times 1 = 1 \times a = a$ pour tout réel a.

Règle 8 : Pour tout $a \in \mathbb{R}^* = \mathbb{R} \setminus \{0\}$, il existe un unique réel, noté $\frac{1}{a}$, qui vérifie $a \times \frac{1}{a} = \frac{1}{a} \times a = 1$

On remarque que la multiplication dans $\mathbb{R}^*$ vérifie les mêmes quatre propriétés que l'addition dans $\mathbb{R}$: $(\mathbb{R}^*, \times)$ est aussi un groupe commutatif.

Voilà une dernière règle, que vous connaissez sous le nom de distributivité :

Règle 9 : $a \times (b + c) = (a \times b) + (a \times c)$ pout tous a, b et c dans $\mathbb{R}$.

On résume les neuf propriétés qui précèdent en disant que $(\mathbb{R}, +, \times)$ est un corps commutatif. Il faut noter qu'à ce stade, $\mathbb{R}$ et $\mathbb{Q}$ ont exactement les mêmes propriétés : $(\mathbb{Q}, +, \times)$ est aussi un corps commutatif.

1.2.2 La relation d'ordre

On sait aussi comparer deux réels quelconque a et b : on a toujours ou bien $a \leq b$, ou bien $b \leq a$. En particulier, notant $\mathbb{R}^+$ l'ensemble des réels a tels que $0 \leq a$, et $\mathbb{R}^-$ l'ensemble des réels a tels que $a \leq 0$, on voit que $\mathbb{R}$ est la réunion de $\mathbb{R}^+$ et de $\mathbb{R}^-$: tout réel est ou bien positif, ou bien négatif.

La relation d'ordre $\leq$ est compatible avec l'addition et la multiplication, dans le sens où l'on a les trois propriétés suivantes :

Règle 10 : Si $a \leq b$, alors $a + c \leq b + c$ pour tous réels a, b et c.

Règle 11 : Si $a \leq b$ et $0 \leq c$, alors $a \times c \leq b \times c$. Si $a \leq b$ et $c \leq 0$, alors $b \times c \leq a \times c$.

Règle 12 : Si $a > 0$, alors $\frac{1}{a} > 0$.

Ceratines des conséquences de ces règles doivent être soulignées :

– Supposons que $a \leq b$ et que $c \leq d$. La Règle 10 donne d'abord $a+c \leq b+c$, puis $b+c \leq b+d$, donc finalement $a + c \leq b + d$: on peut ajouter membre à membre des inégalités.
– **Attention !** on ne peut multiplier membre à membre des inégalités que lorsqu'elles ne concernent que des nombres positifs.
– Supposons que $0 < a \leq b$. La Règle 12 donne $1/a > 0$, donc la Règle 11 donne $0 < 1 \leq b \times \frac{1}{a}$. On a aussi $1/b > 0$, d'où finalement $0 < \frac{1}{b} \leq \frac{1}{a}$.

Exercice 1.2.1 *Donner un encadrement de* $\frac{x^2 - 2x}{x^2 + 6x + cos(x)}$ *pour* $x \in]3, 4[$*, puis pour* $x \in]-3, -2[$.

1.2.3 Distance dans $\mathbb{R}$: valeur absolue

Voici pour finir une notion très utile, que l'on peut définir sans ajouter de nouvel axiome. Disons d'abord que $\max\{a, b\}$ désigne le nombre a si $b \leq a$ et le nombre b sinon.

Définition 1.2.2 Pour x dans $\mathbb{R}$, on note $|x|$ le nombre réel défini par $|x| = \max\{-x, x\}$.

A partir de cette définition, et en raisonnant au cas par cas, on obtient la

Proposition 1.2.3 *Soient x et y deux réels. On a*

1. $|xy| = |x|\ |y|$
2. $||x| - |y|| \leq |x + y| \leq |x| + |y|$ *(inégalité triangulaire).*

Après la présentation "axiomatique" qui précède, il faut quand même se rappeler que l'on peut utiliser son "sens commun" quand on manipule des réels. En particulier il est commode de se représenter l'ensemble des réels comme étant l'ensemble des points d'une droite. Cette analogie ne suffit pas à comprendre toutes les propriétés des nombres réels, mais elle est tout de même parfois utile pour guider son raisonnement. Dans ce contexte, vous ne devez pas être surpris par la

Définition 1.2.4 On appelle **distance** entre deux réels a et b le nombre $d(a, b) = |a - b|$.

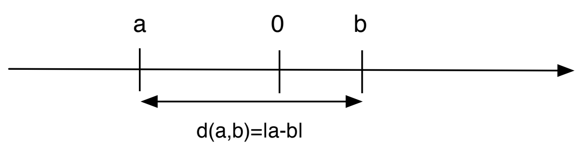


FIGURE 1.1 – La droite réelle

Exercice 1.2.5 *Montrer, en revenant à la définition de la valeur absolue, que*

$$|x - a| \leq \epsilon \Longleftrightarrow x \in [a - \epsilon, a + \epsilon].$$

1.3 Majorant, minorant, borne inférieure, borne supérieure

1.3.1 Définitions, exemples

Définition 1.3.1 Soit A une partie non-vide de $\mathbb{R}$, et m un nombre réel. On dit que

1. m est un majorant de A lorsque $a \leq m$ pour tout $a \in A$.
2. m est un minorant de A lorsque $m \leq a$ pour tout $a \in A$.

Par exemple 0 est un minorant de $\mathbb{N}$. D'ailleurs n'importe quel réel plus petit qu'un minorant de A est encore un minorant de A. On remarque aussi que puisque $0 \in \mathbb{N}$, 0 est le plus grand des minorants de $\mathbb{N}$ (... n'importe quel nombre réel supérieur strictement à 0 ne serait pas plus petit que tous les éléments de $\mathbb{N}$).

Il est surement clair pour vous que l'ensemble $\mathbb{N}$ n'a pas de majorant dans $\mathbb{R}$... pourtant cela ne découle pas des propriétés de $\mathbb{R}$ énoncées jusqu'à présent (cf. le paragraphe suivant).

Définition 1.3.2 Soit A une partie non-vide de $\mathbb{R}$, et b un nombre réel. On dit que

1. b est la borne supérieure de A lorsque b est le plus petit des majorants de A.
2. b est la borne inférieure de A lorsque b est le plus grand des minorants de A.

On a vu par exemple que 0 est la borne inférieure de $\mathbb{N}$ dans $\mathbb{R}$. Voci d'autres exemples : si $A =]0,2]$, 0 est un minorant de A, et 2 est un majorant de A. Puisque 2 est un élément de A, c'est nécessairement le plus petit des majorants, donc la borne supérieure de A, ce qu'on note : $2 = \sup\ ]0,2]$.

Il n'est pas aussi évident que 0 soit la borne inférieure de $A =]0,2]$. Supposons qu'il existe un minorant de A, qu'on note m, qui soit strictement plus grand que 0. Puisque $m > 0$, on a aussi $m > m/2 > 0$ donc $m/2 \in A$ et $m/2$ est inférieur à m, ce qui est absurde puisque m est un minorant de A. Donc 0 est bien le plus grand des minorants de A : $0 = \inf\ ]0,2]$.

Question 1 *Lesquelles des Règles 1 à 12 a-t-on utilisées dans ce raisonnement ?*

Proposition 1.3.3 *Soit A une partie non-vide de $\mathbb{R}$, et b un réel. Les deux énoncés suivants sont équivalents*

1. *b est la borne supérieure de A.*
2. *b est un majorant de A et, pour tout $\epsilon > 0$, il existe au moins un élément de A dans l'intervalle $[b-\epsilon, b]$.*

Preuve: Si b est la borne supérieure de A, c'est un majorant de A, et pour tout $\epsilon > 0$, $b - \epsilon$ n'est pas un majorant de A : il existe un élément x de A qui est supérieur à $b - \epsilon$. Puisque b est un majorant de A, on a aussi $x \leq b$, donc $x \in [b-\epsilon, b]$.
Réciproquement, si (2) est vraie, alors b est bien le plus petit des majorants de A. □

Bien entendu, si A n'admet pas de majorant, A n'a pas non plus de borne supérieure. Voilà maintenant la différence essentielle entre $\mathbb{Q}$ et $\mathbb{R}$: dans $\mathbb{R}$, c'est le seul cas où une partie (non-vide) de $\mathbb{R}$ n'a pas de borne supérieure.

1.3.2 La propriété de la borne supérieure

La propriété qui suit est elle aussi un axiome :

Règle 13 : Soit A une partie non-vide de $\mathbb{R}$.

1. Si A est majorée, alors A admet une borne supérieure.
2. si A est minorée, alors A admet une borne inférieure.

On veut insister sur le fait que cette propriété n'est pas vraie dans $\mathbb{Q}$. On considère par exemple $A = \{x \in \mathbb{Q}, x^2 \leq 2\}$. A n'est pas vide ($0 \in A$ par exemple), et majorée (par 3 par exemple). Suppose que A admette une borne supérieure $b \in \mathbb{Q}$.

Supposons que $b^2 < 2$, et considérons pour $n \in \mathbb{N}^*$ le nombre rationnel $b_n = b(1 + \frac{1}{n})$. On a $(b_n)^2 = b^2(1 + 2/n + 1/n^2) \leq b^2(1 + 3/n)$. Il est alors facile de vérifier que si $n > 3b^2/(2 - b^2)$ alors $b_n^2 < 2$. Donc $b_n > b$ et $b_n \in A$ ce qui est absurde. De la même manière, on ne peut pas avoir $b^2 > 2$, donc b est un rationnel tel que $b^2 = 2$, ce qui là encore est absurde : A n'a pas de borne supérieure dans $\mathbb{Q}$.

Le raisonnement qui précède repose sur une propriété importante de $\mathbb{Q}$: pour tout rationnel r, on peut trouver un entier n tel que $r < n$ (dans le raisonnement qui précède, $r = 3b^2/(2 - b^2)$). Cette propriété porte le nom de propriété d'Archimède, et nous allons admettre comme (dernier !) axiome que $\mathbb{R}$ vérifie aussi cette propriété.

Règle 14 : Pour tout $x \in \mathbb{R}$, il existe $n \in \mathbb{N}$ tel que $x < n$.

1.4 Propriété d'Archimède

(Pour une deuxième lecture)

1.4.1 Développement décimal d'un réel

L' autre applications immédiate de l'axiome d'Archimède est de permettre de définir la partie entière d'un réel.

Proposition 1.4.1 *Pour tout réel x, il existe un unique entier relatif n tel que $n \leq x < n + 1$. On le note $n = E(x)$: c'est la partie entière du réel x.*

Preuve: Soit pour commencer $x \in \mathbb{R}^+$, et A la partie de $\mathbb{R}$ définie par $A = \{p \in \mathbb{N}, x \geq p\}$. A n'est pas vide puisque $0 \in A$. De plus, grâce à la propriété d'Archimède, il existe un entier n tel que $x < n$: tous les éléments de A sont donc inférieurs à n : A est un ensemble fini, donc admet un élément maximum m. Par définition de A on a alors $m \leq x < m + 1$ puisque $m + 1 \notin A$.
Pour $x < 0$, on applique ce qui précède à $-x$: au total, on a alors montré que pour tout $x \in \mathbb{R}$, il existe un entier m tel que $m \leq x < m + 1$.
Il reste à voir qu'il ne peut pas y en avoir un second : supposons que l'on ait aussi $m' \leq x < m' + 1$. On aurait $-m' - 1 < -x \leq -m'$ et donc $m - m' - 1 < 0 < m - m' + 1$, ce qui, pour des entiers, entraine $m - m' = 0$. □

On peut être bien plus précis :

Proposition 1.4.2 *Soit x un réel. Pour tout $n \in \mathbb{N}$ il existe un unique entier q_n tel que*

$$\frac{q_n}{10^n} \leq x < \frac{q_n + 1}{10^n}.$$

Le rationnel $\frac{q_n}{10^n}$ est appelé **valeur approchée à 10^{-n} près par défaut** *du réel x.*

Preuve: L'entier $q_n = E(10^n x)$ convient, et c'est le seul. □

1.4.2 $\mathbb{Q}$ est dense dans $\mathbb{R}$

On a bien compris maintenant que $\mathbb{Q} \neq \mathbb{R}$. Cependant, grâce à la propriété d'Archimède, on montre que ces deux ensembles ne sont pas très différents :

Proposition 1.4.3 *$\mathbb{Q}$ est dense dans $\mathbb{R}$: tout intervalle $]a, b[$ non-vide de $\mathbb{R}$ contient au moins un rationnel.*

Preuve: Puisque $b - a > 0$, la propriété d'Archimède permet d'affirmer qu'il existe $n \in N$ tel que $n > 1/(b - a)$. Posons alors $m = E(na)$: on a $m \leq na < m + 1$, donc

$$\frac{m}{n} \leq a < \frac{m+1}{n} \leq \frac{m}{n} + \frac{1}{n} < a + (b - a) = b.$$

Le nombre rationnel $(m + 1)/n$ appartient donc a $]a, b[$. □

1.4.3 Caractérisation des intervalles

Proposition 1.4.4 *Soit A une partie non-vide de $\mathbb{R}$. Les énoncés suivants sont équivalents :*

1. *A est un intervalle.*
2. *Pour tous a, b de A, l'intervalle $[a, b]$ est inclus dans A.*

Chapitre 2

Suites de nombres

2.1 Premières notions

2.1.1 Qu'est-ce qu'une suite de nombres ?

Une suite numérique est une liste infinie de nombres. De manière plus précise

Définition 2.1.1 Une **suite numérique** est une fonction de $\mathbb{N}$ dans l'ensemble des nombres réels (ou complexes), définie sur une partie infinie de $\mathbb{N}$. Si $u : \mathbb{N} \to \mathbb{R}$ est une suite, on notera u_n le n-ième élément de la liste, c'est-à-dire le nombre $u(n)$ image de n par u. On notera aussi $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$, ou même simplement (u_n), la suite u.

Attention aux notations : u_n est un *nombre*, le terme général de la *suite* (u_n). Il ne faut pas non plus confondre la donnée de la suite (u_n) (la liste infinie...) et l'image dans $\mathbb{R}$ de l'application u, c'est à dire l'ensemble $\{u(n), n \in \mathbb{N}\}$ (les nombres réels qui figurent dans la liste). Par exemple, pour $u_n = (-1)^n$, cette image est le sous-ensemble $\{-1, 1\}$ de $\mathbb{R}$: il y a beaucoup de suites distinctes ayant cet ensemble comme image.

On peut aussi penser à des suites (u_n) de nombres complexes... Mais leur étude peut se ramener à celle de deux suites réelles $(\operatorname{Re} u_n)$ et $(\operatorname{Im} u_n)$, même s'il peut être commode de travailler directement avec la forme complexe. Nous n'en parlerons pas plus.

2.1.2 Sens de variation

On dit qu'une suite numérique **réelle** (u_n) est **croissante** ou **décroissante** lorsque la fonction u l'est, c'est à dire

$$n \geq m \Rightarrow u_n \geq u_m.$$

Il est très simple (par récurrence - voir un peu plus loin : c'est un excellent **Exercice**) d'obtenir le critère suivant, que l'on prendra comme définition :

Définition 2.1.2 Une suite numérique (u_n) est croissante si et seulement si pour tout n, $u_n \leq u_{n+1}$. Elle est décroissante si et seulement si $u_n \geq u_{n+1}$ pour tout n.

Exemple 2.1.3 *La suite (u_n) de terme général $u_n = n^2$ est croissante, alors que la suite (v_n) de terme général $v_n = 1/n$ est décroissante.*

Il existe bien sûr des suites qui ne sont ni croissantes ni décroissantes : c'est le cas par exemple de $w : n \mapsto (-1)^n$.

2.1.3 Suites majorées, minorées ou bornées

.

Définition 2.1.4 On dit qu'une suite (u_n) est **majorée** s'il existe un réel M supérieur à tous les termes de la suite :

$$\text{pour tout } n \in \mathbb{N}, u_n \leq M.$$

La suite (u_n) est dite **minorée** s'il existe un réel m inférieur à tous les termes de la suite :

$$\text{pour tout } n \in \mathbb{N}, u_n \leq m.$$

Lorsqu'une suite est majorée **et** minorée on dit qu'elle est **bornée**.

On notera qu'une suite n'est pas majorée (resp. pas minorée), lorsque, pour tout réel A donné, il existe au moins un terme de la suite plus grand (resp. plus petit) que A.

Exemple 2.1.5 *La suite $((-1)^n)$ est bornée. La suite de terme général n^2 est minorée (par 0) mais pas majorée. Supposons en effet qu'il existe $M \in \mathbb{R}$ tel que $M \geq n^2$ pour tout $n \in \mathbb{N}$. On a alors $M > 0$, donc $\sqrt{M}$ est bien défini, par exemple comme la borne supérieure de l'ensemble majoré $\{x \in \mathbb{R},\ x^2 \leq M\}$. Or il existe $n_0 \in \mathbb{N}$ tel que $n_0 > \sqrt{M}$. Mais alors $M < (n_0)^2$, ce qui est absurde.*

2.2 Suites définies par récurrence

2.2.1 Principe de la récurrence

Nous rencontrerons deux manières différentes de définir une suite, qu'il importe de reconnaître : la conduite de l'étude d'une suite diffère en effet sensiblement suivant que leur définition est d'un type ou de l'autre.

- Une suite peut-être définie de manière **explicite**, le terme général u_n de la suite étant donné comme une fonction de n : $u_n = f(n)$, où f est une fonction, disons de $\mathbb{R}^+$ dans $\mathbb{R}$. Par exemple $u : n \mapsto 2n$ est la suite des nombres pairs.
- Une suite peut également être définie par une expression **récurrente**. Le terme général u_n est alors donné comme une fonction du ou de plusieurs (un nombre fixe !) des termes qui le précédent : $u_n = f(u_{n-1}, u_{n-2}, \ldots, u_n - k)$. Par exemple on peut définir la suite (v_n) des nombres impairs par récurrence : $v_n = v_{n-1} + 2$. Il est alors indispensable de fixer les **conditions initiales** : il faut préciser ici $v_0 = 1$. Si l'on avait pris $v_0 = 0$, on aurait obtenu la suite des nombres pairs.

Est-ce que l'on définit bien ainsi une suite de nombres, c'est à dire une liste infinie ?... Pour répondre à cette question, il faut en général utiliser une propriété essentielle de l'ensemble $\mathbb{N}$ des entiers naturels :

Proposition 2.2.1 *Soit A une partie non-vide de $\mathbb{N}$, et n_0 un élément de A. Si $n+1$ appartient à A dès que n appartient à A, alors A contient $\{n \in \mathbb{N}, n \geq n_0\}$.*

On peut retenir cet énoncé en le traduisant en langage plus imagé : si n_0 appartient à A, et si la propriété d'appartenir à A est héréditaire ($n+1$ est le successeur de n), alors A contient tous les entiers supérieurs ou égaux à n_0 : vous avez reconnu le principe de la démonstration par récurrence.

Cette propriété est un des axiomes admis par les mathématiciens à propos de l'ensemble $\mathbb{N}$ des entiers naturels. Voici par exemple une définition de $\mathbb{N}$ proposée par le mathématicien italien G. Peano (1858–1932) - et adoptée implicitement par tous :
Axiomes de Peano : Il existe un triplet $\{\mathbb{N}, 0, S\}$ constitué d'un ensemble $\mathbb{N}$, d'un élément de cet ensemble noté 0 et d'une application S de $\mathbb{N}$ dans $\mathbb{N}$, vérifiant :
A1 S est injective : $S(x) = S(y) \Rightarrow x = y$.
A2 L'image de $\mathbb{N}$ par S est $\mathbb{N}\backslash\{0\}$
A3 Pour toute partie A de $\mathbb{N}$ contenant 0, si $n \in A \Rightarrow S(n) \in A$, alors $A = \mathbb{N}$
L'élément $S(n)$ est appelé successeur de n. Des deux premiers axiomes découle le caractère bijectif de l'application $S : \mathbb{N} \to \mathbb{N}\backslash\{0\}$. L'application réciproque est appelée application prédecesseur et notée : $P : \mathbb{N}\backslash\{0\} \to \mathbb{N}$. On note d'habitude 1 le successeur de 0, 2 le successeur de 1...
On peut montrer si un autre triplet $\{\mathcal{N}, e, \Sigma\}$ vérifie les axiomes de Peano, il existe une bijection θ de $\mathbb{N}$ sur $\mathcal{N}$ telle que : $\theta(0) = e$ et $\theta \circ S = \Sigma \circ \theta$. Autrement dit le triplet ci-dessus est "unique à une bijection près", et l'ensemble $\mathbb{N}$ qui figure ci-dessus est ce que l'on appelle *ensemble des entiers naturels*. Tous les théorèmes concernant les nombres entiers sont des conséquences de ces seuls trois axiomes.

On peut parfois trouver une expression explicite pour une suite définie par récurrence. Ce peut même être très simple, mais une démonstration par récurrence est toujours nécessaire.

Exercice 2.2.2 *Soit q un réel. Montrer que la suite (u_n) définie par la relation de récurrence $u_{n+1} = qu_n$ s'écrit $u_n = q^n u_0$ pour tout n. Donner une expression explicite de la suite (v_n) définie par la relation de récurrence $v_{n+1} = v_n + q$.*

Question 2 *Comment appelle-t-on ce genre de suites ?*

Il est également possible, mais c'est plus difficile, de trouver une définition explicite de la suite de Fibonacci définie par la relation de récurrence à 2 termes :

$$u_0 = 0, u_1 = 1, u_{n+2} = u_{n+1} + u_n, \quad \text{pour } n \geq 0 .$$

Question 3 *Est-ce que l'on définit bien une suite de cette manière ?*

2.2.2 Représentation graphique

La représentation graphique d'une suite réelle définie explicitement $u_n = f(n)$ est très simple : il suffit de tracer la courbe représentative de la fonction f, et d'indiquer l'image des entiers. Par contre celle d'une suite définie par récurrence est un peu plus délicate. On a tracé ci-dessous la représentation graphique de la suite (u_n) donnée par :

$$u_0 = 1, u_n = 1 + \frac{2}{u_{n-1}}, \quad n \geq 1.$$

Pour ce faire, on utilise de manière essentielle le fait que dans un repère orthonormé, la symétrie orthogonale par rapport à la première bissectrice (la droite d'équation $y = x$) transforme le point $M(a, b)$ en le point $N(b, a)$.

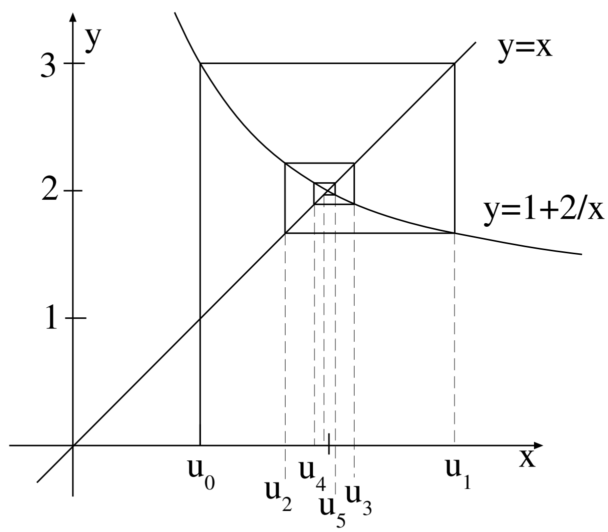


FIGURE 2.1 – Un exemple de suite récurrente

L'étude du sens de variation d'une suite est très différente suivant son mode de définition :

- Pour une suite définie explicitement, du type $u_n = f(n)$ où f est une fonction donnée, le sens de variation s'obtient facilement à partir du sens de variation de la fonction f : en général, f est définie sur un ensemble plus grand que $\mathbb{N}$ (typiquement $\mathbb{R}^+$), et on vérifie la propriété plus forte de monotonie sur cet ensemble. Par exemple, si on sait de plus que f est dérivable, on peut regarder le signe de f'.
- Dans le cas des suites récurrentes, on revient en général à la définition, et on s'intéresse au signe de la différence $u_{n+1} - u_n$. Pour une suite dont les termes sont tous strictement positifs,

on peut aussi comparer à 1 le quotient $\frac{u_{n+1}}{u_n}$. L'exemple de la suite (u_n) représenté dans la Figure 1 montre que le sens de variation d'une suite définie par une relation récurrente du type $u_n = f(u_{n-1})$ n'a qu'un rapport lointain avec le sens de variation de la fonction f.

Exemple 2.2.3 *La suite $u_n = 2^n - n$ est croissante, car*

$$u_{n+1} - u_n = 2^{n+1} - 2^n - 1 \geq 1 - 1 \geq 0 \,.$$

La suite $v_{n+1} = \sqrt{v_n}$ avec $v_0 = 4$ est décroissante car $v_n > 1$ et

$$\frac{v_{n+1}}{v_n} = \frac{1}{\sqrt{v_n}} < 1 \,.$$

Question 4 *Que pensez-vous du sens de variation de la suite $w_{n+1} = \sqrt{w_n}$ avec $w_0 = 1/4$?*

2.3 Convergence

2.3.1 Limite d'une suite

On dit qu'une suite (u_n) converge vers un réel ℓ lorsque, en dehors de n'importe quel intervalle centré en ℓ, disons de taille $\varepsilon > 0$, il n'y a pas plus d'un nombre fini, disons N_ε, de termes de la suite.

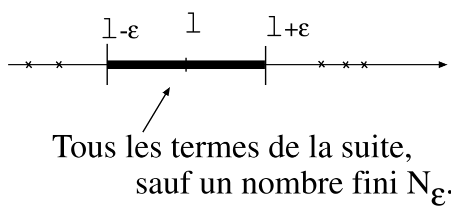


FIGURE 2.2 – Limite d'une suite

Voilà une autre manière de dire la même chose, qui est plus facile à utiliser en général.

Définition 2.3.1 On dit qu'une suite (u_n) de nombres réels a pour limite un réel ℓ donné, ou **tend vers** ℓ, ou encore **converge vers** ℓ lorsque

$$\text{pour tout } \varepsilon > 0, \text{ il existe } N_\varepsilon \in \mathbb{N} \text{ tel que } \quad n \geq N_\varepsilon \Rightarrow |u_n - l| \leq \varepsilon$$

On note alors :

$$\lim(u_n) = \ell \quad \text{ou encore} \quad \lim_{n\to\infty} u_n = \ell$$

Proposition 2.3.2 *Une suite ne peut avoir deux limites distinctes.*

Preuve: Supposons qu'une suite (u_n) admette deux limites distinctes l et l'. On peut choisir un $\varepsilon > 0$ suffisamment petit pour que les intervalles $I = [l - \varepsilon, l + \varepsilon]$ et $I' = [l' - \varepsilon, l' + \varepsilon]$ soient disjoints ($\epsilon = |l - l'|/3$ convient). Or d'après la définition de la limite il n'y a qu'un nombre fini de termes de la suite en dehors de I, donc à fortiori qu'un nombre fini de termes de la suite dans I', ce qui est absurde. □

On notera que la modification d'un nombre **fini** de termes d'une suite ne change rien pour ce qui est de sa limite éventuelle.

Définition 2.3.3 Lorsqu'une suite (u_n) tend vers un certain réel l, on dit que cette suite est **convergente**. Dans le cas contraire on dit qu'elle est **divergente**.

Parmi les suites divergentes, on distingue celles qui tendent vers l'infini. On dit qu'une suite (u_n) tend vers $+\infty$ lorsque, pour tout A donné, il n'y a qu'un nombre fini (N_A disons) de termes de la suite qui sont inférieurs à A. On retiendra la

Définition 2.3.4 On dit que la suite (u_n) tend vers $+\infty$ lorsque

$$\text{pour tout } A \in \mathbb{R}, \text{ il existe } N_A \in \mathbb{N} \text{ tel que} \quad n \geq N_A \Rightarrow u_n \geq A$$

On note alors :

$$\lim(u_n) = +\infty \quad \text{ou encore} \quad \lim_{n \to \infty} u_n = +\infty$$

Exercice 2.3.5 *Ecrire la définition de "la suite (u_n) tend vers $-\infty$".*

2.3.2 Limite et relation d'ordre

On peut passer à la limite dans les inégalités larges :

Proposition 2.3.6 *Soit (u_n) et (v_n) deux suites numériques, l et l' deux nombres réels. Supposons que (u_n) tend vers l et que (v_n) tend vers l'. S'il existe n_0 tel que, pour tout $n \geq n_0$, on a $u_n \leq v_n$, alors $l \leq l'$.*

Preuve: Supposons que $l > l'$, et posons $\epsilon = \frac{l - l'}{3}$. Puisque (u_n) tend vers l, il existe $N_\epsilon \in \mathbb{N}$ tel que pour tout $n \geq N_\epsilon$, on ait $|u_n - l| \leq \epsilon$. En particulier $u_n \geq l - \epsilon$ pour tout $n \geq N_\epsilon$. De la même manière, il existe N'_ϵ tel que, pour tout $n \geq N'_\epsilon$, $v_n \leq l' + \epsilon$. Posant $n_1 = \max\{n_0, N_\epsilon, N'_\epsilon\}$, on a donc

$$u_{n_1} \geq l - \epsilon > l' + \epsilon \geq v_{n_1},$$

ce qui est absurde. □

Attention ! Les inégalités *strictes* ne sont pas conservées par passage à la limite : on a par exemple $1/n > 0$ pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, mais la suite $(1/n)$ tend vers 0.

Question 5 *Pourquoi ne peut-on pas utiliser la preuve ci-dessus pour montrer que $l < l'$ quand $u_n < v_n$ pour tout n assez grand ?*

Question 6 *(idiote) Supposons que $u_n < v_n$ pour tout $n \geq n_0$, que (u_n) tend vers l et que v_n tend vers l'. Que peut-on dire de l et l' ?*

Proposition 2.3.7 *Toute suite convergente est bornée.*

Preuve: Soit (u_n) une suite convergente, et $\ell \in \mathbb{R}$ sa limite. Pour $\epsilon = 1$, il existe $N_1 \in \mathbb{N}$ tel que $|u_n - \ell| \leq 1$ pour tout $n \geq N_1$, ou encore $\ell - 1 \leq u_n \leq \ell + 1$ pour tout $n \geq N_1$. Posant $M = \max\{u_0, u_1, \ldots, u_{N_1}, \ell + 1\}$ et $m = \min\{u_0, u_1, \ldots, u_{N_1}, \ell - 1\}$, on a bien $m \leq u_n \leq M$ pour tout $n \in \mathbb{N}$. □

Attention ! La réciproque est fausse : la suite (u_n) définie par $u_n = (-1)^n$ est bornée mais pas convergente.

2.4 Calcul de limite

Les définitions ci-dessus sont assez difficiles à manipuler. Nous regroupons ici quelques théorèmes qui permettent de montrer qu'une suite converge vers un réel ℓ. Ces résultats sont en principe connus du lecteur, mais on en profite pour mettre en oeuvre la définition ci-dessus afin de les démontrer.

2.4.1 Le théorème des gendarmes

Proposition 2.4.1 *Soit (u_n) une suite numérique. S'il existe une suite (v_n) qui tend vers 0 et telle que, pour tout n (où même à partir d'un certain rang) :*

$$|u_n - l| \leq v_n$$

alors (u_n) tend vers l.

Preuve: Soit ε un réel positif. Il existe un entier N_ε tel que, pour tout $n \geq N_\varepsilon$, $|v_n| \leq \varepsilon$. Donc pour tout $n \geq N_\varepsilon$, $|u_n - l| \leq \varepsilon$. □

Autrement dit pour montrer qu'une suite converge vers $l \in \mathbb{R}$ il suffit de majorer **sa distance à** l par une suite positive dont on sait qu'elle tend vers 0. Pour pouvoir utiliser ce résultat, il est nécessaire de disposer de **suites de références**. Le lecteur courageux utilisera les définitions pour montrer la

Proposition 2.4.2 *Soit k et a deux réels.*

1. *La suite $(n^k)_{n\in\mathbb{N}^*}$ tend vers zéro si $k<0$ et vers $+\infty$ si $k>0$.*
2. *La suite (a^n) tend vers zéro si $|a|<1$, et vers $+\infty$ si $a>1$.*
3. *La suite $(n^k a^n)$ tend vers zéro si $|a|<1$ pour n'importe quel k.*

Exemple 2.4.3 *La suite $u : n \mapsto 1/(3n^2+n+1)$ tend vers 0, puisque $u_n \leq \frac{1}{3}\frac{1}{n^2}$, et la suite (u_n) de terme général $u_n = 1/n^2$ a pour limite 0. On en déduit par comparaison que les suites de terme général $v_n = 1/(n^2+1)$ et $w_n = 1/(n^2-2)$ tendent vers 0.*

Voici un critère du même genre pour montrer qu'une suite tend vers $+\infty$:

Proposition 2.4.4 *Soit (u_n) une suite réelle. S'il existe une suite (v_n) qui tend vers $+\infty$ et telle que pour tout n (où même tout n assez grand) :*

$$v_n \leq u_n$$

alors la suite (u_n) tend vers $+\infty$.

Exercice 2.4.5 *Monter que $n < n^2 - 10n$ pour tout $n > 11$, et que la suite $n \mapsto n^2 - 10n$ tend vers $+\infty$.*

2.4.2 Limites et opérations

Nous résumons dans le tableau qui suit les principaux résultats concernant la limite de la somme, du produit et du quotient de deux suites. Ils permettent de déterminer assez facilement la limite éventuelle de certaines suites. On se contente de donner la preuve du résultat concernant la limite d'une somme : le lecteur pourra s'en inspirer pour démontrer les autres.

Proposition 2.4.6 *Soit (a_n) et (b_n) deux suites numériques, (c_n) la somme de (a_n) et (b_n), c'est-à dire la suite de terme général $c_n = a_n + b_n$. Si (a_n) tend vers le réel l et (b_n) tend vers le réel l', alors (c_n) tend vers $l + l'$.*

Preuve: Soit ε un réel positif. Il existe un entier $M_{\varepsilon/2}$ tel que, pour tout $n \geq M_{\varepsilon/2}$, on a $|a_n - l| \leq \varepsilon/2$. De même, il existe un entier $M'_{\varepsilon/2}$ tel que, pour tout $n \geq M'_{\varepsilon/2}$, on a $|b_n - l'| \leq \varepsilon/2$. Soit alors $N_\varepsilon = \max\{M_{\varepsilon/2}, M'_{\varepsilon/2}\}$. Pour tout $n \geq N_\varepsilon$ on a :

$$|c_n - (l + l')| \leq |a_n - l| + |b_n - l'| < \varepsilon.$$

Résumons : pour tout $\epsilon > 0$, on a trouvé un entier N_ϵ tel que $|c_n - (\ell + \ell')| \leq \epsilon$ pour tout $n \geq N_\epsilon$: la suite (c_n) converge vers $\ell + \ell'$. □

Soit donc (u_n) et (v_n) deux suites numériques.

si		alors	
$\lim(u_n)$	$\lim(v_n)$	$\lim(u_n + v_n)$	$\lim(u_n v_n)$
$\ell \in \mathbb{R}$	$\ell' \in \mathbb{R}$	$\ell + \ell'$	$\ell\ell'$
$+\infty$	$\ell' \in \mathbb{R}$	$+\infty$	$\begin{cases} +\infty & \text{si } \ell' > 0 \\ -\infty & \text{si } \ell' < 0 \\ ? & \text{si } \ell' = 0 \end{cases}$
$+\infty$	$+\infty$	$+\infty$	$+\infty$
$+\infty$	$-\infty$	?	$-\infty$
$-\infty$	$\ell' \in \mathbb{R}$	$-\infty$	$\begin{cases} -\infty & \text{si } \ell' > 0 \\ +\infty & \text{si } \ell' < 0 \\ ? & \text{si } \ell' = 0 \end{cases}$
$-\infty$	$-\infty$	$-\infty$	$-\infty$

si	alors
$\lim(u_n)$	$\lim(\frac{1}{u_n})$
$\ell \in \mathbb{R}, \ell \neq 0$	$1/\ell$
0	?
0, avec $u_n > 0$ pour tout n	$+\infty$
0, avec $u_n < 0$ pour tout n	$-\infty$
$+\infty$	0
$-\infty$	0

TABLE 2.1 – Limite d'une somme, d'un produit et d'un quotient

Attention ! dans ces tableaux, la présence d'un **?** signale qu'il n'y a pas de résultat général possible, et qu'il faut étudier chacune de ces **formes indéterminées** en utilisant d'autres méthodes. Par exemple si $u : n \mapsto -n^2$ et $v : n \mapsto n^3$, on voit que : $\lim(u_n) = -\infty$, et que $\lim(v_n) = +\infty$. Le tableau précédent ne permet donc pas directement de connaître la limite éventuelle de la suite (w_n) donnée par $w_n = u_n + v_n$. Pourtant il suffit de remarquer que $w_n = n^2(n-1)$ et de conclure grâce à la huitième ligne. (On dit que l'on a **levé l'indetermination**, sport que vous avez sûrement déjà pratiquée.)

2.4.3 Cas des suites définies par récurrence

> **Proposition 2.4.7** *Soit (u_n) une suite numérique qui converge vers un réel ℓ. Si $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ est continue au point ℓ, alors la suite $(f(u_n))$ converge vers $f(\ell)$.*

De manière un peu rapide, on écrit souvent cette proposition sous la forme

$$\lim_{n\to+\infty} f(u_n) = f(\lim_{n\to+\infty} u_n).$$

Preuve: Soit $\epsilon > 0$. Puisque f est continue en ℓ, il existe $\alpha(\epsilon) > 0$ tel que

$$|x - \ell| \leq \alpha(\epsilon) \Longrightarrow |f(x) - f(\ell)| \leq \epsilon.$$

Puisque (u_n) converge vers ℓ, il existe un entier $N_{\alpha(\epsilon)}$ tel que

$$n \geq N_{\alpha(\epsilon)} \Longrightarrow |u_n - \ell| \leq \alpha.$$

Donc, notant $N_\epsilon = N_{\alpha(\epsilon)}$, pour tout $n \geq N_\epsilon$ on a $|f(u_n) - f(\ell)| \leq \epsilon$. □

Cette proposition est souvent utilisée pour trouver les valeurs possibles de la limite d'une suite définie par récurrence. Supposons en effet que (u_n) est une suite définie par $u_{n+1} = f(u_n)$, où f est une fonction continue sur $\mathbb{R}$. Si (u_n) converge, sa limite ℓ doit vérifier

$$\ell = \lim_{n\to+\infty} u_{n+1} = \lim_{n\to+\infty} f(u_n) = f(\lim_{n\to+\infty} u_n) = f(\ell).$$

Autrement dit, le réel ℓ doit être un **point fixe** pour f, c'est-à-dire une solution de l'équation $f(\ell) = \ell$.

2.5 Critères de convergence

On donne maintenant des résultats plus difficiles, qui permettent de déterminer si une suite converge sans avoir d'idée à priori sur sa limite. Ces énoncés peuvent tous être vus comme des conséquences de l'axiome de la borne supérieure. En particulier ces énoncés ne sont plus valables si l'on travaille dans $\mathbb{Q}$ (i.e. avec des suites de nombres rationnels, dont les limites éventuelles sont dans $\mathbb{Q}$).

2.5.1 Suites monotones

Proposition 2.5.1 *Si (u_n) est une suite croissante et majorée alors elle converge, et sa limite est la borne supérieure de l'ensemble $\{u_n,\ n \in \mathbb{N}\}$. Si (u_n) est une suite décroissante et minorée alors elle converge, et sa limite est la borne inférieure de l'ensemble $\{u_n,\ n \in \mathbb{N}\}$.*

Preuve: L'ensemble $\{u_n,\ n \in \mathbb{N}\}$ n'est pas vide, et il est majoré par hypothèse : il admet donc une borne supérieure b. Soit $\epsilon > 0$. Puisque b est la borne supérieure de la suite (u_n), il existe au moins un terme de la suite dans l'intervalle $[b-\epsilon, b]$ (sinon b ne serait pas le plus petit majorant). Notons n_0 le rang de ce terme. Puisque la suite est croissante, on a $b - \epsilon \leq u_{n_0} \leq u_n$ pour tout $n \geq n_0$. On a bien sûr aussi $u_n \leq b$ pour tout n, donc finalement

$$n \geq n_0 \Longrightarrow |u_n - b| \leq \epsilon.$$

Ce raisonnement étant valable pour tout $\epsilon > 0$, on a bien montré que $\lim(u_n) = b$. □

Exemple 2.5.2 *Soit :* $u_n = 1 + \frac{1}{1!} + \cdots + \frac{1}{n!}$*. On montre par récurrence que* $\frac{1}{n!} \leq \frac{1}{2^{n-1}}$ *et on en déduit que la suite* (u_n) *est majorée par 3. Cette suite est croissante, et on conclut donc qu'elle est convergente.* ***Attention !*** *rien ne dit que sa limite est 3 : on sait seulement (voir la Proposition 2.3.6) qu'elle est inférieure à 3.*

Question 7 *Quelle est la limite de cette suite ? Est-ce un nombre rationnel, ou, autrement dit, cette suite* (u_n) *de nombres rationnels est-elle convergente dans* $\mathbb{Q}$ *?*

Exemple 2.5.3 *Soit pour* $n \geq 1$, $u_n = \sum_{p=1}^{n} \frac{1}{p^2}$*. La suite* (u_n) *est croissante, puisque* $u_{n+1} - u_n = \frac{1}{(n+1)^2} > 0$*. Elle est aussi majorée puisque, pour* $p \geq 2$, $\frac{1}{p^2} \leq \frac{1}{p(p-1)} \leq \frac{1}{p-1} - \frac{1}{p}$ *et donc*

$$u_n \leq 1 + 1 - \frac{1}{2} + \frac{1}{2} - \frac{1}{3} + \frac{1}{3} - \frac{1}{4} \cdots + \frac{1}{n-1} - \frac{1}{n} = 2 - \frac{1}{n} \leq 2.$$

Cette suite est donc convergente. ***Attention !*** *là encore, la suite est majorée par 2, donc sa limite est inférieure à 2, mais on ne peut certainement pas en déduire que la suite tend vers 2 : elle tend vers...* $\frac{\pi^2}{6}$.

Exemple 2.5.4 *Considérons la suite* (u_n) *de rationnels, où* u_n *est le plus grand nombre décimal avec* n *chiffres après la virgule dont le carré est inférieur à 2 :* $u_0 = 1$, $u_1 = 1,4$, $u_2 = 1,41$*, etc... On peut voir que* (u_n) *est une suite croissante majorée qui converge vers* $\sqrt{2}$.

2.5.2 Suites adjacentes

Définition 2.5.5 On dit que deux suites (u_n) et (v_n) sont adjacentes lorsque

1. (u_n) est croissante,
2. (v_n) est décroissante,
3. $\lim(u_n - v_n) = 0$.

Vous avez déjà rencontré des suites adjacentes : la méthode de la dichotomie, utilisée par exemple pour démontrer le Théorème des Valeurs Intermédiaires consiste a construire deux suites (a_n) et (b_n), avec (a_n) croissante, (b_n) décroissante et $b_n - a_n \to 0$ puisque $b_n - a_n \leq \frac{b-a}{2^n}$ (on coupe l'intervalle en 2 à chaque étape).

Attention ! La troisième propriété ne suffit pas en général à assurer la convergence des suites (u_n) et (v_n) : prendre par exemple $u_n = v_n = n \ldots$

Proposition 2.5.6 *Si* (u_n) *et* (v_n) *sont deux suites adjacentes, elles convergent et ont même limite.*

Preuve: On montre d'abord que (u_n) est majorée par v_0. Sinon il existe $p \in \mathbb{N}$ tel que $u_p > v_0$. Si $d = (v_p - v_0)/2$, on a encore $u_p > v_0 + d$. Puisque (u_n) est croissante, on a donc, pour tout $n \geq p$, $u_n \geq u_p > v_0 + d$. Ensuite, puisque (v_n) est décroissante, on a, pour tout $n \geq p$, $u_n > v_0 + d \geq v_n + d$. Mais alors pour tout $n \geq p$ on a $u_n - v_n > d$, et $\lim(u_n - v_n) \geq d$, ce qui est absurde.
Maintenant (u_n) est une suite croissante et majorée, donc elle converge vers un réel ℓ. Or $v_n = u_n - (u_n - v_n)$, donc en utilisant le résultat sur la limite d'une somme, on voit que (v_n) tend aussi vers ℓ. $\square$

Exemple 2.5.7 *Soient (u_n) et (v_n) les suites définies par $u_n = 1 + \frac{1}{2} + \cdots + \frac{1}{n} - \ln(n+1)$ et $v_n = 1 + \frac{1}{2} + \cdots + \frac{1}{n} - \ln(n)$. On a $v_n - u_n = \ln(n+1) - \ln(n) = \ln(1 + \frac{1}{n})$, donc $\lim(v_n - u_n) = 0$. De plus, pout tout $n \geq 1$, on a*

$$\begin{aligned} u_{n+1} - u_n =& \frac{1}{n+1} - \ln(n+2) + \ln(n+1) = \frac{1}{n+1} - \ln(1 + \frac{1}{n+1}) \\ =& \frac{1}{n+1} - \left(\frac{1}{n+1} - \frac{1}{2(n+1)^2} + \frac{1}{(n+1)^2}\epsilon(\frac{1}{n})\right), \end{aligned}$$

où ϵ est une fonction de limite nulle en 0. Du coup

$$u_{n+1} - u_n = \frac{1}{2(n+1)^2}(1 + \epsilon(\frac{1}{n})),$$

ce qui montre qu'il existe $N \in \mathbb{N}$ tel que $u_{n+1} - u_n \geq 0$ pour tout $n \geq N$: la suite (u_n) est croissante à partir du rang N. On montre de la même manière que (v_n) est décroissante à partir d'un certain rang (c'est un peu plus difficile), et donc que (u_n) et (v_n) convergent vers une même limite. Cette limite, qu'on note en général γ, porte le nom de constante d'Euler.

On peut aussi énoncer cette proposition en termes d'intervalles fermés emboités : si $I_n = [u_n, v_n]$ avec (u_n) croissante, (v_n) décroissante et si la longueur de I_n tend vers 0, alors il existe un et un seul réel ℓ appartenant à l'intersection de tous les intervalles I_n.

Question 8 *Pourquoi faut-il que les intervalles soient fermés ?*

2.5.3 Critère de Cauchy pour les suites.

Ce dernier critère est très important : il constitue lui aussi une propriété fondamentale de l'ensemble des nombres réels.

Définition 2.5.8 On dit qu'une suite (u_n) vérifie le **critère de Cauchy** ou que (u_n) est une **suite de Cauchy** lorsque

$$\text{pour tout } \varepsilon > 0, \text{ il existe } N_\varepsilon \in \mathbb{N}, \quad n > N_\varepsilon, m > N_\varepsilon \Rightarrow |u_n - u_m| < \varepsilon$$

Autrement dit (u_n) est une suite de Cauchy lorsque la distance entre deux termes quelconques est aussi petite que l'on veut, quite à ne considérer que les termes de rang suffisamment grand. Voici d'un coup un grand nombre d'exemples de suites de Cauchy !

Proposition 2.5.9 *Toute suite convergente est une suite de Cauchy.*

Preuve: Soit ℓ la limite de la suite (u_n), et $\epsilon > 0$. Il existe $N_\epsilon \in \mathbb{N}$ tel que si $n \geq N_\epsilon$, alors $|u_n - \ell| \leq \epsilon/2$. Du coup si $n, m \geq N_\epsilon$, on a

$$|u_n - u_m| \leq |u_n - \ell| + |u_m - \ell| \leq \epsilon.$$

□

Proposition 2.5.10 *Toute suite de Cauchy est bornée.*

Preuve: Il existe $N_1 \in \mathbb{N}$ tel que si $n, m \geq N_1$, alors $|u_n - u_m| \leq 1$. En particulier pour tout $n \geq N_1$, on a $u_{N_1} - 1 \leq u_n \leq u_{N_1} + 1$. La suite (u_n) est bornée à partir du rang N_1, donc elle est bornée. □

Voici encore une propriété fondamentale de $\mathbb{R}$, qui n'a pas d'équivalent dans $\mathbb{Q}$.

Proposition 2.5.11 *Toute suite de Cauchy est convergente dans $\mathbb{R}$.*

Preuve: Pour tout n, l'ensemble $\{u_m,\ m \geq n\}$ est inclus dans $\{u_m,\ m \geq 0\}$, donc est minoré. Puisqu'il n'est pas vide, il admet une borne inférieure qu'on note $a_n = \inf\{u_m,\ m \geq n\}$.

La suite (a_n) est croissante, majorée puisque la suite (u_n) l'est, et l'on note s sa borne supérieure ; on va montrer que (u_n) converge vers s. Soit donc $\epsilon > 0$.

- Par définition de la borne supérieure, il existe $N_\epsilon \in \mathbb{N}$ tel que $|a_n - s| \leq \epsilon/3$ pour tout $n \geq N_\epsilon$.
- Puisque (u_n) est une suite de Cauchy, il existe $M_\epsilon \in \mathbb{N}$ tel que si $n, m \geq M_\epsilon$, alors $|u_n - u_m| \leq \epsilon/3$.

Soit donc $n \geq \max\{N_\epsilon, M_\epsilon\}$. Par définition de la borne inférieure, il existe $m_0 \geq n$ tel que $a_n \leq u_{m_0} \leq a_n + \epsilon/3$. Or

$$|u_n - s| \leq |u_n - u_{m_0}| + |u_{m_0} - a_n| + |a_n - s|,$$

donc pour $n \geq \max\{N_\epsilon, M_\epsilon\}$, on a bien $|u_n - s| \leq \epsilon$. □

On donne maintenant un exemple de suite de nombres rationnels vérifiant le critère de Cauchy, mais dont la limite (qui existe dans $\mathbb{R}$ d'après la proposition précédente !) n'est pas un nombre rationnel. Autrement dit, dans $\mathbb{Q}$, il y a des suites de nombres rationnels qui vérifient le critère de Cauchy mais qui ne sont pas convergentes.

Exemple 2.5.12 *Soit* (u_n) *la suite donnée par* $u_0 = 1$ *et* $u_{n+1} = \dfrac{1}{2}(u_n + \dfrac{2}{u_n})$.

1. On vérifie (par récurrence) que tous les termes de cette suite sont rationnels. Ensuite, en étudiant les variations de la fonction $]0, +\infty[\ni x \mapsto \frac{1}{2}(x + \frac{1}{x})$ *sur* $\mathbb{R}^+$, *on vérifie que* $u_n \geq \sqrt{2}$ *pour* $n \geq 1$.

2. En remarquant que

$$u_{n+1} - u_n = \frac{2 - u_n^2}{2u_n},$$

on démontre ensuite que cette suite est décroissante, et, par conséquent, converge (dans $\mathbb{R}$ *!). Elle vérifie donc le critère de Cauchy.*

3. On montre ensuite que sa limite est $\sqrt{2}$. *On sait déjà que cette limite existe et qu'elle est supérieure ou égale à* $\sqrt{2}$. *Mieux : on obtient par passage à la limite :*

$$\ell = \frac{1}{2}(\ell + \frac{2}{\ell}),$$

et donc $\ell = \sqrt{2}$ *: la limite de la suite* (u_n) *n'est pas un rationnel.*

Exemple 2.5.13 *Soit* (u_n) *la suite donnée par*

$$u_n = 1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \cdots + \frac{1}{n}$$

On vérifie que, pour tout $n \geq 1$, $u_{2n} - u_n \geq \dfrac{1}{2}$. *Cette inégalité montre que l'on n'a pas la propriété de Cauchy, et que, par conséquent, cette suite est divergente.*

2.5.4 Le lemme de Cesaro

On termine ce chapitre par un résultat qui s'avère très utile, mais que nous n'utiliserons pas (ou peu !) dans ce cours. Le lecteur pourra considérer qu'il figure là à titre culturel.

> **Proposition 2.5.14** *Soit* (u_n) *une suite de réels, et* (v_n) *la suite définie par*
>
> $$v_n = \frac{u_1 + u_2 + \cdots + u_n}{n}.$$
>
> *Si* (u_n) *converge vers un réel* ℓ, *alors* (v_n) *converge aussi vers* ℓ.

Le lecteur notera que v_n est la moyenne des termes de la suite (u_n) de rang inférieur à n. On admet cette proposition, pour ce concentrer sur l'exercice suivant, qui est une application typique du Lemme de Cesaro.

Exemple 2.5.15 *Soit* (w_n) *a suite définie par* $w_0 = 1/2$ *et* $w_{n+1} = w_n(1 - w_n)$ *pour tout* $n \geq 0$. *On démontre par récurrence que* $0 < w_n < 1$ *pour tout* n, *puis que la suite* (w_n) *est décroissante. Elle converge donc, et sa limite ne peut être que* $\ell = 0$.

On veut être plus précis, et savoir à quelle vitesse la suite (w_n) tend vers 0. Pour cela on introduit la suite (u_n) définie par

$$u_n = \frac{1}{w_{n+1}} - \frac{1}{w_n} = \frac{1}{1-u_n}\cdot$$

Il est clair que (u_n) tend vers 1. La suite (v_n) de ses moyennes tend donc aussi vers 1, ce qui donne

$$v_n = \frac{1}{n}(u_1 + \cdots + u_n) = \frac{1}{n}(\frac{1}{w_{n+1}} - \frac{1}{w_1}) \to 1$$

On en déduit que $nw_n \to 1$ ou encore

$$w_n = \frac{1}{n} + \frac{1}{n}\epsilon(\frac{1}{n}),$$

pour une fonction ϵ de limite nulle en 0.

Question 9 *Que pouvez-vous dire de (v_n) quand $u_n = (-1)^n$? Autrement dit, la convergence de (v_n) entraine-t-elle la convergence de (u_n) ?*

Chapitre 3

Propriétés des fonctions d'une variable réelle

3.1 Fonctions continues

3.1.1 Continuité en un point

Soit $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ une fonction, et $\mathcal{D}_f$ sont ensemble de définition. On rappelle qu'une fonction est continue en $x_0 \in \mathcal{D}_f$ lorsque $\lim_{x \to x_0} f(x) = f(x_0)$. En revenant à la notion de limite d'une fonction en un point, cela s'écrit

Définition 3.1.1 Soit $x_0 \in \mathcal{D}_f$. On dit que f est continue en x_0 lorsque, pour tout $\epsilon > 0$, il existe un $\alpha > 0$ tel que, si $x \in \mathcal{D}_f$ et $|x - x_0| \leq \alpha$, alors $|f(x) - f(x_0)| \leq \epsilon$.

De manière un peu plus imagée, la fonction f est continue en x_0 lorsque pour tout voisinage

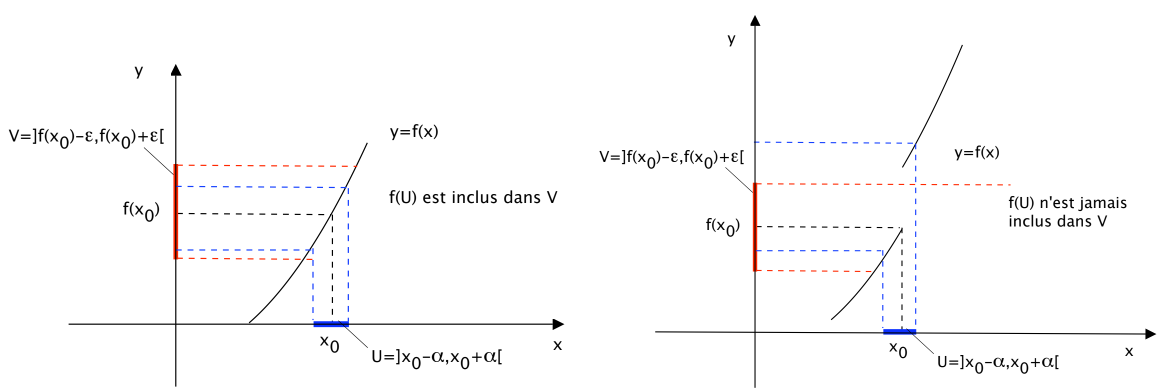


Figure 3.1 – Une fonction continue en x_0, et une qui ne l'est pas.

V de $f(x_0)$ (ce qui correspond à choisir un $\epsilon > 0$), on peut trouver un voisinage U de x_0 (c'est- à dire un $\alpha > 0$) tel que

$$x \in U \cap \mathcal{D}_f \Longrightarrow f(x) \in V$$

Question 10 *Donner une liste de fonctions continues en* 0*, et une liste de fonctions qui ne sont pas continues en 0. Ces fonctions sont-elles définies en 0 ? Conclusion ?*

Le résultat suivant n'a pas un très grand intérêt à notre niveau, mais il peut permettre de simplifier l'étude de la continuité. Il faut par contre bien comprendre sa preuve.

Proposition 3.1.2 *Les énoncés suivants sont équivalents :*

1. *La fonction f est continue en x_0.*
2. *Pour toute suite (x_n) qui tend vers x_0, on a $\lim(f(x_n)) = f(x_0)$.*

Preuve: On a déjà vu que (1) entraine (2). On démontre maintenant la réciproque par l'absurde. Supposons que (2) soit vraie et que (1) soit fausse : il existe $\epsilon > 0$ tel que, pour tout $\alpha > 0$, on peut trouver un $x \in]x_0 - \alpha, x_0 + \alpha[$ tel que $f(x) \notin]f(x_0) - \epsilon, f(x_0) + \epsilon[$. En particulier en prenant $\alpha = 1/n$, on construit une suite (x_n) telle que $|x_n - x_0| \leq \frac{1}{n}$ et $|f(x_n) - f(x_0)| > \epsilon$, ce qui est absurde. □

Pour fixer les idées, on rappelle que

Proposition 3.1.3
– *Si f et g sont deux fonctions continues en x_0, alors $f + g$ et fg sont continues en x_0.*
– *Si f est continue en x_0 et $f(x_0) \neq 0$, alors $1/f$ est continue en x_0.*
– *Si f est continue en x_0 et g est continue en $f(x_0)$, alors $g \circ f$ est continue en x_0.*

Preuve: On va utiliser la caractérisation avec des suites (même si une démonstration directe n'est pas beaucoup plus difficile : **Exercice !**). Soit donc (x_n) une suite qui tend vers x_0. On sait que $f(x_n) \to f(x_0)$ et que $g(x_n)$ to $g(x_0)$, donc $(f + g)(x_n) = f(x_n) + g(x_n) \to (f + g)(x_0)$ et $(fg)(x_n) \to (fg)(x_0)$ en utilisant les résultats sur la limite et le produit d'une somme de suites. Ceci étant vrai pour toute suite (x_n) qui tend vers x_0, on a montré le premier point. Le second point découle directement du résultat sur la limite de l'inverse d'une suite. Enfin puisque g est continue en $f(x_0)$, on sait que $\lim(g(f(x_n))) = g(\lim(f(x_n)))$, ce qui donne bien $\lim(g(f(x_n))) = g(f(x_0))$. □

3.2 Fonctions continues sur un intervalle

3.2.1 Le théorème de Weierstrass

Définition 3.2.1 On dit que f est continue sur l'intervalle ouvert $]a,b[$ lorsque f est continue en chaque point de $]a,b[$. On dit que f est continue sur l'intervalle fermé $[a,b]$ lorsque f est continue en chaque point de $]a,b[$ et f est continue à droite en a et à gauche en b.

Proposition 3.2.2 *Soit $a < b$ deux nombres réels. Si f est une fonction continue sur $[a,b]$, alors f est bornée sur $[a,b]$.*

Preuve: Soit $A = \{x \in [a,b],\ f$ est bornée sur $[a,x]\}$. L'ensemble A est majoré par b, et c'est une partie non-vide de $\mathbb{R}$: $a \in A$ puisque $f(a)$ est un majorant et un minorant de f sur $[a,a]$. Donc A admet une borne supérieure, que l'on note c. Supposons que $c < b$. Puisque f est continue en c, il existe $\alpha > 0$ tel que si $|x-c| \le \alpha$ et $x \in [a,b]$, alors $f(c) - 1 \le f(x) \le f(c) + 1$. Pour $\delta = \min\{\alpha, (b-c)/2\}$ on a donc f bornée sur $[a, c+\delta]$, ce qui est absurde. Donc $c = b$ et f est bornée sur $[a,b]$. □

Attention ! on ne peut pas affaiblir l'hypothèse. Par exemple la fonction $f : x \mapsto 1/x$ est continue sur $]0,1]$, mais elle n'y est pas bornée : il est indispensable que l'intervalle soit fermé. De même, la fonction $f : x \mapsto x^2$ est continue sur $[0,+\infty[$, mais n'est pas bornée sur cet intervalle. On retiendra donc qu' **une fonction continue sur un intervalle borné et fermé de $\mathbb{R}$ est bornée**.

Utilisons encore une fois l'axiome de la borne supérieure : puisque l'ensemble $\{f(x),\ x \in [a,b]\}$ est non-vide ($a < b$) et borné, il admet une borne supérieure M et une borne inférieure m. Le résultat qui suit montre que m et M sont en fait respectivement un minimum et un maximum pour f sur $[a,b]$.

Proposition 3.2.3 *Si f est une fonction continue sur $[a,b]$, il existe x_0 et x_1 dans $[a,b]$ tels que*

$$f(x_0) \le f(x) \le f(x_1) \text{ pour tout } x \in [a,b].$$

Preuve: Soit donc M la borne supérieure de f sur $[a,b]$, et supposons que $f(x) \neq M$ pour tout $x \in [a,b]$. Alors la fonction $g : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ donnée par $g(x) = 1/(M - f(x))$ est définie et continue sur $[a,b]$, donc elle est bornée : il existe $M_1 \in \mathbb{R}$ tel que $0 < 1/(M - f(x)) \le M_1$ pour tout $x \in [a,b]$. On a alors $M - f(x) > \frac{1}{M_1}$ et $f(x) < M - 1/M_1$ pour tout $x \in [a,b]$, ce qui contredit le fait que M est le plus petit des majorants de f sur $[a,b]$. Donc il existe $x_1 \in [a,b]$ tel que $f(x_1) = M$.
On montre de la même manière l'existence d'un $x_0 \in [a,b]$ tel que $f(x_0) = \inf\{f(x),\ x \in [a,b]\}$. □

3.2.2 Le Théorème des Valeurs Intermédiaires

Proposition 3.2.4 *Soit $a < b$ deux nombres réels, et f une fonction continue sur $[a, b]$. Si y est compris entre $f(a)$ et $f(b)$, alors il existe un moins un $c \in [a, b]$ tel que $f(c) = y$.*

Preuve: On va supposer que $f(a) < f(b)$, la preuve étant identique dans le cas où $f(b) > f(a)$. Soit donc $y \in]f(a), f(b)[$, et $A = \{x \in [a, b],\ f(t) < y \text{ pour tout } t \in [a, x]\}$. A est non-vide et majoré, donc admet une borne supérieure c. Supposons que $f(c) < y$. Par continuité, il existe $\delta > 0$ tel que $f(c + \delta) < c$, ce qui est absurde. De même $f(c)$ ne peut pas être strictement supérieur à y, donc $f(c) = y$. □

On peut faire mieux :

Proposition 3.2.5 *Soit $a < b$ deux nombres réels et f une fonction continue sur $[a, b]$. Soient aussi m et M les bornes inféreures et supérieures de f sur $[a, b]$. Si $y \in [m, M]$, alors il existe un moins un $c \in [a, b]$ tel que $f(c) = y$.*

Preuve: Il suffit d'appliquer le résultat précédent sur l'intervalle d'extrémités x_0 et x_1, où $x_0, x_1 \in [a, b]$ sont tels que $f(x_0) = m$ et $f(x_1) = M$. □

Pour résumer, on a démontré le résultat suivant :

Proposition 3.2.6 *Soient $a < b$ deux réels, et $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ une fonction continue sur $[a, b]$. l'ensemble $f([a, b]) = \{f(x),\ x \in [a, b]\}$ est l'intervalle $[m, M]$ où m et M sont respectivement la borne inférieure et la borne supérieure de f sur $[a, b]$.*

3.3 Dérivées

3.3.1 Définitions

Définition 3.3.1 Soit $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ une fonction. On dit que f est dérivable sur l'intervalle ouvert $]a, b[$ lorsque f est dérivable (i.e. admet un D.L. à l'ordre 1) en chaque point de $]a, b[$. On note alors f' la fonction définie sur $]a, b[$ qui a x associe le nombre dérivé de f au point x.

Définition 3.3.2 Soit $]a, b[$ un intervalle ouvert de $\mathbb{R}$. On dit qu'une fonction $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, définie sur $]a, b[$ est de classe $\mathcal{C}^0$ sur cet intervalle lorsque f est continue sur $]a, b[$. Si $k \geq 1$ est un entier, on dit que f est de classe $\mathcal{C}^k$ sur $]a, b[$ lorsque f est k fois dérivable sur $]a, b[$, et $f^{(k)}$ est continue sur $]a, b[$.

3.3.2 Extremums

Définition 3.3.3 Soit $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ une fonction définie sur $\mathcal{D}$, et I une partie de $\mathcal{D}$. On dit que $x_0 \in I$ est

- un maximum de f sur I lorsque, pour tout $x \in I$ on a $f(x) \leq f(x_0)$;
- un minimum de f sur I lorsque, pour tout $x \in I$ on a $f(x) \geq f(x_0)$;
- un extremum de f sur I si c'est un maximum ou un minimum de f sur I ;
- un extremum global de f si c'est un extremum sur $\mathcal{D}$;
- un extremum local de f s'il existe un voisinage I de x_0 tel que x_0 est un extremum de f sur I.

Proposition 3.3.4 *Soit f une fonction dérivable sur un intervalle $]a, b[$. Si f admet un extremum local en un point c de $]a, b[$ alors $f'(c) = 0$.*

Preuve: On n'écrit la preuve que dans le cas d'un maximum. Soit donc c un maximum local de f : il existe un voisinage $]c - \alpha, c + \alpha[$ de c tel que, pour tout $x \in]c - \alpha, c + \alpha[$, on a $f(x) \leq f(c)$. Puisque f est dérivable en c, il existe une fonction ϵ de limite nulle en 0 telle que $f(c + h) = f(c) + hf'(c) + h\epsilon(h)$, ce qu'on peut écrire

$$f(c) = f(c + h) - h(f'(c) + \epsilon(h)).$$

Supposons que $f'(c) > 0$. Puisque $\epsilon(h) \to 0$ quand $h \to 0$, il existe un voisinage de c de la forme $]c - h_0, c + h_0[$ tel que $f'(c) + \epsilon(h) > f'(c)/2 > 0$. Mais alors pour $0 < h < h_0$, on a $h(f'(c) + \epsilon(h)) > 0$, donc $f(c) < f(c+h)$ ce qui est absurde. Le même raisonnement montre qu'on ne peut pas non plus avoir $f'(c) < 0$, et donc on a bien $f'(c) = 0$. □

La réciproque de cette proposition est fausse : pour la fonction $f : x \mapsto x^3$, on a $f'(0) = 0$, mais f n'admet pas d'extremum local en 0. Pour l'instant donc, on sait seulement que l'on doit chercher les éventuels extremums locaux d'une fonction dérivable f parmi ses **points critiques**, i.e. les points x tels que $f'(x) = 0$.

3.3.3 Le Théorème des Accroissements Finis

Proposition 3.3.5 *Soit g une fonction continue sur $[a, b]$. Si g est dérivable sur $]a, b[$, il existe $c \in]a, b[$ tel que*

$$g(b) - g(a) = (b - a)g'(c).$$

Preuve: Soit $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ la fonction définie sur $[a, b]$ par

$$f(x) = g(x) - g(a) - \frac{g(b) - g(a)}{b - a}(x - a).$$

On a $f(a) = f(b) = 0$, et f est continue sur $[a, b]$, dérivable sur $]a, b[$. De plus

$$f'(x) = g'(x) - \frac{g(b) - g(a)}{b - a},$$

donc $g(b) - g(a) = (b - a)g'(c)$ si et seulement si $f'(c) = 0$.
D'après le Théorème de Weierstrass, il existe $x_1, x_2 \in [a, b]$ tels que

$$f(x_1) \leq f(x) \leq f(x_2) \text{ pour tout } x \in [a, b].$$

- Cas 1 : x_1 et x_2 appartiennent à $\{a, b\}$. Alors $f(x) = 0$ pour tout $x \in [a, b]$, donc f' est la fonction constante nulle sur $]a, b[$: le théorème est vrai.
- Cas 2 : x_2, par exemple, est différent de a et de b. On peut alors appliquer le résultat précédent : x_2 est nécessairement un point critique de f, i.e. $f'(x_2) = 0$.

□

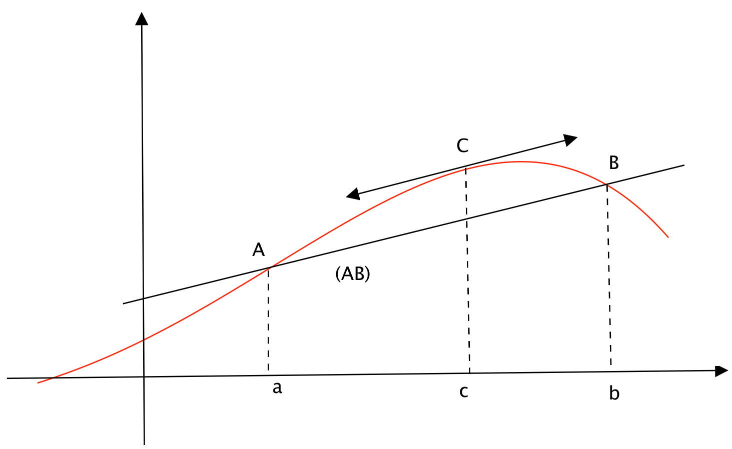


FIGURE 3.2 – Le TAF : il y a un point où la tangente à $\mathcal{C}_f$ est parallèle à la droite (AB).

Il y a deux idées dans cette preuve : d'abord on peut se ramener au cas où $f(b) = f(a) = 0$, et le TAF dans ce cas revient à dire qu'il existe un point $c \in]a, b[$ où la dérivée de f s'annule (ce résultat porte le nom de Théorème de Rolle). La deuxième idée repose sur le théorème de Weierstrass : puisque f est continue sur $[a, b]$, f admet un maximum et un minimum sur cet intervalle, qui ne peuvent pas être tous les deux en a ou en b : il s'agit donc d'un point critique.

Question 11 *Si f est dérivable en b, et si le maximum de f sur $[a, b]$ est atteint en b, pourrait-on affirmer que $f'(b) = 0$?*

Proposition 3.3.6 *Soit f une fonction dérivable sur $]a, b[$. Si $f'(x) \geq 0$ (resp. $f'(x) \leq 0$) pour tout $x \in]a, b[$, alors f est croissante (resp. décroissante) sur $]a, b[$*

Preuve: Soient $x_1 \leq x_2$ deux points de $]a, b[$. La fonction f est continue sur $[x_1, x_2]$ et dérivable sur $]x_1, x_2[$, donc il existe $c \in]x_1, x_2[$ tel que $f(x_2) - f(x_1) = (x_2 - x_1)f'(c)$. Si f' est positive sur $]a, b[$, on a $f'(c) \geq 0$ donc $f(x_2) \geq f(x_1)$. Ceci tant vrai pour tout couple (x_1, x_2) de points de $]a, b[$, f est bien croissante sur cet intervalle. □

3.3.4 Formule de Taylor-Lagrange

Proposition 3.3.7 *Soit f une fonction de classe $\mathcal{C}^n$ sur $[a, b]$, telle que $f^{(n)}$ soit dérivable sur $]a, b[$. Il existe $c \in]a, b[$ tel que*

$$f(b) = T_{n,a}(b) + \frac{(b-a)^{n+1}}{(n+1)!} f^{(n+1)}(c),$$

où $T_{n,a}(x)$ est le polynôme de Taylor d'ordre n de f au point a :

$$T_{n,a}(x) = f(a) + (x-a)f'(a) + \frac{(x-a)^2}{2!} f''(a) + \cdots + \frac{(x-a)^n}{n!} f^{(n)}(a) \cdot$$

Cette égalité porte le nom de Formule de Taylor-Lagrange à l'ordre n.

Preuve: Il suffit d'appliquer le TAF (en fait Rolle) à la fonction g définie par

$$g(x) = f(b) - T_{n,x}(b) - C\frac{(b-x)^{n+1}}{(n+1)!},$$

où C est choisi de sorte que $g(a) = 0$. □

Voici un cas où l'on peut affirmer qu'un point critique est un extremum local :

Proposition 3.3.8 *Soit f une fonction de classe $\mathcal{C}^2$ sur $]a, b[$, et $x_0 \in]a, b[$. Si $f'(x_0) = 0$ et $f''(x_0) \neq 0$, alors f admet un extremum local en x_0 : c'est un maximum local si $f''(x_0) < 0$ et un minimum local si $f''(x_0) > 0$.*

Preuve: On n'écrit la preuve que dans le cas $f'(x_0) = 0$ et $f''(x_0) > 0$. Puisque f'' est continue en x_0, il existe $h_0 > 0$ tel que, pour tout $c \in]x_0 - h_0, x_0 + h_0[$, on a $f''(c) > 0$. Or pour chaque h tel que $|h| < h_0$, il existe c entre x et $x + h$, donc dans $]x_0 - h_0, x_0 + h_0[$, tel que

$$f(x_0 + h) = f(x_0) + hf'(x_0) + \frac{h^2}{2} f''(c) = f(x_0) + \frac{h^2}{2} f''(c),$$

ce qui montre que $f(x_0 + h) \geq f(x_0)$: x_0 est bien un minimum local pour f. □

Chapitre 4

Méthodes de résolution numérique d'équations

Dans ce chapitre, on utilise les outils présentés jusque là pour obtenir des renseignements aussi precis que possibles sur la ou les solutions d'équations de la forme $f(x) = b$, où b est un réel donné, et f une fonction. Dans le cas où f est une bijection, le lecteur ne doit pas imaginer que l'on puisse se contenter de la réponse $x = f^{-1}(b)$: il s'agit de donner une valeur approchée aussi précise que possible de $f^{-1}(b)$. Autre idée fausse, la solution d'une équation $f(x) = b$ ne s'écrit en général pas avec des fonctions connues, même quand f est une fonction simple : E. Galois a démontré que ce n'est pas possible en général lorsque f est un polynôme de degré ≥ 5.

4.1 Fonctions réciproques

On rappelle rapidement les définitions vues au premier semestre.

4.1.1 Bijection et bijection réciproque

Définition 4.1.1 Soient A et B deux ensembles, et $f : A \to B$ une fonction dont l'ensemble de définition est $\mathcal{D}_f = A$. On dit que f est une bijection lorsque pour tout élément b de l'ensemble d'arrivée B, il existe un unique élément a dans l'ensemble de départ A tel que $f(a) = b$.

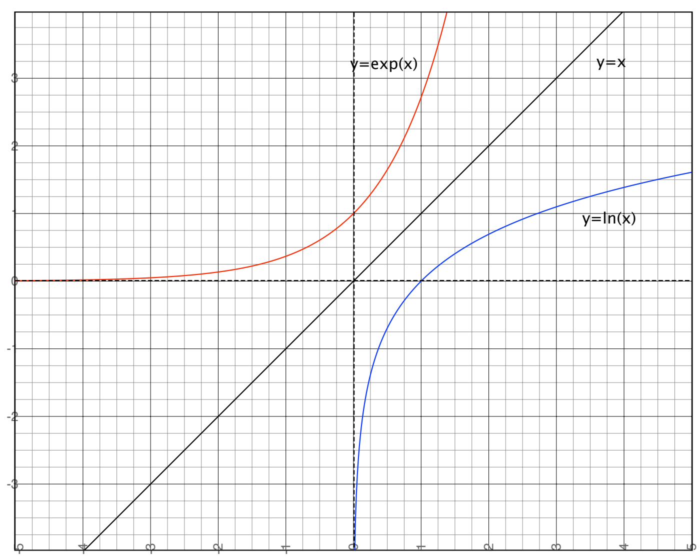
Exemple 4.1.2 *La fonction affine $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ donnée par $f(x) = mx + p$ est une bijection lorsque $m \neq 0$. En effet pour tout $b \in \mathbb{R}$, l'équation $f(a) = b$ admet une unique solution* $a = \dfrac{b-p}{m}\cdot$

Définition 4.1.3 Soient A et B deux ensembles, et $f : A \to B$ une bijection. On appelle bijection réciproque de f la fonction qui à b dans B associe l'unique a de A tel que $f(a) = b$. Cette fonction est notée $f^{-1} : B \to A$. C'est aussi une bijection.

Exemple 4.1.4 *On a vu (plutôt : on a admis) que la fonction* $f : \mathbb{R} \to]0, +\infty[$ *donnée par* $f(x) = e^x$ *est une bijection. Sa bijection réciproque est la fonction qui a* $b \in]0, +\infty[$ *associe l'unique* $a \in \mathbb{R}$ *tel que* $e^a = b$*. C'est donc la fonction* $f^{-1} :]0, +\infty[\to \mathbb{R}$ *donnée par* $f^{-1}(b) = \ln b$*.*

On suppose maintenant que $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ est une bijection, dont $\mathcal{C}_f$ est la courbe représentative dans un repère orthonormé $(O, \vec{\imath}, \vec{\jmath})$.

Proposition 4.1.5 *La courbe représentative de la bijection réciproque* f^{-1} *est la courbe symétrique de* $\mathcal{C}_f$ *par rapport à la droite* $D : y = x$ *(la première bissectrice).*



4.1.2 Cas des fonctions régulières

Rappelons que, d'après le T.V.I, l'image d'un intervalle I par une fonction continue sur I est un intervalle J. De ce fait, on a immédiatement la première partie de la

Proposition 4.1.6 *Soit* f *une fonction continue sur un intervalle* I *de* $\mathbb{R}$*. On note* J *l'intervalle* $f(I)$*. Si* f *est strictement monotone, alors* $f : I \mapsto J$ *est une bijection. De plus la bijection réciproque* $f^{-1} : J \to I$ *est aussi continue et strictement monotone, de même monotonie que* f*.*

Ce résultat permet de justifier les affirmations des exemples précédents ! La continuité de la bijection réciproque est plus difficile à démontrer, et nous l'admettrons.

On suppose maintenant que f est une fonction continue et dérivable sur I, et que f est strictement monotone sur I. On a vu qu'il suffit pour cela que $f'(x) > 0$ pour tout $x \in I$, mais que ce n'est pas nécessaire ($f(x) = x^3 \dots$). D'après la proposition précédente $f : I \to J$ est une bijection, et f^{-1} est continue. On a mieux :

> **Proposition 4.1.7** *Si f est une fonction continue, dérivable et f strictement monotone sur I. Si $f'(x_0) \neq 0$ alors f^{-1} est dérivable en $y_0 = f(x_0)$ et son nombre dérivé en y_0 est donnée par*
> $$(f^{-1})'(y_0) = \frac{1}{f'(x_0)} = \frac{1}{f'(f^{-1}(y_0))}.$$

On peut comprendre (et même démontrer) cette formule en examinant simultanément la courbe représentative de f et celle de f^{-1} : si $m \neq 0$ est le coefficient directeur de la tangente $\mathcal{T}$ à $\mathcal{C}_f$ en x_0, le coefficient directeur de la droite symétrique de $\mathcal{T}$ par rapport à Δ est $1/m$.

4.2 Méthode de dichotomie

On veut résoudre l'équation $f'(x) = 0$, pour une fonction f donnée. Plus précisément, on suppose que l'on sait que cette équation admet une unique solution x_0 dans l'intervalle $[a, b]$, et l'on cherche à déterminer une valeur approchée de x_0 avec une précision fixée à l'avance. La méthode de dichotomie permet cela, et ne repose que sur un seul des résultats vus dans le chapitre précédent : le théorème des valeurs intermédiaires. Autrement dit, la seule hypothèse nécessaire pour la mettre en oeuvre est :

$$f \text{ est continue sur l'intervalle } [a, b].$$

Dans ce cadre, une façon simple d'assurer que l'équation $f(x) = 0$ ait une solution dans $[a, b]$ est de supposer que $f(a)$ et $f(b)$ sont de signe contraires. Pour simplifier la discussion qui va suivre, on supposera même
$$f(a) < 0 < f(b).$$

Répétons-le, le Théorème des Valeurs Intermédiaires permet d'affirmer que l'équation $f(x) = 0$ admet au moins une solution dans $]a, b[$, mais rien ne dit qu'elle est unique : nous ferons cette hypothèse.

L'idée de la méthode est très simple : on coupe l'intervalle $[a, b]$ en deux parties de même longueur $[a, c]$ et $[c, b]$ où $c = \frac{a+b}{2}$ est le milieu de $[a, b]$, et l'on cherche dans lequel de ces intervalles se trouve la solution x_0. Elle est dans $[a, c]$ si $f(c) \geq 0$, et dans $[c, b]$ si $f(c) \leq 0$! Le théorème qui suit montre que la répétition de ce raisonnement un assez grand nombre de fois conduit à une valeur approchée de x_0 avec n'importe quelle précision donnée à l'avance.

Proposition 4.2.1 *Soit f une fonction continue sur $[a, b]$, avec $f(a) < 0 < f(b)$, et telle que l'équation $f(x) = 0$ ait une seule solution dans $[a, b]$. Soient (a_n) et (b_n) les suites définies par $a_0 = a$, $b_0 = b$ et*

$$a_{n+1} = \begin{cases} a_n & \text{si } f(\frac{a_n + b_n}{2}) > 0, \\ \frac{a_n + b_n}{2} & \text{si } f(\frac{a_n + b_n}{2}) \leq 0, \end{cases} \quad \text{et } b_{n+1} = \begin{cases} \frac{a_n + b_n}{2} & \text{si } f(\frac{a_n + b_n}{2}) > 0, \\ b_n & \text{si } f(\frac{a_n + b_n}{2}) \leq 0. \end{cases}$$

Les suites (a_n) et (b_n) convergent vers x_0. De plus a_n (resp. b_n) est une valeur approchée de x_0 à $\epsilon = \frac{b-a}{2^n}$-près par défaut (resp. par excès).

Preuve: Pour ce qui est de la convergence, il suffit de remarquer que (a_n) et (b_n) sont des suites adjacentes : (a_n) est croissante, (b_n) est décroissante, et l'on voit facilement par récurrence que $b_n - a_n \leq \frac{b-a}{2^n}$, donc en particulier que $(b_n - a_n) \to 0$. Ainsi (a_n) et (b_n) convergent vers une même limite ℓ. Supposons que $f(\ell) \neq 0$. Puisque f est continue en ℓ, f garde un signe constant au voisinage de ℓ, disons sur $]\ell - \delta, \ell + \delta[$. Soit alors $N \in \mathbb{N}$ tel que $(b - a)/2^N \leq \delta$. Puisque $\ell \in [a_N, b_N]$, on a $[a_N, b_N] \subset]\ell - \delta, \ell + \delta[$. Donc $f(a_N)$ et $f(b_N)$ sont de même signe, ce qui est absurde par construction. Ainsi on a bien $\ell = x_0$. La dernière assertion de la proposition découle directement du fait que $a_n \leq x_0 < b_n$. □

Cette méthode est tout à fait simple à programmer. Voilà l'algorithme correspondant :

```
[lire a,b,precision];
Tant que (b-a)>precision
{
  c=(a+b)/2;
  si (f(c).f(b)<0) alors a=c;
  sinon b=c;
};
[afficher a];
```

4.3 Méthode du point fixe

4.3.1 Le théorème du point fixe

Définition 4.3.1 Soit f une fonction définie sur $\mathcal{D}$. On dit que $x \in \mathcal{D}$ est un point fixe de f lorsque $f(x) = x$.

Proposition 4.3.2 *Soit f une fonction de classe $\mathcal{C}^1$ sur un intervalle fermé $I \subset \mathbb{R}$, telle que $f(I) \subset I$, et (u_n) la suite définie par $u_{n+1} = f(u_n)$ pour un $u_0 \in I$ donné. S'il existe un réel $0 \leq k < 1$ tel que $|f'(x)| \leq k < 1$, alors la suite (u_n) converge vers un réel ℓ, qui est le seul point fixe de f sur I. De plus*

$$|\ell - u_n| \leq k^n |\ell - u_0|.$$

Preuve: Supposons d'abord que f admette deux points fixes x_1 et x_2 distincts dans I. On aurait

$$|x_1 - x_2| = |f(x_1) - f(x_2)| \leq k|x_1 - x_2| < |x_1 - x_2|,$$

ce qui est absurde. Donc f admet au plus un point fixe dans I.
On va montrer maintenant que (u_n) est une suite de Cauchy de $\mathbb{R}$, et donc qu'elle converge. Pour $n \geq 1$ on écrit $u_{n+1} - u_n = f(u_n) - f(u_{n-1})$. On applique le théorème des accroissements finis sur l'intervalle d'extrémités u_n et u_{n-1} : cet intervalle est inclus dans I, donc f y est $\mathcal{C}^1$, et il existe $c \in I$ tel que $u_{n+1} - u_n = (u_n - u_{n-1})f'(c)$. On a donc

$$|u_{n+1} - u_n| \leq k|u_n - u_{n-1}|,$$

et par récurrence, on obtient

$$|u_{n+1} - u_n| \leq k^n |u_1 - u_0|.$$

Soit maintenant $p \geq q$ deux entiers, et $m = p - q$, on a

$$|u_p - u_q| = |u_{q+m} - u_q| \leq |u_{q+m} - u_{q+m-1}| + |u_{q+m-1} - u_{q+m-2}| + \cdots + |u_{q+1} - u_q|,$$

et donc

$$|u_p - u_q| \leq (k^{q+m-1} + k^{q+m-2} + \cdots + k^q)|u_1 - u_0|.$$

Or $k^{q+m-1} + k^{q+m-2} + \cdots + k^q = k^q(1 + \cdots + k^{m-1}) = k^q \frac{1-k^m}{1-k}$, donc

$$|u_p - u_q| \leq \frac{k^q}{1-k}|u_1 - u_0|.$$

Puisque $0 \leq k < 1$, on a $\lim_{q \to +\infty} k^q = 0$, donc pour $\epsilon > 0$, il existe $N_\epsilon \in \mathbb{N}$ tel que $\frac{k^q}{1-k}|u_1 - u_0| \leq \epsilon$ pour tout $q \geq N_\epsilon$. Finalement, on a $|u_p - u_q| \leq \epsilon$ pour tout $p \geq q \geq N_\epsilon$: la suite (u_n) est une suite de Cauchy, et converge donc vers un réel $\ell \in I$. En passant à la limite dans $u_{n+1} = f(u_n)$, et grâce à la continuité de f, on obtient bien $f(\ell) = \ell$.
Pour ce qui est de la dernière inégalité, on a

$$|u_n - \ell| = |f(u_{n-1}) - f(\ell)| \leq k|u_{n-1} - \ell|$$

et le résultat découle d'une récurrence facile. □

Attention ! ça ne marche pas si l'on suppose seulement que $|f'(x)| \leq 1$. Considérer par exemple la fonction $f : [1, +\infty[\to [1, +\infty[$ définie par $f(x) = x + \dfrac{1}{x}$. La fonction f n'admet pas de point fixe : $f(x) = x \Leftrightarrow \dfrac{1}{x} = 0$. Pourtant $f'(x) = 1 - \dfrac{1}{x^2}$, donc $|f'(x)| \leq 1$ sur $[1, +\infty[$.

4.3.2 Points fixes attractifs et points fixes répulsifs

On se pose maintenant la question suivante : si α est un point fixe de f, peut-on obtenir une valeur approchée de α à partir d'une suite définie par la formule de récurrence $u_{n+1} = f(u_n)$. Autrement dit, peut-on trouver un intervalle I contenant α, stable par f et tel que f' vérifie une inégalité du type $|f'(x)| \leq k < 1$ sur I.

Définition 4.3.3 Soit f une fonction $\mathcal{C}^1$ sur $\mathbb{R}$, et α un point fixe de f. On dit que α est un point fixe attractif si $|f'(\alpha)| < 1$. On dit que α est un point fixe répulsif si $|f'(\alpha)| > 1$.

Exemple 4.3.4 *Soit $f(x) = \frac{1}{4}(x^3 + 1)$. En établissant son tableau de variations, on voit que f admet trois points fixes $a_1 < a_2 < a_3$. Le Théorème des Valeurs Intermédiaires permet de montrer que $-2,5 < a_1 < 2$, $0 < a_2 < 0,5$ et $1,5 < a_3 < 2$. L'étude du sens de variation de f' permet de conclure que a_1 et a_3 sont des points fixes répulsifs, alors que a_2 est un point fixe attractif.*

• Supposons que α soit un point fixe attractif. Puisque f' est continue, il existe $h > 0$ tel que, pour tout $x \in [\alpha - h, \alpha + h]$, on a $|f'(x)| \leq k < 1$, où par exemple $k = \frac{1+f'(\alpha)}{2}$. L'intervalle $I = [\alpha - h, \alpha + h]$ est stable pour f : si $x \in I$, le TAF appliqué sur l'intervalle d'extrémités x et α donne

$$|f(x) - \alpha| = |f(x) - f(\alpha)| \leq k|x - \alpha| \leq kh < h,$$

et donc $f(x) \in I$. On a démontré la

Proposition 4.3.5 *Si α est un point fixe attractif de f, il existe $h > 0$ tel que, pout tout $u_0 \in [\alpha - h, \alpha + h]$, la suite (u_n) définie par $u_{n+1} = f(u_n)$ converge vers α.*

• Maintenant si α est un point fixe répulsif de f, on aura $|f'(x)| > 1$ sur un voisinage I de α, et l'on ne pourra pas utiliser directement la méthode du point fixe pour obtenir une valeur approchée de α. Il est cependant parfois possible de l'utiliser, disons dans le cas où l'on dispose d'une expression "explicite" pour f^{-1}. En effet puisque $|f'(x)| > 1$ sur I, et puisque f' est continue sur I, on a ou bien $f'(x) > 1$ pour tout x de I, ou bien $f'(x) < -1$ pour tout x de I. En particulier f est strictement monotone sur I, et puisqu'elle y est continue, f est bijective de I sur $J = f(I)$. Il suffit alors de remarquer que α est automatiquement un point fixe attractif pour f^{-1} : on a en effet $f^{-1}(\alpha) = \alpha$, et $|(f^{-1})'(\alpha)| < 1$ puisque $(f^{-1})'(\alpha) = 1/f'(\alpha)$.

Dans le cas de la fonction $f(x) = \frac{1}{4}(x^3 + 1)$ par exemple, $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ est une bijection, et on a $f^{-1}(x) = \sqrt[3]{4x - 1}$: on peut trouver une valeur approchée de a_1 (ou de a_2) en utilisant la méthode du point fixe pour f^{-1}... à condition de disposer d'un moyen de calculer la racine cubique d'un réel.

• Il reste à considérer le cas des points fixes α qui ne sont ni attractifs, ni répulsifs, c'est à dire pour lesquels $|f'(\alpha)| = 1$. Dans ce cas, la suite (u_n) définie par $u_{n+1} = f(u_n)$ peut converger ou diverger, et ce même pour une donnée initiale arbitrairement proche de α.

Par exemple 0 est un point fixe de $f(x) = \sinh(x) = \frac{1}{2}(e^x - e^{-x})$, et $f'(0) = \cosh(0) = 1$. Pour tout $u_0 > 0$, la suite $u_{n+1} = f(u_n)$ est strictement croissante, donc ne peut pas converger vers 0 (en fait elle tend vers $+\infty$). Par contre 0 est aussi un point fixe de $g(x) = \sin x$, mais la suite $u_{n+1} = g(u_n)$ converge vers 0 pourvu que u_0 soit pris assez proche de 0 ($|u_0| \leq \pi/2$ suffit).

Question 12 *Prouvez tout ça !*

4.3.3 Algorithme

On suppose que α est un point fixe attractif de f, que f vérifie les hypothèses du Théorème du Point Fixe sur un intervalle I contenant α. On prend $u_0 \in I$ et on calcule les itérés successifs $u_1 = f(u_0)$, $f(f(u_0))$, $f(f(f(u_0)))$... Quand peut-on s'arrêter ? On peut bien sûr estimer la constante $k < 1$ telle que $|f'(x)| < k$ sur I, et si l'on veut obtenir une valeur approchée à ϵ près, itérer N fois, où N est tel que (cf. le Théorème du Point Fixe)

$$k^N |I| < \epsilon,$$

où $|I|$ désigne la longueur de l'intervalle I. La détermination de k et N peut cependant être longue ou difficile, et l'on se contente plutôt de s'arrêter lorsque la distance entre deux itérés successifs est inférieure à ϵ/M, où M est choisi assez grand ($M = 10, 100\ldots$). On peut en effet écrire

$$|u_n - \ell| \leq |u_{n+1} - u_n| + |u_{n+1} - \ell| \leq |u_{n+1} - u_n| + k|u_n - \ell|,$$

et on aura donc

$$|u_n - \ell| \leq \frac{1}{1-k}|u_{n+1} - u_n| \leq \frac{\epsilon}{M(1-k)}.$$

On comprend que plus k est proche de 1, plus M doit être grand pour donner la précision attendue. Voilà un algorithme possible :

```
[lire x, precision];
M=10; /* l'algorithme donnera la précision attendue pour k<9/10 */
y=x+1;
Tant que (abs(y-x)>precision/M)
{
    y=x;
    x=f(x);
};
[afficher x];
```

4.4 Méthode de Newton

On va utiliser une méthode de point fixe pour résoudre l'équation $f(x) = 0$. On suppose toujours que α est l'unique solution de cette équation dans un intervalle I donné. On va simplement exhiber une fonction g dont α est un point fixe super-attractif, c'est-à dire telle que $g(\alpha) = \alpha$ et $g'(\alpha) = 0$.

Historiquement, ce n'est pas ainsi qu'a été pensée la méthode. L'idée, attribuée à Isaac Newton, est de remplacer la courbe représentative de f par sa tangente. Plus précisément, partant d'une valeur approchée u_0 de α, on trace le point d'intersection de la tangente à $\mathcal{C}_f$ au point d'abscisse α et de l'axe des abscisses. Si cette tangente n'est pas horizontale, c'est-à-dire $f'(u_0) \neq 0$, on obtient un point M de coordonnées $M(u_1, 0)$ et un calcul simple montre que

$$u_1 = g(u_0) = u_0 - \frac{f(u_0)}{f'(u_0)}.$$

Ayant en tête la figure ci-dessous, on espère que u_1 est une meilleure approximation de α que u_0.

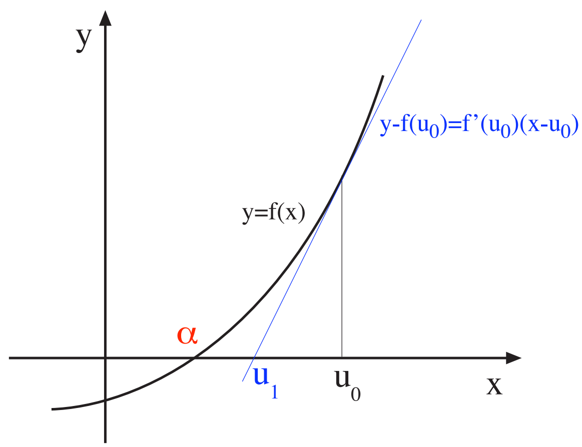


FIGURE 4.1 – La méthode de Newton

La construction de Newton correspond bien à ce que nous avons annoncé. Il faut d'abord noter que si $f'(\alpha) \neq 0$, et puisque f' est continue, il existe un intervalle contenant α sur lequel f' ne s'annule pas. Dans ce cas, la fonction g définie par $g(x) = x - \frac{f(x)}{f'(x)}$ est donc bien définie au voisinage de α. On a aussi $g(\alpha) = \alpha$, et on note que, si f est de classe $\mathcal{C}^2$,

$$g'(x) = 1 - \frac{(f'(x))^2 - f(x)f''(x)}{(f'(x))^2} = \frac{f(x)f''(x)}{(f'(x))^2},$$

ce qui montre que $g'(\alpha) = 0$. Par conséquent α est un point fixe attractif de g, et il existe un intervalle I contenant α sur lequel on peut utiliser la méthode du point fixe : pour un u_0 assez proche de α, la suite (u_n) définie par $u_{n+1} = g(u_n)$ converge vers α.

Du fait que $g'(\alpha) = 0$, la suite (u_n) converge très vite vers α. Le résultat suivant montre que partant d'une valeur approchée à $0,1$ près, on obtient environ 2^n décimales exactes en n itérations.

Proposition 4.4.1 *Soit f une fonction de classe $\mathcal{C}^2$ sur l'intervalle $I = [a-r, a+r]$, où f' ne s'annule pas. On note*

$$M = \sup_{x \in I} \left| \frac{f''(x)}{f'(x)} \right| \quad \text{et} \quad h = \min(r, 1/M).$$

Si $u_0 \in [\alpha - h, \alpha + h]$, et notant (u_n) la suite (u_n) définie par $u_{n+1} = g(u_n)$, avec $g(x) = x - \dfrac{f(x)}{f'(x)}$, on a

$$|u_n - \alpha| \leq \frac{1}{M}(M|u_0 - \alpha|)^{2^n}$$

Par exemple pour $f(x) = x^3 - 4x + 1$, les solutions de l'équation $f(x) = 0$ sont les points fixes a_1, a_2 et a_3 de la fonction $h : x \mapsto \frac{1}{4}(x^3 + 1)$ que nous avons déjà étudiés. Notant que ce sont des zéros simples de f, la méthode de Newton donne a_1, a_2 et a_3 comme points fixes de la fonction

$$g(x) = x - \frac{f(x)}{f'(x)} = x - \frac{x^3 - 4x + 1}{3x^2 - 4} = \frac{2x^3 - 1}{3x^2 - 4}.$$

Le lecteur pourra vérifier que pour obtenir une valeur approchée à 10^{-15} près de a_2 par exemple, il faut calculer une douzaine de termes de la suite (u_n) construite avec h, alors que 5 termes de la suite construite avec g suffisent. Avec la méthode de dichotomie, il faut environ 50 itérations.

Question 13 *Est-il vraiment nécessaire d'écrire un algorithme ici pour la méthode de Newton ?*

Une dernière remarque : l'estimation ci-dessus montre que la convergence est moins bonne quand le nombre M est grand, c'est-à-dire quand $f'(x)$ est proche de 0 sur I, et $f''(x)$ est grand sur I. La méthode de Newton est donc particulièrement efficace lorsque la racine que l'on cherche se trouve dans une région où la pente est grande ($|f'(x)| >> 0$), et où elle ne varie pas beaucoup ($|f''(x)| << 1$). En particulier, cette méthode doit bien marcher... pour les droites qui ne sont pas horizontales !

Chapitre 5

Calcul de primitives

5.1 Primitive d'une fonction continue

Définition 5.1.1 Soit f une fonction définie sur $\mathcal{D}$, et I un intervalle inclus dans $\mathcal{D}$. On dit qu'une fonction F est une primitive de f sur I lorsque

1. F est définie, continue et dérivable sur I ;
2. pour tout $x \in I$, $F'(x) = f(x)$.

Si f admet une primitive F sur I, alors il est clair que pour tout $C \in \mathbb{R}$, la fonction $G : x \mapsto F(x) + C$ est aussi une primitive de f sur I. En fait il n'y en a pas d'autre : si F est une primitive de f sur I, alors toutes les primitives de f sur I s'écrivent $x \mapsto F(x) + C$ pour un certain $C \in \mathbb{R}$, puisque $(F - G)'(x) = 0$ pour tout $x \in I$.

Voilà maintenant le résultat sur lequel repose le calcul intégral des fonctions continues :

Proposition 5.1.2 *Si f est une fonction continue sur un intervalle $[a, b]$, alors la fonction F définie par*

$$F : x \mapsto \int_a^x f(t)dt$$

est une primitive de f sur $[a, b]$. C'est la seule qui s'annule en a.

On utilise d'ailleurs les notations $\int f(x)dx$ ou $\int^x f(t)dt$ (**Attention :** pas $\int^x f(x)dx$) pour désigner l'ensemble des primitives de la fonction f. De ce théorème découle le résultat bien connu suivant

Proposition 5.1.3 *Soit f une fonction continue sur $[a, b]$. On a*

$$\int_a^b f(x)dx = [F(x)]_a^b = F(b) - F(a),$$

où F est une primitive quelconque de f sur $[a, b]$.

Voici une liste de primitives qu'il faut absolument connaître. Le lecteur devra à chaque fois s'interroger sur l'intervalle où ces primitives existent. On donne toutes les primitives de la fonction : le C des formules ci-dessous désigne un nombre réel quelconque.

$\int x^n dx = \frac{x^{n+1}}{n+1} + C,$ pour $n \neq -1$	$\int \frac{1}{x+a} dx = \ln\|x+a\| + C$
$\int e^{\alpha x} dx = \frac{e^{\alpha x}}{\alpha} + C,$ pour $\alpha \neq 0$	$\int \cos(ax) dx = \frac{\sin(ax)}{a} + C,$ pour $a \neq 0$
$\int \frac{1}{\sqrt{1-x^2}} dx = \arcsin x + C$	$\int \frac{1}{1+x^2} dx = \arctan x + C$

5.2 Trois techniques de calcul

5.2.1 Intégration par parties

Il arrive que l'on ait à intégrer un produit de fonctions. Bien entendu, le produit des primitives n'est pas une primitive du produit. Plus précisément, pour deux fonctions u et v dérivables, on a

$$(u.v)'(x) = u'(x).v(x) + u(x).v'(x)$$

On en déduit la formule d'intégration par parties :

Proposition 5.2.1 *Soit u et v deux fonctions de classe $\mathcal{C}^1$ sur $[a, b]$. On a*

$$\int_a^b u'(x)v(x)dx = [u(x)v(x)]_a^b - \int_a^b u(x)v'(x)dx$$

Cette formule est évidement très utile lorsque l'une des deux intégrales est beaucoup plus simple à calculer que l'autre. Soit par exemple

$$I = \int_0^{\pi/2} x \cos x dx$$

On pose $u(x) = x$ et $v'(x) = \cos x$. On a alors $u'(x) = 1$ et l'on peut prendre $v(x) = \sin x$ (un autre choix de primitive est tout à fait possible mais ne change pas le résultat du calcul). On

obtient donc
$$I = [x \sin x]_0^{\pi/2} - \int_0^{\pi/2} \sin x dx = \frac{\pi}{2} - [-\cos x]_0^{\pi/2} = \frac{\pi}{2} - 1$$

5.2.2 Changement de variable

La proposition qui suit est connue sous le nom de formule du changement de variable. Le lecteur doit noter que l'égalité ci-dessous peut être lue dans les deux sens, et qu'elle sert autant dans l'un que dans l'autre.

Proposition 5.2.2 *Soit f une fonction continue sur l'intervalle $[a, b]$. Soit aussi u une fonction continument dérivable de $[\alpha, \beta]$ dans $[a, b]$ avec $u(\alpha) = a$ et $u(\beta) = b$. On a*
$$\int_a^b f(x)dx = \int_\alpha^\beta f(u(t))u'(t)dt$$

Preuve: Si F est une primitive de f sur $[a, b]$, on a, pour tout t de $[\alpha, \beta]$,
$$(F \circ u)'(t) = F'(u(t)).u'(t) = f(u(t)).u'(t),$$
et il suffit d'intégrer :
$$\int_\alpha^\beta f(u(t))u'(t)dt = [F \circ u(t)]_\alpha^\beta = F(u(\beta)) - F(u(\alpha)) = F(b) - F(a),$$
ce qui prouve la proposition. □

Question 14 *Que suffit-il de savoir sur la fonction u pour être sûr que $u([\alpha, \beta]) \subset [a, b]$?*

Avec les notations différentielles que l'on a déjà rencontrée, si $x = u(t)$, on peut écrire $\frac{dx}{dt} = \frac{du}{dt} = u'(t)$, ou, en poussant un peu le bouchon (hum),
$$du = u'(t)dt.$$

On peut donner un sens mathématique à ce petit calcul, mais pour l'instant on doit se contenter d'y voir un moyen de retenir cette formule, voir de la mettre en pratique. En effet, si l'on note u la variable notée x dans la formule ci-dessus (ce qui ne change rien), on lit
$$\int_a^b f(u)du = \int_\alpha^\beta f(u(t))u'(t)dt.$$

Voici des exemples où l'on applique la formule du changement de variable dans chacun des deux sens.

• On veut d'abord calculer

$$I = \int_0^1 f(u)du = \int_0^1 \sqrt{1-u^2}du$$

On va simplifier grandement le calcul en posant $u(t) = \sin t$. On a $du = u'(t)dt = \cos t dt$ et $u(\alpha) = 0$ pour $\alpha = 0$, $u(\beta) = 1$ pour $\beta = \frac{\pi}{2}$. La formule ci-dessus lue de gauche à droite donne alors

$$I = \int_0^{\pi/2} \sqrt{1-\sin^2 t} \cos t dt.$$

Or sur l'intervalle $[0, \pi/2]$, $\sqrt{1-\sin^2 t} = \cos t$, donc

$$I = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos^2 t dt = \frac{1}{2}\int_0^{\frac{\pi}{2}} (1+\cos 2t)dt = \frac{1}{2}\left[t + \frac{\sin 2t}{2}\right]_0^{\pi/2} = \frac{\pi}{4}\cdot$$

On vient de calculer la surface d'un quart de disque de rayon 1, donné par l'équation $y^2 = 1 - x^2$, avec $x \in [0,1]$. Pour un disque de rayon R, on trouve de cette manière la valeur de son aire : πR^2.

• Calculons maintenant l'intégrale

$$J = \int_1^e \frac{(\ln(t))^2}{t} dt$$

On reconnait facilement dans la fonction à intégrer une expression de la forme $f(u(t))u'(t)$ avec $u(t) = \ln t$ (et donc $u'(t) = 1/t$) et $f(x) = x^2$. On a $u(1) = 0$, $u(e) = 1$ et, en lisant la formule de changement de variable de droite à gauche,

$$J = \int_0^1 u^2 du = \frac{1}{3}$$

5.2.3 Primitives de fraction rationnelles

Lorsque f est une fraction rationnelle, il existe un procédé dit de décomposition en éléments simples qui permet de trouver ses primitives. Rappelons d'abord que ces primitives n'existent que sur chaque intervalle inclus dans l'ensemble de définition de f. On donne maintenant une idée de ce procédé pour les fractions rationnelles du type

$$f(x) = \frac{\alpha x + \beta}{ax^2 + bx + c}\cdot$$

Il faut distinguer trois cas :

- Cas 1 : le dénominateur admet deux racines réelles distinctes x_1 et x_2. Dans ce cas on peut écrire

  $$f(x) = \frac{A}{x - x_1} + \frac{B}{x - x_2},$$

  où A et B sont deux réels.

- Cas 2 : le dénominateur admet une racine double x_0. Dans ce cas il existe A et B dans $\mathbb{R}$ tels que
$$f(x) = \frac{A}{(x-x_0)^2} + \frac{B}{x-x_0}$$
- Cas 3 : le dénominateur ne s'annule pas : on écrit
$$f(x) = A\frac{2ax+b}{ax^2+bx+c} + B\frac{1}{(x+\frac{b}{2a})^2 - \Delta}.$$

Le lecteur se persuadera qu'il connait les primitives de chacun des termes qui apparaissent ci-dessus. La question qui reste et de savoir déterminer les coefficients A et B dans chacun des cas qui précèdent. La méthode la plus simple consiste à réduire les expressions ci-dessus au même dénominateur, et d'identifier les coefficients.

Chapitre 6

Equations différentielles

6.1 Motivation

La modélisation mathématique des phénomènes du monde réel passe très souvent par l'écriture d'une équation différentielle, qui décrit les variations de la quantité que l'on veut étudier en fonction d'un paramètre. C'est encore une fois Isaac Newton qui a le premier écrit et étudié des équations différentielles. Son principe fondamental de la dynamique s'écrit par exemple

$$mx''(t) = F(x(t)),$$

où $t \mapsto x(t)$ décrit la trajectoire du centre de gravité d'un objet de masse m, soumis au champ de force $x \mapsto F(x)$. Il est d'ailleurs clair que pour connaître la position $x(t)$ de l'objet à l'instant t, il faut connaître non seulement la règle qui gouverne les variations de cette fonction, mais aussi la position et la vitesse initiale du centre de masse. Dans le cas d'un objet se déplaçant verticalement sous l'action de l'attraction terrestre, supposée constante dans la région où le mouvement à lieu, et compte tenu de la résistance de l'air, l'équation différentielle ci-dessus s'écrit

$$mx''(t) = -kx'(t) + mg,$$

où k, g sont des constantes. Un autre exemple célèbre est celui du pendule : une masse m est suspendue à l'extremité d'une corde de longueur ℓ dont l'autre extrémité est fixe. L'angle $\theta(t)$ que fait, à l'instant t, le fil avec la verticale vérifie la relation

$$\theta''(t) + \frac{g}{l}\sin(\theta(t)) = 0.$$

Cette équation n'a pas de solution que l'on puisse exprimer simplement avec des fonctions connues. Il faut avoir à l'esprit que c'est le cas de la plupart des équations différentielles, même si les exercices proposés aux étudiants consistent souvent à trouver une solution explicite - c'est plus facile ! L'étude qualitative d'une équation différentielle consiste à décrire certaines propriétés des solutions sans les calculer, mais nous ne pratiquerons pas ce sport ici.

On trouve des équation différentielles dans tous les domaines de la physique. Par exemple la charge électrique $q(t)$ d'un condensateur dans un circuit RLC (résistance-bobine-condensateur), alimentée par une source de courant alternatif, doit vérifier l'équation

$$Lq''(t) + Rq'(t) + \frac{1}{C}q(t) = U\cos(\omega t).$$

La biologie est aussi une source importante d'équations différentielles. La modélisation des systèmes prédateurs-proies, due à Volterra, est particulièrement éclairante. Au niveau de ce cours, on peut aussi penser à l'évolution d'une population de bactéries : on peut être amené à penser que le taux de croissance de leur nombre est proportionnel à ce nombre. Celui-ci est alors décrit par l'équation différentielle

$$N'(t) = kN(t),$$

où k est une constante, que l'on pourra ajuster de sorte que la solution de l'équation coïncide au mieux avec les données expérimentales.

Signalons enfin que les mathématiques elles-mêmes peuvent être source d'équations différentielles. Si l'on cherche les fonctions dérivables y telles que $y(a+b) = y(a)y(b)$ pour tous réels a, b, on arrive très vite à l'équation $y' = ky$ où $k = y'(0)$. Il est d'ailleurs important de noter que résoudre l'équation

$$y' = f(x, y),$$

c'est trouver les courbes $(x, y(x))$ dont le vecteur tangent au point d'abscisse x est $(1, f(x, y(x)))$.

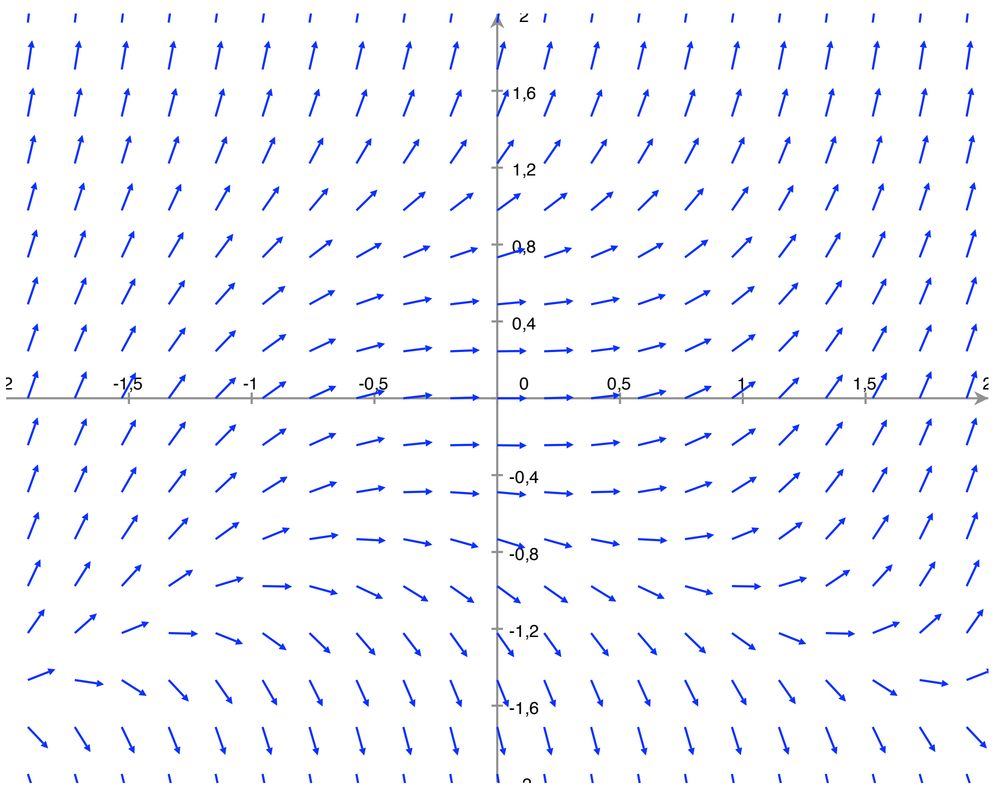


FIGURE 6.1 – Le champ de vecteurs $f(x, y) = (1, x^2 + y^3)$

Il est temps de préciser ce qu'on entend par "résoudre une équation différentielle". On l'écrit pour les équations d'ordre 1.

Définition 6.1.1 Une équation différentielle d'ordre 1 s'écrit

$$(ED1) \qquad y' = F(t, y),$$

où F est une fonction continue sur $I \times U$, I et U étant deux intervalles de $\mathbb{R}$. On dit que le couple (J, y), constitué d'un intervalle $J \subset I$ et d'une fonction y définie, continue et dérivable sur J, est une solution de l'équation lorsque

1. pour tout $t \in J$, on a $y(t) \in U$.
2. pour tout $t \in J$, on a $y'(t) = F(t, y'(t))$.

On est bien sûr obliger de vérifier la condition (1) pour que la condition (2) ait un sens. On verra des plus loin des exemples où il n'existe pas de solution pour lesquelles $J = I$. Autrement dit, en général, même si la fonction F est "gentille" sur $\mathbb{R} \times \mathbb{R}$, on ne peut pas espérer avoir de solution de l'équation (ED1) sur $\mathbb{R}$ tout entier.

Pour fixer les idées, on va étudier un type particulier d'équations différentielles, les équations linéaires. Dans le cas des équations d'ordre 1, on peut écrire les solutions à partir de fonctions que vous connaissez. C'est aussi le cas pour les équations d'ordre 2 à coefficients constants, mais on rappelle encore une fois que ce n'est pas le cas en général.

6.2 Equations différentielles linéaires d'ordre 1

On considère dans cette section pour commencer les équations différentielles de la forme

$$(EDL1) \qquad y' = a(t)y + b(t),$$

où a et b sont deux fonctions définies et continues sur un intervalle $I \subset R$. Ce sont des équations du type (ED), d'ordre 1, avec F définie sur $I \times \mathbb{R}$ par $F(t, y) = a(t)y + b(t)$. Dans ce cas particulier, la condition (1) ci-dessus est donc automatiquement vérifiée !

Notant H la partie de H qui dépend de y, ici $H(t, y) = a(t)y$, on voit facilement que H est linéaire par rapport à la variable y :

$$Ht, \lambda_1 y_1 + \lambda_2 y_2) = \lambda_1 H(t, y_1) + \lambda_2 H(t, y_2),$$

pour tous $(\lambda_1, \lambda_2) \in \mathbb{R}^2$ et tous $(y_1, y_2) \in \mathbb{R}^2$. On parle donc d'équations différentielles linéaires d'ordre 1.

Nous allons voir que pour ce type d'équations, il est possible d'exprimer toutes les solutions à l'aide d'intégrales et de fonctions connues. **Attention !** Il ne faut surtout pas croire que c'est le cas de toutes les équations différentielles...

6.2.1 Le principe de superposition

La linéarité de l'équation est une propriété très utile. On a en particulier la

Proposition 6.2.1 *Soit (J, y_1) une solution de l'équation (EDL1). Toute solution (J, y_2) de (EDL1) s'écrit $y_2 = y_1 + z$, où z est solution sur J de l'équation différentielle homogène associée :*

$$(H) \qquad z' = a(t)z.$$

Preuve: Pour tout $t \in J$, on a $(y_1)'(t) = a(t)y_1(t) + b(t)$ et $(y_2)'(t) = a(t)y_2(t) + b(t)$. On a donc, par soustraction

$$(y_2)'(t) - (y_1)'(t) = a(t)(y_2(x) - y_1(x)),$$

et, posant $z = y_2 - y_1$, il suffit de remarquer que $z' = (y_2 - y_1)' = (y_2)' - (y_1)'$. □

Autrement dit, pour trouver **TOUTES** les solutions de (EDL1), il suffit de
- trouver l'ensemble des solutions de l'équation homogène associée ;
- trouver **UNE** solution de (EDL1).

6.2.2 Solutions de l'équation homogène associée

Proposition 6.2.2 *Soit a une fonction continue sur $I \subset \mathbb{R}$. L'ensemble des solutions de l'équation*

$$(H) \qquad z' = a(x)z$$

sur I est

$$\mathcal{S}_H = \{z : t \mapsto Ce^{A(t)},\ C \in \mathbb{R}\},$$

où $A(t)$ est une primitive de la fonction a sur I.

Remarque 6.2.3 *Dans le cas de l'équation (H), on peut donc trouver des solutions sur tout l'intervalle I. On parle de solutions globales.*

Preuve: Il est d'abord très simple de vérifier que pour n'importe quel C, la fonction $t \mapsto Ce^{-A(t)}$ est $\mathcal{C}^1$ sur I et vérifie l'équation.
Soit maintenant (I, z) une solution de l'équation. La fonction $w : t \mapsto e^{A(t)}z(t)$ est constante sur l'intervalle I : en effet, pour tout $t \in I$, on a

$$w'(t) = e^{-A(t)}z'(tx) - a(t)e^{-A(t)}z(t) = e^{-A(t)}(z'(t) - a(t)z(t)) = 0.$$

Donc il existe $C \in \mathbb{R}$ tel que, pour tout $t \in I$, $w(t) = C$, ou encore $z(t) = Ce^{A(t)}$. □

On peut se demander comment l'on a deviné la forme des solutions. Une façon de procéder est de raisonner par condition nécessaire : si (I, z) est une solution de l'équation, on doit avoir, pour tout $t \in I$,

$$z'(t) = a(t)z(t).$$

On est alors bien sûr tenté de diviser les deux membres de cette égalité par $z(t)$, mais il faut pour cela faire l'hypothèse que $z(t) \neq 0$ pour tout $t \in I$. Compte tenu du résultat qui précède, ce n'est pas un réel problème : les solutions de l'équation homogène $z' = a(t)z$ ne s'annulent jamais, sauf s'il s'agit de la fonction constante nulle ($C = 0$).

Continuons donc, en supposant que z ne s'annule jamais sur I : on arrive à

$$\frac{z'(t)}{z(t)} = a(t),$$

et en intégrant chacun des membres de cette égalité,

$$\ln|z(t)| - \ln|z(t_0)| = \int_{t_0}^{x} a(s)ds = A(t).$$

On a donc

$$|z(t)| = Ke^{A(t)},$$

où $K = e^{\ln|z(t_0)|} = |z(t_0)|$ est une constante strictement positive. On doit donc avoir $z(t) = \epsilon(t)Ke^{A(t)}$, où $\epsilon(t) = \pm 1$. Mais puisque z doit être continue, la fonction ϵ est nécessairement contante sur I, et l'on obtient bien $z(t) = Ce^{A(t)}$ pour une constante $C \in \mathbb{R}$.

6.2.3 Recherche d'une solution : variation de la constante

Dans ce paragraphe, on donne une méthode qui permet toujours de trouver une solution. Il est important de comprendre que dans la circonstance présente, tous les moyens sont bon ! Par exemple, il est très simple de trouver une solution de l'équation $y' = 1$, et employer la méthode de variation de la constante dans ce cas est très exagéré...

L'idée est la suivante : on cherche une solution (I, y) de (EDL1) sous la forme

$$y(t) = C(t)e^{A(t)},$$

où C est une fonction $\mathcal{C}^1$ à déterminer, et $A(t)$ est une primitive de a comme ci-dessus. De manière un peu rapide, on dit que l'on fait varier la constante C qui apparaît dans l'expression de la solution de l'équation homogène (H) associée à (EDL1).

Pour que cette fonction soit une solution, il faut et il suffit que

$$C'(t)e^{A(t)} + a(t)C(t)e^{A(t)} = y'(t) = a(t)y(t) + b(t) = a(t)C(t)e^{A(t)} + b(t),$$

c'est-à-dire

$$C'(t) = b(t)e^{-A(t)}$$

et il suffit donc de prendre pour $C(t)$ une primitive de $t \mapsto b(t)e^{-A(t)}$, c'est-à-dire

$$C(t) = \int_{t_0}^{t} b(s)e^{A(s)}ds,$$

où $t_0 \in I$ est un point quelconque.

6.2.4 L'ensemble des solutions

Au total, on a trouvé toutes les solutions sur I de l'équation (EDL1), et l'on a montré la

Proposition 6.2.4 *Soient a et b deux fonctions continues sur un intervalle I de $\mathbb{R}$. L'ensemble $\mathcal{S}$ des solutions sur I de l'équation*

$$y' = a(t)y + b(t)$$

est

$$\mathcal{S} = \left\{ (I, y),\ y : t \mapsto e^{A(t)}\big(C + \int_{t_0}^{t} e^{-A(s)} b(s)ds\big), C \in \mathbb{R} \right\},$$

où $A(t)$ est une primitive de $a(t)$ sur I, et t_0 un point quelconque de I.

6.3 Equations différentielles linéaires du second ordre à coefficients constants

Une équation différentielle linéaire du second ordre est une équation différentielle qui s'écrit

$$(EDL2) \qquad y'' + p(x)y' + q(x)y = f(x)$$

pour certaines fonctions p, q et f continues sur un intervalle I de $\mathbb{R}$. On ne va ici considérer que le cas où p et q sont des fonctions constantes, car dans ce cas, et dans ce cas uniquement, on est capable de donner l'ensemble des solutions comme dans le cas des équations linéaires d'ordre 1.

6.3.1 Principe de superposition

Cette équation étant linéaire, on a aussi le principe de superposition :

Proposition 6.3.1 *Soit (J, y_1) une solution de l'équation (EDL2). Toute solution (J, y_2) de (EDL2) s'écrit $y_2 = y_1 + z$, où z est solution sur J de l'équation différentielle homogène associée :*

$$(H) \qquad z'' + pz' + qz = 0.$$

On laisse au lecteur le soin de prouver cette proposition. Comme pour les équations linéaires d'ordre 1, on voit que pour trouver **TOUTES** les solutions de (EDL2), il suffit de

- trouver l'ensemble des solutions de l'équation homogène associée ;
- trouver **UNE** solution de (EDL2).

On ne donnera pas ici de méthode générale pour trouver une solution de (EDL2). Une telle méthode existe (c'est aussi une méthode de variation des constantes), mais est plus difficile à mettre en oeuvre. On se contente de donner les solutions de l'équation homogène (H) associée.

6.3.2 Equations homogènes

On cherche les solutions de l'équation

$$(H) \qquad z'' + pz' + qz = 0,$$

où p et q sont des nombres réels fixés.

L'idée de départ consiste à chercher des solutions de (H) de la forme $z : t \mapsto e^{rt}$ pour un certain nombre r. En calculant z' et z'' pour cette fonction, on voit que c'est une solution si et seulement si r est une solution de l'équation caractéristique associée à (H) :

$$(*) \qquad r^2 + pr + q = 0.$$

On peut alors démontrer la

Proposition 6.3.2 *Soit $\Delta = p^2 - 4q$ le discriminant de l'équation caractéristique (*) associée à (H).*

1. *Si $\Delta > 0$, l'ensemble des solutions sur $\mathbb{R}$ de l'équation (H) est*
$$\mathcal{S}_H = \{t \mapsto C_1 e^{r_1 t} + C_2 e^{r_2 t},\ C_1, C_2 \in \mathbb{R}\},$$
où $r_1, r_2 \in \mathbb{R}$ sont les racines de (*).
2. *Si $\Delta = 0$, l'ensemble des solutions sur $\mathbb{R}$ de l'équation (H) est*
$$\mathcal{S}_H = \{t \mapsto e^{r_0 t}(C_1 t + C_2),\ C_1, C_2 \in \mathbb{R}\},$$
où $r_0 \in \mathbb{R}$ est la racine de (*).
3. *Si $\Delta < 0$, l'ensemble des solutions sur $\mathbb{R}$ de l'équation (H) est*
$$\mathcal{S}_H = \{t \mapsto e^{-pt/2}(C_1 \cos(\delta t) + C_2 \sin(\delta t),\ C_1, C_2 \in \mathbb{R}\},$$
où $\delta \in \mathbb{R}^+$ vérifie $\delta^2 = -\Delta$.

Preuve: • On commence par le cas où $\Delta = 0$. Soit $z(t)$ une solution de (H). On pose $w(t) = e^{-r_0 t} z(t) = e^{pt/2} z(t)$. On a

$$\begin{aligned}
w'(t) &= \frac{p}{2} e^{pt/2} z(t) + e^{pt/2} z'(t) \\
w''(t) &= \frac{p^2}{4} e^{pt/2} z(t) + p e^{pt/2} z'(t) + e^{pt/2} z''(t) = e^{pt/2}(qz + pz' + z'') = 0.
\end{aligned}$$

Donc $w(t) = C_1 t + C_2$ pour certains réels C_1, C_2, et $z(t)$ est de la forme annoncée. Réciproquement, toutes les fonctions de cette forme sont des solutions de (H), ce qui prouve la proposition dans ce cas.

• Considérons maintenant le cas où $\Delta > 0$. Soit $z(t)$ une solution de (H). Notant $r_1 = \frac{-p-\sqrt{\Delta}}{2}$, on pose $w(t) = e^{-r_1 t} z(t)$. On a

$$\begin{aligned}
w'(t) &= r_1 e^{-r_1} z(t) + e^{-r_1 t} z'(t) \\
w''(t) &= (r_1)^2 e^{-r_1} z(t) - 2r_1 e^{-r_1 t} z'(t) + e^{-r_1 t} z''(t) \\
&= [(r_1)^2 - q] e^{-r_1} z(t) - [2r_1 + p] e^{-r_1 t} z'(t),
\end{aligned}$$

où on a utilisé le fait que $z'' = -pz' - qz$. Un calcul simple montre que

$$(r_1)^2 - q = -pr_1 - 2q = -r_1\sqrt{\Delta} \text{ et } 2r_1 + p = -\sqrt{\Delta}.$$

On a donc

$$w''(t) = \sqrt{\Delta}[-r_1 e^{-r_1} z(t) + e^{-r_1 t} z'(t)] = \sqrt{\Delta}\, w'(t).$$

Posant $v = w'$, on a $v' = \sqrt{\Delta} v$, donc $v(t) = A e^{\sqrt{\Delta} t}$, et on en déduit que

$$w(t) = C_2 e^{\sqrt{\Delta} t} + C_1,$$

pour certains réels C_1, C_2. Du coup

$$z(t) = C_2 e^{\sqrt{\Delta} t} e^{r_1 t} + C_1 e^{-r_1 t} = C_1 e^{-r_1 t} + C_2 e^{r_2 t},$$

comme annoncé. Réciproquement, toutes les fonctions de cette forme vérifient (H), et on a terminé la preuve de la proposition dans le cas $\Delta > 0$.

• On admet le résultat dans le cas $\Delta < 0$. $\square$

6.4 Un peu de théorie générale

6.4.1 Définitions

Définition 6.4.1 Soit F une fonction de $\mathbb{R} \times \mathbb{R}^n$ dans $\mathbb{R}$, définie sur $U \times \mathcal{D}$, où U est un intervalle de $\mathbb{R}$. Si I est un intervalle de $\mathbb{R}$ et $y : x \mapsto y(x)$ une fonction définie sur I, de classe $\mathcal{C}^n$, on dit que (I, y) est une solution de l'équation différentielle d'ordre n

$$(ED) \qquad y^{(n)} = F(x, y, y', y'', \ldots, y^{(n-1)})$$

lorsque $I \subset U$ et, pour tout $x \in I$, on a $(y(x), y'(x), y''(x), \ldots, y^{(n-1)}(x)) \in \mathcal{D}$ et

$$y^{(n)} = F(x, y(x), y'(x), y''(x), \ldots, y^{(n-1)}(x)).$$

Question 15 *Donner la fonction F, U et $\mathcal{D}$ dans les exemples précédents.*

Remarque 6.4.2 *On dit parfois que les équations différentielles de la forme (ED) sont des équations différentielles résolues (la dérivée de plus haut degré s'écrit comme fonction des dérivées d'ordre inférieur), et l'on s'autorise à considérer comme équations différentielles des expressions de la forme*

$$G(x, y, y', \ldots, y^{(n)}) = 0.$$

Cependant la résolution de ce genre d'équations passe toujours par une mise sous la forme (ED). Par exemple l'expression $xy' + y = 0$ n'est pas une équation différentielle résolue, et ne peut pas l'écrire sous la forme (ED) sur $\mathbb{R}$ tout entier : on n'obtient au mieux qu'une équation différentielle résolue ($y' = -y/x$) sur chacun des intervalles $U =]-\infty, 0[$ et $U =]0, +\infty[$.

Attention ! On ne peut pas toujours trouver de solution définie sur U tout entier, même pour des équations différentielles simples. Soit par exemple F la fonction définie par $F(x, y) = 1+y^2$. Son domaine de définition est $U \times \mathcal{D}$ avec $U = \mathbb{R}$ et $\mathcal{D} = \mathbb{R}$. L'équation différentielle

$$y' = F(x, y) = 1 + y^2$$

a pour solution $y = \tan x$ sur chaque intervalle I où cette fonction est définie (par exemple $I =]-\pi/2, \pi/2[$). Mais il n'y a pas de solution définie sur $U = \mathbb{R}$ tout entier.

Définition 6.4.3 On dit que (I, y) est une solution globale de l'équation différentielle (ED) lorsque $I = U$.

Supposons que l'on ait déterminé une solution (I, y) de l'équation différentielle (ED) par un procédé quelconque, et que ce ne soit pas une solution globale ($I \neq U$). Est-il possible de trouver un intervalle J plus grand que I sur lequel la fonction y est encore solution de (ED) ? On vient de voir que ça n'est pas toujours le cas : la solution $(]-\pi/2, \pi/2[, x \mapsto \tan x)$ de l'exemple précédent ne peut pas être prolongée. Par contre, si on avait obtenu la solution $(]-1,1[, x \mapsto \tan x)$, on aurait pu la prolonger en $(]-\pi/2,\pi/2[, x \mapsto \tan x)$.

Définition 6.4.4 Soit (I_1, y_1) et (I_2, y_2) deux solutions de l'équation différentielle (ED). On dit que (I_2, y_2) prolonge (I_1, y_1) lorsque I_2 contient I_1, et y_2 coïncide avec y_1 sur I_1 :

$$\text{pour tout } x \in I_1,\ y_2(x) = y_1(x).$$

On dit que (I, y) est une solution maximale de (ED) lorsqu'elle n'admet pas d'autre prolongement qu'elle-même.

6.5 Problème de Cauchy

On vient de le voir, une équation différentielle a en général beaucoup de solutions, même si l'on ne s'intéresse qu'aux solutions maximales. D'un autre côté, on a vu par exemple que la trajectoire $M(t)$ d'un point matériel au cours du temps est complètement déterminé par l'équation de Newton (une équation différentielle d'ordre 2), à condition de préciser la position et la vitesse initiale du point. Ceci conduit à la notion de problème de Cauchy pour l'équation différentielle (ED), pour lequel on espère avoir une solution unique.

Définition 6.5.1 Soit F une fonction de $\mathbb{R} \times \mathbb{R}^n$ dans $\mathbb{R}$, définie sur $U \times \mathcal{D}$, où U est un intervalle de $\mathbb{R}$, et $x_0 \in U$. On appelle problème de Cauchy (en x_0) pour l'équation différentielle

$$(ED) \qquad y^{(n)} = F(x, y, y', y'', \ldots, y^{(n-1)})$$

la recherche des solutions de (ED) vérifiant la condition initiale

$$y(x_0) = y_0, y'(x_0) = y_1, \ldots, y^{(n-1)}(x_0) = y_{n-1},$$

où $(y_0, y_1, \ldots, y_{n-1})$ est fixé dans $\mathcal{D}$.

L'exemple suivant montre que la situation n'est pas aussi simple qu'on pourrait le souhaiter : il arrive qu'un problème de Cauchy ait plusieurs solutions.

Exemple 6.5.2 *La fonction nulle est une solution sur $\mathbb{R}$ de l'équation différentielle $y' = 3|y|^{2/3}$. La fonction $x \mapsto x^3$ est également une solution sur $\mathbb{R}$, et le problème de Cauchy*

$$\begin{cases} y' = 3|y|^{2/3}, \\ y(0) = 0, \end{cases}$$

admet donc au moins deux solutions.

Voici cependant une réponse satisfaisante, qui porte le nom de théorème de Cauchy-Lipschitz. Sous certaines hypothèses relativement faibles sur la fonction F, un problème de Cauchy admet une unique solution localement, c'est à dire sur un intervalle I contenant x_0. **Attention !** On n'a, en général, aucune information sur l'intervalle I d'existence de la solution. On se contente d'un énoncé pour les équations différentielles d'ordre 1, mais ce résultat est très général. On fait une hypothèse sur la régularité de F un peu plus forte que nécessaire pour simplifier les choses.

> **Proposition 6.5.3** *Soit $F : \mathbb{R} \times \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ une fonction définie sur $U \times \mathcal{D}$, où U est un intervalle ouvert de $\mathbb{R}$. Soit aussi $x_0 \in U$ et $y_0 \in \mathcal{D} \subset \mathbb{R}$. On considère le problème de Cauchy*
>
> $$(P) \qquad \begin{cases} y' = F(x,y), \\ y(x_0) = y_0. \end{cases}$$
>
> *Si F est de classe $\mathcal{C}^1$ sur $U \times \mathcal{D}$, alors il existe un intervalle $I \subset U$ contenant x_0 et une fonction y de classe $\mathcal{C}^1$ sur I solution de (P). De plus si (J, y_1) est une autre solution de (P), avec $x_0 \in J$, alors $y_1(x) = y(x)$ pour tout $x \in I \cap J$.*

Remarque 6.5.4 *Ce théorème peut aussi s'énoncer de la manière suivante : sous les hypothèses précédentes, le problème de Cauchy (P) admet une unique solution maximale.*

Question 16 *Pourquoi le Théorème de Cauchy-Lipschitz ne s'applique-t-il pas dans le cas de l'exemple précédent ?*

Dans le cas des équations linéaires d'ordre 1, on a vu que $F(x,y) = -a(x)y + f(x)$. Lorsque a et f sont continues sur U, la fonction F est continue sur $U \times \mathbb{R}$, et est dérivable par rapport à y avec $\partial_y F(x,y) = -a(x)$. En particulier $\partial_y F$ est continue sur $U \times \mathbb{R}$, et le Théorème de Cauchy-Lipschitz s'applique : pour $x_0 \in U$ et $y_0 \in \mathbb{R}$ donnés, il existe un intervalle $I \subset U$ contenant x_0 et une fonction y de classe $\mathcal{C}^1$ sur I qui est l'unique solution sur I du problème de Cauchy

$$\begin{cases} y' = -a(x)y + f(x), \\ y(x_0) = y_0. \end{cases}$$

Pour ce type d'équations, on a déjà obtenu bien mieux : on connaît toutes les solutions de l'équation, et il est très facile de vérifier que le problème de Cauchy ci-dessus admet une unique solution : c'est la fonction de l'ensemble $\mathcal{S}$ correspondant à $\alpha = y_0$. On sait d'ailleurs aussi que l'on a $I = U$.

Question 17 *Quel résultat déjà évoqué retrouve-t-on pour $y_0 = 0$?*

Autrement dit, le théorème de Cauchy-Lipschitz n'est pas d'une grande utilité dans le cas où l'on sait déterminer explicitement l'ensemble des solutions. Mais, rappelons-le, cela est extrêmement rare.

Exercice 6.5.5 *Montrer que le problème de Cauchy ($y' = (1+x)^x e^{\cos y}$; $y(0) = y_0$) admet une solution unique au voisinage de $x_0 = 0$.*

6.6 Schéma d'Euler

Il est maintenant bien clair qu'en général, on ne peut pas écrire les solutions d'une équation différentielle à l'aide de fonctions connues ou même d'intégrales de telles fonctions. Dans la pratique, il faut être capable de calculer des solutions approchées d'une équation différentielle. Il existe de nombreuses méthodes pour ce faire, certaines extrêmement performantes, mais nous nous contenterons de décrire la plus simple.

Soit donc $F : U \times \mathcal{D} \to \mathbb{R}$ une fonction vérifiant les conditions du Théorème de Cauchy-Lipschitz, et $(x_0, y_0) \in U \times \mathcal{D}$ un point fixé. On cherche à déterminer une solution approchée du problème de Cauchy

$$(P) \qquad \begin{cases} y' = F(x,y), \\ y(x_0) = y_0. \end{cases}$$

sur un intervalle de la forme $[x_0, x_0 + a]$. La méthode d'Euler consiste à découper l'intervalle en N sous-intervalles $[x_j, x_{j+1}]$, $j \in \{0, \dots N-1\}$, et à approcher la courbe représentative de la solution y sur $[x_j, x_{j+1}]$ par sa tangente en x_j. Autrement dit, on veut poser

$$y_{app}(x) = y'(x_j)(x - x_j) + y(x_j), \text{ pour } x \in [x_j, x_{j+1}].$$

Evidemment, cette formule n'a pas d'intérêt : on ne sait pas calculer $y(x_j)$ et $y'(x_j)$. On travaille donc par récurrence : on pose d'abord, pour $x \in [x_0, x_1]$,

$$y_{app}(x) = z_0(x - x_0) + y_0.$$

On pose alors $y_1 = y_{app}(x_1) = (x_1 - x_0)F(x_0, y_0) + y_0$, et on recommence. A l'étape j, on pose, pour $x \in [x_j, x_{j+1}]$,

$$\begin{cases} y_j = y_{app}(x_j) = (x_j - x_{j-1})F(x_{j-1}, y_{j-1}) + y_{j-1} \\ y_{app}(x) = F(x_j, y_j)(x_j - x_{j+1}) + y_j. \end{cases}$$

On obtient ainsi une fonction y_{app} affine par morceaux, dont la courbe représentative est relativement proche de la vraie solution y du problème de Cauchy. La Figure 6.6 ci-dessous donne la représentation graphique de y_{app} et de y pour le problème de Cauchy

$$\begin{cases} y' = y + 1, \\ y(0) = 0. \end{cases}$$

Dans ce cas, et on a vu comment le montrer, la vraie solution est $y(x) = e^x - 1$. On a utilisé le schéma d'Euler sur l'intervalle [0,1], en découpant cet intervalle en $N = 2, 4$ et 20 sous-intervalles de même longueur. Il semble sur ce cas que l'approximation est d'autant meilleure que le nombre N de sous intervalle est grand, ou, ce qui revient au même, que le pas, c'est-à-dire la longueur de chaque sous intervalle, soit petit. On donne pour finir un résultat qui

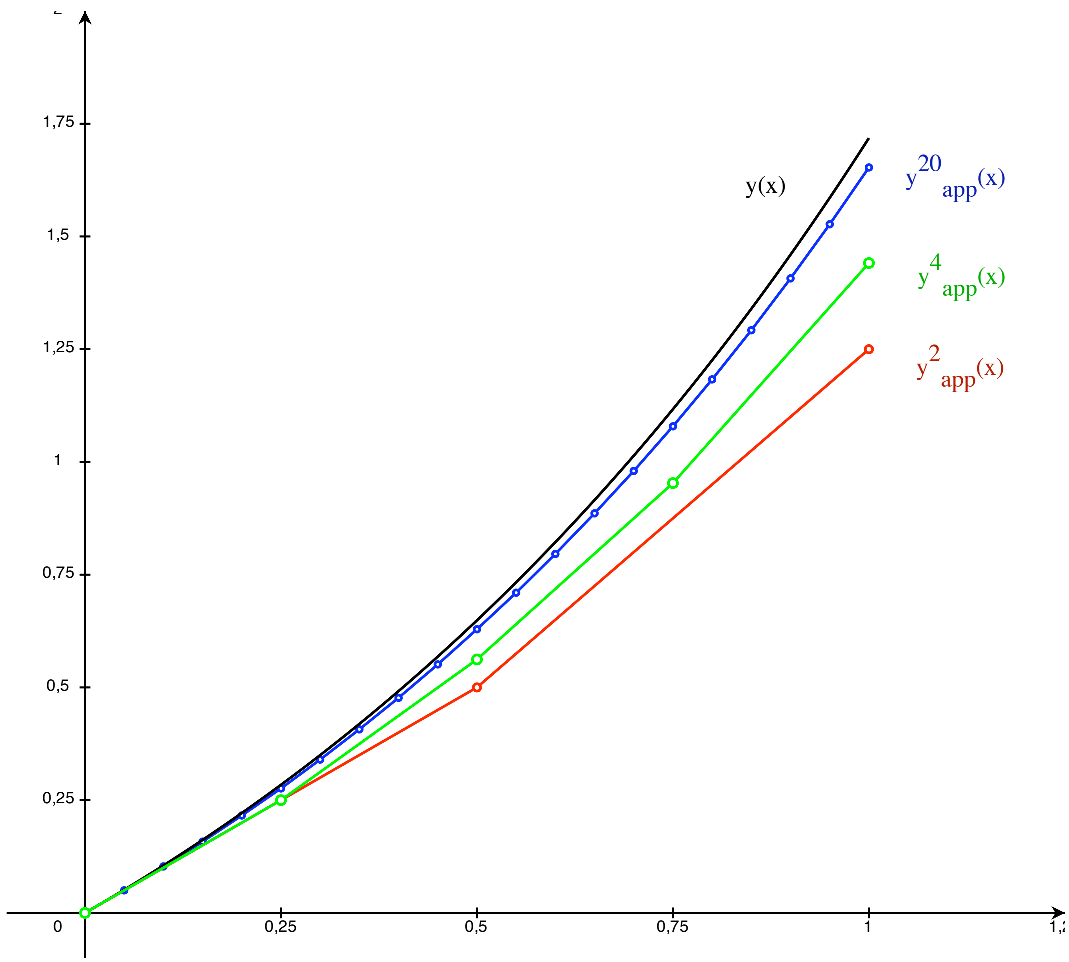


FIGURE 6.2 – Méthode d'Euler : comparaison entre solution approchée et vraie solution

va dans ce sens, avec des hypothèses un peu fortes mais qui permettent d'obtenir un énoncé lisible.

Proposition 6.6.1 *Soit F une fonction vérifiant les hypothèses du Théorème de Cauchy-Lipschitz sur $U \times \mathcal{D}$. On suppose de plus qu'il existe $M > 0$ tel que*

$$|F(x,y) - F(x',y')| \leq M(|x - x'| + |y - y'|), \text{ et } |F(x,y)| \leq M.$$

Soit y la solution du problème de Cauchy (P) ci-dessus, et y_{app} la fonction affine par morceaux obtenue par le schéma d'Euler sur l'intervalle $[a = x_0, b = x_N]$, avec pas $h = (b-a)/N$. Pour tout $n \leq N$ on a

$$|y(x_n) - y_{app}(x_n)| \leq (M+1)(e^{M(x_n - a)} - 1)h.$$