Les problèmes du numéro 545

Daniel PERRIN

1 Le château d'eau

1.1 Description

Il s'agit d'une partie $\mathscr{C}$ d'un hyperboloïde à une nappe, de révolution [1], c'est-à-dire obtenu par la rotation d'une hyperbole, située par exemple dans le plan xOz, autour de l'axe (Oz). On donne le diamètre d de la base, celui D de la section supérieure et la hauteur h du château d'eau. En fait nous utiliserons plutôt comme paramètres les rayons $r = d/2$ et $R = D/2$.

L'énoncé stipule : *Le cercle supérieur est tourné de* $90°$ *par rapport au cercle de base.* On peut comprendre cette indication en imaginant qu'on a un tronc de cône dont les faces sont les deux cercles, qu'on fixe le cercle de base et qu'on tourne le cercle supérieur de 90°, en entraînant les génératrices. Autrement dit, si $A = (r, 0, 0)$ est un point de la base, si $B_0 = (R, 0, h)$ est le point du cercle supérieur situé dans le même plan xOz, si $B = (0, R, h)$ est le point du cercle supérieur "tourné de 90°" à partir de B_0, la droite (AB) est une génératrice de l'hyperboloïde. Si M est un point de cette droite on a $\overrightarrow{AM} = t\overrightarrow{AB}$ avec $t \in [0, 1]$, ce qui donne une représentation paramétrique de $[AB]$:

$$M = (r(1-t), Rt, ht), \ t \in [0, 1].$$

On en déduit que le rayon de la section de $\mathscr{C}$ à la hauteur ht est $r(t)$ avec $r(t)^2 = r^2(1-t)^2 + R^2t^2$.

1.2 Calcul du volume

On considère une tranche infinitésimale de $\mathscr{C}$ située entre les plans de cotes ht et $h(t + dt)$. On peut l'assimiler à un cylindre [2] et son volume est alors $dV(t) = \pi r(t)^2 h dt$ et le volume total est $V = \int_0^1 \pi r(t)^2 h \, dt$. Le calcul est immédiat et donne $V = \dfrac{1}{3}\pi(r^2 + R^2)h$. Avec les diamètres on a $V = \dfrac{1}{12}\pi(d^2 + D^2)h$.

---

1. L'énoncé ne le précise pas, mais c'est sous-entendu dans les expressions *cercle de base*, *cercle supérieur*.
2. Je traite la question comme le ferait un physicien. Le lecteur pointilleux qui voudrait une explication plus mathématique pourra consulter :
https ://www.imo.universite-paris-saclay.fr/ perrin/interdisciplines/Cours2grandeurs.pdf

1.3 Quelques précisions

En appliquant une rotation d'axe (Oz) et d'angle $\theta \in [0, 2\pi]$ on obtient la représentation paramétrique de $\mathscr{C}$:

$$M = (r(1-t)\cos\theta - Rt\sin\theta, r(1-t)\sin\theta + Rt\cos\theta, Rt).$$

Son équation cartésienne est :

$$h^2(x^2+y^2) - (r^2+R^2)z^2 + 2r^2hz - r^2h^2 = 0.$$

L'hyperbole section de $\mathscr{C}$ par le plan $y = 0$ a pour équation

$$h^2x^2 - (r^2+R^2)z^2 + 2r^2hz - r^2h^2 = 0.$$

On notera que le minimum du rayon $r(t)$ de la section est atteint pour $t = \dfrac{r^2}{R^2+r^2}$ et que son carré vaut $\dfrac{r^2R^2}{R^2+r^2}$, plus petit que r^2 et R^2.

2 Fonctions symétriques

On a trois réels non nuls x, y, z vérifiant $yz + zx + xy = 0$ et il s'agit de calculer $m := \dfrac{y+z}{x} + \dfrac{z+x}{y} + \dfrac{x+y}{z}$ c'est-à-dire

$$m = \frac{y^2z + yz^2 + z^2x + zx^2 + x^2y + xy^2}{xyz}.$$

C'est un petit calcul de fonctions symétriques. Si N est le numérateur de cette fraction, c'est un polynôme symétrique, donc il s'écrit avec les fonctions symétriques élémentaires, précisément on a :

$$N = (yz + zx + xy)(x + y + z) - 3xyz,$$

et avec l'hypothèse on en déduit $m = -3$.

3 D'un triangle à l'autre

Il s'agit de construire à la règle et au compas un triangle équilatéral de même aire qu'un triangle ABC donné. On considère le pied de la hauteur issue de A, soit H, et le milieu A' de $[BC]$. On pose $a = BC$ et $h = AH$, de sorte que l'on a $\mathscr{A}(ABC) = \frac{1}{2}ah$. Si u est le côté d'un triangle équilatéral, son aire est $u^2\frac{\sqrt{3}}{4}$, de sorte qu'il s'agit de trouver u vérifiant $u^2 = 2ah/\sqrt{3}$.

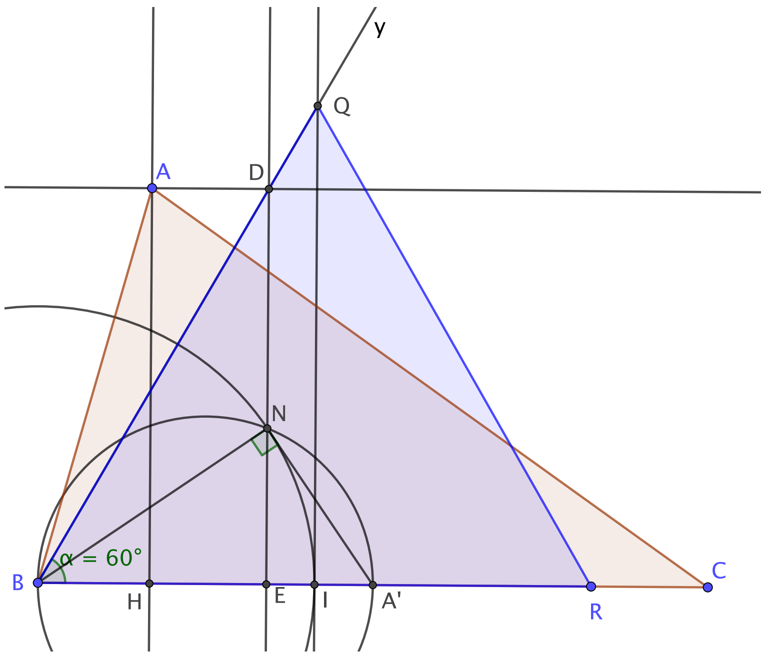

FIGURE 1 –

On construit pour cela un angle de 60° en B, dont un côté est $[BC)$ et l'autre, $[By)$, situé du même côté que A par rapport à (BC). On appelle D le point d'intersection de $[By)$ avec la parallèle à (BC) passant par A et E le projeté orthogonal de D sur (BC). On a $BE = AH/\sqrt{3}$. Le cercle de diamètre $[BA']$ coupe $[ED)$ en N. On trace $I \in [BC]$ tel que $BI = BN$, puis R symétrique de B par rapport à I. Alors, le triangle équilatéral BRQ convient.

En effet, dans le triangle rectangle BNA', on a $BN^2 = BE \times BA'$ (c'est une propriété de moyenne géométrique bien connue que l'on établit par exemple en écrivant de deux manières le cosinus de l'angle $\widehat{A'BN}$), donc $BI^2 = BN^2 = ah/(2\sqrt{3})$ et $u = BR = 2BI$ vérifie alors $u^2 = 2ah/\sqrt{3}$ comme annoncé.

4 Les troncs

Contrairement à ce qu'affirme *Wikipedia*[3] on a le résultat suivant :

4.1 Théorème. *L'aire maximum d'un rectangle inscrit dans une ellipse*

3. Sauf erreur, la fin de la phrase citée a disparu de l'article de *Wikipedia*.

d'aire $\mathscr{A}$ est égale à $\dfrac{2\mathscr{A}}{\pi}$ et ce, indépendamment de la forme de l'ellipse.

Démonstration. On commence par un lemme :

4.2 Lemme. *Si un parallélogramme est inscrit dans une ellipse, son centre est le centre de l'ellipse.*

Démonstration. 1) Une preuve projective : la construction de la polaire, voir figure 2, montre que le pôle de la droite de l'infini est le centre du parallélogramme et c'est aussi celui de l'ellipse.

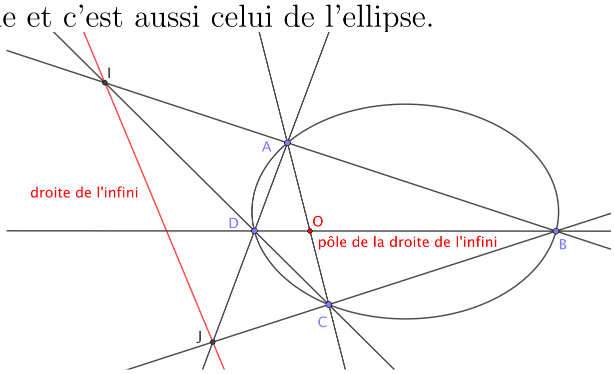

Figure 2 –

2) Une preuve affine. On sait qu'une ellipse est l'image d'un cercle par affinité. Comme la propriété du lemme est affine (parallélogramme, ellipse, centre le sont), il suffit de montrer que si un parallélogramme est inscrit dans un cercle, son centre est le centre du cercle.

Soit $ABCD$ le parallélogramme et O son centre. On a l'égalité d'angles alternes-internes $\widehat{ABD} = \widehat{BDC}$, mais aussi, par le théorème de l'angle inscrit, $\widehat{ABD} = \widehat{ACD}$, donc $\widehat{BDC} = \widehat{ACD}$ ou encore $\widehat{ODC} = \widehat{OCD}$. Il en résulte que le triangle OCD est isocèle donc qu'on a $OC = OD$. On montre de même qu'on a $OD = OA$ et le point O est le centre du cercle circonscrit à ADC, c'est-à-dire du cercle donné.

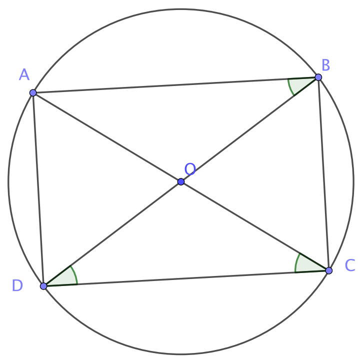

Figure 3 –

4.3 *Remarque.* Bien entendu, dans le cas du cercle, le parallélogramme est automatiquement un rectangle (car un triangle inscrit dans un demi-cercle est rectangle).

4.4 Corollaire. *Si un rectangle est inscrit dans une ellipse qui n'est pas un cercle, les axes de l'ellipse sont les axes de symétrie du rectangle (donc parallèles aux côtés).*

Démonstration. Soit $\mathscr{E}$ l'ellipse, $ABCD$ le rectangle et O son centre, qui est aussi le centre de l'ellipse. Soit Γ le cercle de centre O circonscrit au rectangle. On a[4] $\Gamma \cap \mathscr{E} = \{A, B, C, D\}$. Si Δ est l'un des axes de symétrie de $\mathscr{E}$, il passe par O de sorte que la symétrie par rapport à Δ conserve $\mathscr{E}$ et Γ, donc aussi $\{A, B, C, D\}$.

On peut alors prouver le théorème. Soit $\mathscr{E}$ une ellipse d'équation $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$ où a, b sont les longueurs des demi-axes de l'ellipse, $a > b$. Par affinité avec son cercle principal $x^2 + y^2 = a^2$, on voit que son aire est égale à πab.

Soit $ABCD$ un rectangle inscrit dans $\mathscr{E}$ (donc de côtés parallèles aux axes). On pose $A = (x, y)$ et, par symétrie, on peut supposer $x, y \geq 0$. Les sommets du rectangle sont alors $(\pm x, \pm y)$ et son aire est égale à $4xy$. Mais on a $\left(\frac{x}{a} - \frac{y}{b}\right)^2 = \frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} - 2\frac{xy}{ab} \geq 0$, d'où $2\frac{xy}{ab} \leq 1$ soit $2xy \leq ab$. L'aire du rectangle est donc bien inférieure ou égale à $2ab = \frac{2\mathscr{A}}{\pi}\cdot$ De plus, cette borne est atteinte en prenant $x = \frac{a}{\sqrt{2}}$ et $y = \frac{b}{\sqrt{2}}\cdot$

Dans la figure ci-dessous, le disque et l'ellipse ont même aire ainsi que le carré inscrit dans le cercle et le rectangle inscrit dans l'ellipse.

4. C'est le théorème de Bézout : deux coniques propres ont au plus quatre points d'intersection. Dans le cas présent il est facile à prouver, par exemple en paramétrant l'ellipse par $(a \cos \varphi, b \sin \varphi)$.

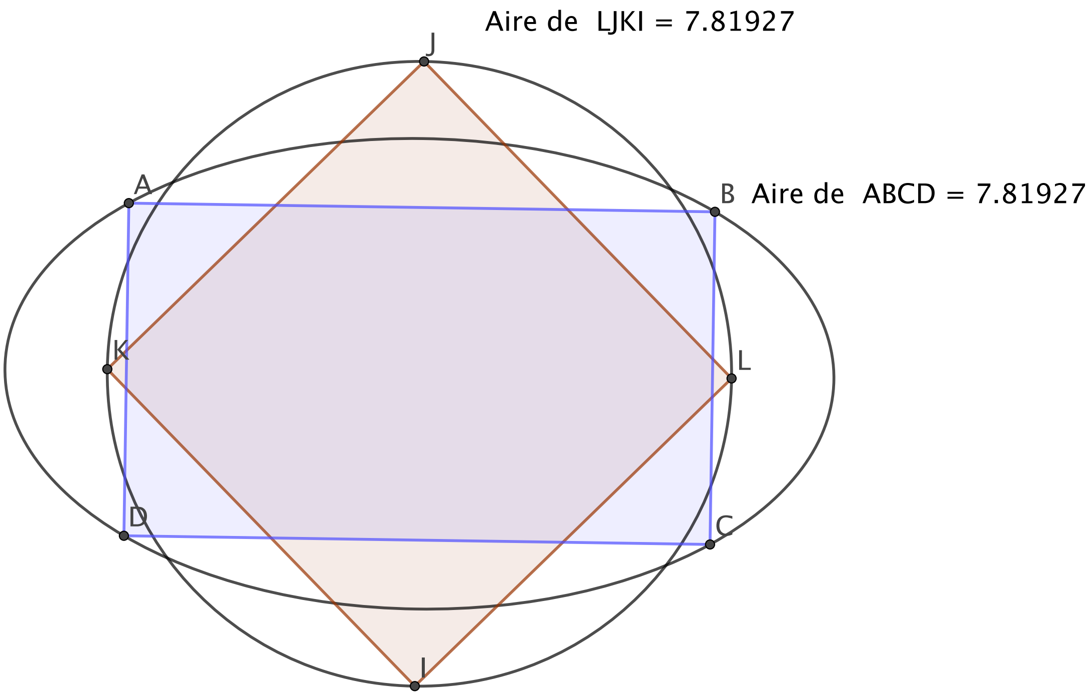

FIGURE 4 –