Géométrie différentielle : exercices du chapitre 0

Exercice 1 *L'application*

$$]-\frac{\pi}{2},\frac{\pi}{2}[\times]\pi,\pi[\to \mathbf{R}^3, \quad (\theta,\phi)\mapsto X(\theta,\phi)=\begin{pmatrix}\cos(\theta)\cos(\phi)\\ \cos(\theta)\sin(\phi)\\ \sin(\theta)\end{pmatrix},$$

est une paramétrisation d'un ouvert de la sphère unité de $\mathbf{R}^3$*. Etant donnée une courbe lisse* $t\mapsto q(t)=(\theta(t),\phi(t))\in U=]-\frac{\pi}{2},\frac{\pi}{2}[\times]\pi,\pi[$*, vérifier que la longueur de son image* $X\circ c$ *dans* $\mathbf{R}^3$ *est égale à la longueur de* c *relative à la métrique riemannienne* $d\theta^2+\cos(\theta)^2 d\phi^2$ *sur* U*.*

Solution de l'exercice 1. *Longueur d'une courbe tracée sur la sphère unité.*

On calcule la vitesse

$$X\dot{\circ} q=\dot\theta(t)\begin{pmatrix}-\sin(\theta(t))\cos(\phi(t))\\ -\sin(\theta(t))\sin(\phi(t))\\ \cos(\theta(t))\end{pmatrix}+\dot\phi(t)\begin{pmatrix}-\cos(\theta(t))\sin(\phi(t))\\ \cos(\theta(t))\cos(\phi(t))\\ 0\end{pmatrix},$$

puis

$$\| X\dot{\circ} q\|^2=\dot\theta(t)^2+\cos(\theta(t))^2\dot\phi(t)^2.$$

Il vient

$$\begin{aligned}\mathrm{Long}(X\circ c) &= \int\sqrt{\dot\theta(t)^2+\cos(\theta(t))^2\dot\phi(t)^2}\,dt\\ &= \int\sqrt{(d\theta^2+\cos(\theta)^2d\phi^2)_{q(t)}(\dot q(t))}\,dt.\end{aligned}$$

Exercice 2 *Soit* $s\mapsto(r(s),0,z(s))$ *une courbe tracée dans un plan vertical, paramétrée par son abscisse curviligne. Paramétrer la surface de révolution engendrée par la rotation de cette courbe, baptisée* méridienne, *autour de l'axe* Oz*. Calculer la métrique induite dans cette paramétrisation.*

Solution de l'exercice 2. *Paramétrisation d'une surface de révolution.*

On applique au vecteur $\begin{pmatrix}r(u)\\0\\z(u)\end{pmatrix}$ la matrice $\begin{pmatrix}\cos v & -\sin v & 0\\ \sin v & \cos v & 0\\ 0&0&1\end{pmatrix}$ de la rotation d'angle v autour de l'axe Oz. Il vient

$$(u,v)\mapsto X(u,v)=\begin{pmatrix}r(u)\cos(v)\\ r(u)\sin(v)\\ z(u)\end{pmatrix}.$$

On calcule

$$\frac{\partial X}{\partial u}=\begin{pmatrix}r'(u)\cos(v)\\ r'(u)\sin(v)\\ z'(u)\end{pmatrix}, \quad \frac{\partial X}{\partial u}=\begin{pmatrix}-r(u)\sin(v)\\ r(u)\cos(v)\\ 0\end{pmatrix},$$

d'où

$$E = \| \frac{\partial X}{\partial u} \|^2 = r'^2 + z'^2 = 1, \quad F = \frac{\partial X}{\partial u} \cdot \frac{\partial X}{\partial v} = 0, \quad G = \| \frac{\partial X}{\partial v} \|^2 = r^2,$$

donc la métrique induite est

$$E\, du^2 + 2F\, du\, dv + G\, dv^2 = du^2 + r(u)^2\, dv^2.$$

Exercice 3 *On modélise un bloc de verre par un demi-espace optiquement homogène et isotrope, i.e. d'indice constant $n > 1$, le complementaire étant vide. On considère un rayon lumineux qui entre dans le verre. On note i l'angle d'incidence (angle du rayon avec la normale à l'interface dans le vide) et r l'angle de réfraction (angle du rayon avec la normale dans le verre). Etablir la loi de Snell* $\sin(i) = n \sin(r)$.

Solution de l'exercice 3. *Loi de Snell.*

Soit Q_i (resp. Q_r) un point du rayon situé dans le vide (resp. dans le verre) et à distance 1 de l'interface. Si un chemin de Q_i à Q_r minimise le chemin optique, son intersection avec chaque milieu minimise la longueur euclidienne. Par conséquent, il suffit de considérer des chemins formés de deux segments de droites, issus de Q_i et Q_r respectivement, et se rejoignant en un point q de l'interface. Les données sont symétriques par rapport au plan Π perpendiculaire à l'interface qui contient Q_i et Q_r, la projection orthogonale sur ce plan diminue les longueurs, donc on peut supposer que $q \in \Pi$. Clairement, q doit même se trouve sur le segment σ, projection de Q_iQ_r sur l'interface. On calcule $qQ_i = 1/\cos(i)$, $qQ_r = 1/\cos(r)$, d'où le chemin optique

$$T = \frac{1}{\cos(i)} + \frac{n}{\cos(r)}.$$

Lorsque q décrit σ, $S = \tan(i) + \tan(r) = \mathrm{Long}(\sigma)$ est constant. Au minimum, les différentielles

$$dT = \frac{\sin(i)}{\cos(i)^2}\, di + n \frac{\sin(r)}{\cos(r)^2}\, dr \quad \text{et} \quad dS = \frac{1}{\cos(i)^2}\, di + \frac{1}{\cos(r)^2}\, dr$$

sont proportionnelles, donc $\sin(i) = n \sin(r)$.

Exercice 4 *On s'intéresse au mouvement d'une bille glissant sans frottement dans une gouttière située dans un plan vertical, en partant d'un point P avec vitesse nulle et passant par un point Q. Suivant Bernoulli (1696), on cherche, parmi tous les profils de gouttière reliant P à Q, celui qui rend minimal le temps que la bille met à rejoindre Q depuis P. Montrer qu'il s'agit d'un problème variationnel lagrangien, équivalent à la recherche des géodésiques d'une métrique riemannienne dans un demi-plan.*

Solution de l'exercice 4. *La brachistochrone de Bernoulli.*

On cherche une fonction $f : [x_P, x_Q] \to]-\infty, y_P]$ qui minimise le temps T du mouvement ponctuel de masse m donné par $t \mapsto (x(t), y(t))$, astreint à rester sur la gouttière, i.e. tel que pour tout $t \in [0, T]$, $y(t) = f(x(t))$, et soumis à la seule gravité d'intensité G. Dans un tel mouvement, l'énergie mécanique totale est conservée,

$$\frac{1}{2}m(\dot{x}^2 + \dot{y}^2) + mGy(t) = mGy_P.$$

Il vient

$$\frac{1}{2}(\frac{dx}{dt}^2)(1 + f'(x)^2) = G(y_P - f(x)),$$

d'où

$$dt = dx\sqrt{\frac{1 + f'(x)^2}{2G(y_P - f(x))}},$$

et

$$T = \frac{1}{\sqrt{2G}}\int_{x_P}^{x_Q}\sqrt{\frac{1 + f'(x)^2}{y_P - f(x)}}\,dx.$$

Posons $q(x) = y_P - f(x)$, $\dot{q} = \frac{dq}{dx}$. Il s'agit donc de trouver $q : [x_P, x_Q] \to \mathbf{R}_+$ telle que $q(x_P) = 0$, $q(x_Q) = y_P - y_Q$, qui minimise l'intégrale

$$\Phi(q) = \int_{x_P}^{x_Q} L(q, \dot{q}, x)\,dx$$

où

$$L(q, \dot{q}, x) = \sqrt{\frac{1 + f'(x)^2}{q}}\,dx.$$

C'est bien un problème variationnel lagrangien en une dimension d'espace.

Considérons la courbe paramétrée $c : t \mapsto (x(t), q(x(t)))$ dans le demi-plan supérieur. Alors $\Phi(q)$ est égal à la longueur de c pour la métrique $g = q^{-1}(dx^2 + dq^2)$. Comme cette longueur est invariante par reparamétrisation, le problème de la brachistochrone revient à chercher à minimiser la longueur des courbes dans $(\mathbf{R} \times \mathbf{R}_+, g)$ reliant $(x_P, 0)$ à $(x_Q, y_P - y_Q)$ qui se projettent injectivement sur le premier facteur.

Exercice 5 *Ecrire l'équation d'Euler-Lagrange du problème de la brachistochrone (exercice 4), et la résoudre : on trouve (Newton 1697) des cycloïdes ayant une tangente verticale au point de départ.*

Solution de l'exercice 5. *Equation de la brachistochrone.*

De $L = q^{-1/2}(1+\dot{q}^2)^{1/2}$, on tire

$$\frac{\partial L}{\partial q} = -\frac{1}{2}q^{-3/2}(1+\dot{q}^2)^{1/2}, \quad \frac{\partial L}{\partial \dot{q}} = q^{-1/2}\dot{q}(1+\dot{q}^2)^{-1/2},$$

d'où

$$\frac{d}{dt}\frac{\partial L}{\partial \dot{q}}(q,\dot{q},t) = -\frac{1}{2}q^{-3/2}\dot{q}^2(1+\dot{q}^2)^{-1/2} - \frac{1}{2}q^{-1/2}\ddot{q}(1+\dot{q}^2)^{-1/2} - \frac{1}{2}q^{-1/2}\dot{q}^2\ddot{q}(1+\dot{q}^2)^{-3/2},$$

et enfin

$$\frac{\partial L}{\partial q} - \frac{d}{dt}\frac{\partial L}{\partial \dot{q}}(q,\dot{q},t) = -\frac{1}{2}(2q\ddot{q}+1+\dot{q}^2)q^{-3/2}(1+\dot{q}^2)^{-3/2}.$$

L'équation d'Euler-Lagrange s'écrit donc

$$\ddot{q} = -\frac{1}{2}\frac{1+\dot{q}^2}{q}.$$

En multipliant par $\dot{q}$, l'équation s'intègre en $(1+\dot{q}^2)q = v$ où v est une constante d'intégration, que la condition initiale ne permet pas de déterminer car $\dot{q}(x_P)$ est infini. Le changement de variable diabolique est s tel que $dx = q\,ds$. Il vient

$$ds = \frac{dq}{\sqrt{vq-q^2}}, \quad s = \arccos(1-\frac{2q}{v}),$$

puis

$$q = \frac{v}{2}(1-\cos(s)), \quad x = x_P + \frac{v}{2}(s-\sin(s)).$$

La courbe paramétrée $s \mapsto (x(s), q(s))$ est une cycloïde, courbe tracée par un point d'un cercle qui roule sans glisser sur l'axe Ox. La gouttière $x \mapsto (x, f(x))$ est donc la courbe tracée par un point d'un cercle qui roule sans glisser au-dessous la droite d'équation $\{y = y_P\}$. Sa tangente en P est verticale. Lorsque v varie, les arches de cycloïdes homothétiques obtenues balaient le quart de plan $\{x > x_P,\, y < y_P\}$. Pour tout point Q de ce quart de plan, il existe donc une et une seule cycloïde de la famille qui passe par Q.

Exercice 6 *On cherche quelle forme d'équilibre doit prendre une corde inélastique de densité constante, située dans un plan vertical, fixée à ses extrémités, soumise à la seule gravité. S'agit-il d'un problème variationnel lagrangien ? Ecrire les deux lagrangiens en jeu et leurs équations d'Euler-Lagrange. En admettant le théorème des extrema liés, résoudre le problème. A translation et dilatation près, on trouve la courbe représentative de la fonction cosinus hyperbolique (Bernoulli, 1691).*

Solution de l'exercice 6. *La chaînette.*

Soient $P = (x_P, y_P)$ et $Q = (x_Q, y_Q)$ deux points du plan. On suppose la corde décrite par une fonction $f : [x_P, x_Q] \to \mathbf{R}$. Comme la densité linéique est supposée constante, son énergie potentielle s'obtient en intégrant la hauteur par rapport à l'abscisse curviligne. Elle est proportionnelle à

$$\int_{x_P}^{x_Q} f(x)\sqrt{1+\dot{f}(x)^2}\,dx.$$

La corde étant de longueur L fixée, la fonction f satisfait à la contrainte

$$\int_{x_P}^{x_Q} \sqrt{1+\dot{f}(x)^2}\,dx = L.$$

Les conditions aux limites sont $f(x_P) = y_P$ et $f(x_Q) = y_Q$.

Il ne s'agit pas exactement d'un problème variationnel lagrangien, puisqu'il y a une contrainte intégrale sur la fonction f. Il faut le voir comme un problème d'extrema liés : on minimise $\Phi_1(f) = \int L_1(f, \dot{f}, x)\,dx$ sur la sous-variété de codimension 1 définie par l'équation $\Phi_2(f) = L$, où $\Phi_2(f) = \int L_2(f, \dot{f}, x)\,dx$,

$$L_1(f, \dot{f}, x) = f(x)\sqrt{1+\dot{f}(x)^2}, \quad L_2(f, \dot{f}, x) = \sqrt{1+\dot{f}(x)^2}.$$

On calcule

$$\begin{aligned}
\frac{\partial L_1}{\partial f} &= (1+\dot{f}^2)^{1/2}, \quad \frac{\partial L_2}{\partial f} = 0 \\
\frac{\partial L_1}{\partial \dot{f}} &= f\frac{\partial L_2}{\partial \dot{f}} = f\dot{f}(1+\dot{f}^2)^{-1/2},
\end{aligned}$$

$$\frac{\partial}{\partial x}\frac{\partial L_2}{\partial \dot{f}} = \ddot{f}((1+\dot{f}^2)^{-1/2} - \dot{f}^2(1+\dot{f}^2)^{-3/2} = \ddot{f}(1+\dot{f}^2)^{-3/2},$$

$$\frac{\partial}{\partial x}\frac{\partial L_1}{\partial \dot{f}} = \dot{f}^2(1+\dot{f}^2)^{-1/2} + f\ddot{f}(1+\dot{f}^2)^{-3/2}.$$

Il vient

$$A = \frac{\partial L_1}{\partial f} - \frac{\partial}{\partial x}\frac{\partial L_1}{\partial \dot{f}} = (1+\dot{f}^2 - f\ddot{f})(1+\dot{f}^2)^{-3/2},$$

$$B = \frac{\partial L_2}{\partial f} - \frac{\partial}{\partial x}\frac{\partial L_2}{\partial \dot{f}} = -\ddot{f}(1+\dot{f}^2)^{-3/2}.$$

Le théorème des extrema liés énonce qu'en un extremum relatif, il existe une constante λ telle que $d\Phi_1 = \lambda d\Phi_2$. On admet (il suffit d'une variante de la preuve des équations d'Euler-Lagrange) que cela entraîne que $A - \lambda B = 0$, i.e.

$$1 + \dot{f}^2 - (f-\lambda)\ddot{f} = 0.$$

Quitte à translater verticalement les points P et Q d'une hauteur λ, on peut supposer que $\lambda = 0$. L'équation obtenue peut s'écrire

$$\frac{\ddot{f}}{1+\dot{f}^2} = \frac{1}{f}$$

En multipliant par $2\dot{f}$, on obtient

$$\frac{2\dot{f}\ddot{f}}{1+\dot{f}^2} = 2\frac{\dot{f}}{f},$$

qui s'intègre en

$$1 + \dot{f}^2 = C\, f^2.$$

Effectuer une homothétie de rapport $\sqrt{C}$ revient à changer f en $g : x \mapsto \sqrt{C} f(x/\sqrt{C})$, qui satisfait

$$1 + \dot{g}^2 = g^2.$$

Cette équation a pour solution $g(x) = \cosh(x)$ et ses translatées en x.

Exercice 7 *Calculer le tenseur d'inertie d'un parallélépipède homogène par rapport à son centre de gravité.*

Solution de l'exercice 7. *Tenseur d'inertie d'un parallélépipède.*
Si $\Omega = \begin{pmatrix} a \\ b \\ c \end{pmatrix}$ et $q = \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}$, alors $\| \Omega \wedge q \|^2 = x^2(b^2+c^2) + y^2(a^2+c^2) + z^2(a^2+b^2) - 2acxz - 2abxy - 2bczy$. Si X, Y et Z sont les trois dimensions du parallélépipède, de sorte que $S = \{|x| \leq X/2,\ |y| \leq Y/2,\ |z| \leq Z/2\}$, et si ρ est la densité, alors le moment d'inertie vaut $A(\Omega) = \frac{\rho}{12}(a^2(Z^3+Y^3) + b^2(X^3+Z^3) + c^2(X^3+Y^3))$. Comme on pouvait s'y attendre, les axes principaux d'inertie coïncident avec les axes de symétrie du parallélépipède.

Exercice 8 *Montrer qu'un mouvement à force centrale se déroule dans un plan. Montrer que l'énergie mécanique s'exprime en fonction de r et $\dot{r}$ seulement. Montrer que cela ramène la résolution à des quadratures (i.e. au calcul de primitives).*

Solution de l'exercice 8. *Mouvement à force centrale.*
Soit P le plan passant par l'origine, par la position initiale $q(0)$ et contenant la vitesse initiale $\dot{q}(0)$. Alors le moment cinétique $M(0)$ est orthogonal à P. Comme M est constant, $\dot{q}(t)$ est parallèle à P pour tout t, donc $q(t) \in P$.

En utilisant, dans le plan P, le repère tournant $e_r = \begin{pmatrix} \cos(\theta) \\ \sin(\theta) \end{pmatrix}$, $e_\theta = \begin{pmatrix} -\sin(\theta) \\ \cos(\theta) \end{pmatrix}$, le moment cinétique s'écrit

$$\begin{aligned} M &= q \wedge m\dot{q} \\ &= mre_r \wedge (\dot{r}e_r + r\dot{\theta}e_\theta \\ &= mr^2\dot{\theta}e_r \wedge e_\theta, \end{aligned}$$

d'où $M^2 = m^2 r^4 \dot\theta^2$. L'énergie cinétique s'écrit

$$\begin{aligned} T &= \frac{1}{2} m \dot q^2 \\ &= \frac{1}{2} m(\dot r^2 + r^2 \dot\theta^2) \\ &= \frac{1}{2} m \dot r^2 + \frac{M^2}{2mr^2} \end{aligned}$$

donc l'énergie mécanique $E = \frac{1}{2} m \dot r^2 + \frac{M^2}{2mr^2} + V(r)$ ne dépend que de r et $\dot r$.

La conservation de l'énergie mécanique ramène la résolution à deux quadratures

$$t = \sqrt{m} \int \frac{dr}{\sqrt{2E - V(r) - M/mr^2}}, \quad \text{et} \quad \theta = \int \frac{M\, dt}{mr2}.$$

Exercice 9 *On appelle* métrique de révolution *sur* $\mathbf{R}^2$ *une métrique de la forme* $g_{(u,v)} = du^2 + r(u)^2\, dv^2$ *où* r *est une fonction positive. En appliquant le théorème de Noether et la conservation de la vitesse, trouver des intégrales premières de l'équation des géodésiques, et montrer que la résolution de l'équation se ramène à deux quadratures.*

Solution de l'exercice 9. *Géodésiques des surfaces de révolution.*

Une métrique de révolution possède un groupe à un paramètre d'isométries, les translations dans la direction v, engendré par le champ de vecteurs constant $V(u, v) = \frac{\partial}{\partial v}$. Les isométries préservent le lagrangien $L(q, \dot q) = \frac{1}{2} g_q(\dot q)$, donc, d'après le théorème de Noether, l'équation des extrémales (les géodésiques), possède l'intégrale première

$$f(q, \dot q) = \dot q \cdot_g V(q) = r(u)^2 \dot v.$$

La conservation de la vitesse donne comme seconde intégrale première

$$g_q(\dot q) = \dot u^2 + r(u)^2 \dot v^2.$$

Pour toute extrémale, il existe donc des constantes a et b telles que $r(u)^2 \dot v = a$ et $\dot u^2 + r(u)^2 \dot v^2 = b$. Cela conduit aux quadratures

$$dt = \int \frac{du}{\sqrt{b - ar(u)^{-2}}}, \quad v = \int a \frac{dt}{r(u(t))^2}.$$

Exercice 10 *Retrouver la conservation du moment cinétique par rapport à l'espace* μ *en appliquant directement le théorème de Noether au lagrangien du solide.*

Solution de l'exercice 10. *Conservation du moment cinétique dans le repère de l'espace.*

Un sous-groupe à un paramètre de $SO(3)$, étant formé de rotations qui commutent, consiste en rotations de même axe. Il est engendré par un endomorphisme antisymétrique a. Autrement dit, il s'écrit $s \mapsto \exp(sa)$. Le groupe à un paramètre de translations à gauche correspondant est engendré par un champ de vecteurs invariant à droite V_a sur $SO(3)$, donné par

$$\begin{aligned} V_a(R) &= \frac{d}{ds} L_{\exp(sa)}(R)_{|s=0} \\ &= aR. \end{aligned}$$

On revient à la définition du tenseur d'inertie,

$$\begin{aligned} A(\Omega) &= \int_S \| \Omega \wedge q \|^2 \; dq \\ &= \int_S (\Omega \wedge q) \cdot (\Omega \wedge q)\, dq \\ &= \int_S \Omega \cdot (q \wedge (\Omega \wedge q))\, dq \\ &= \Omega \cdot \int_S q \wedge (\Omega \wedge q)\, dq. \end{aligned}$$

La dérivée du lagrangien est

$$\begin{aligned} \frac{\partial L}{\partial \dot{R}}(R, \dot{R})(\dot{R}') &= R^{-1}\dot{R}' \cdot \int_S q \wedge (R^{-1}\dot{R} \wedge q)\, dq \\ &= R^{-1}\dot{R}' \cdot M, \end{aligned}$$

où on identifie une matrice antisymétrique avec un vecteur.

D'après le théorème de Noether, la fonction

$$\begin{aligned} f_a(R, \dot{R}) &= \frac{\partial L}{\partial \dot{R}}(R, \dot{R})(V_a(q)) \\ &= R^{-1}aR \cdot M \end{aligned}$$

est une intégrale première. Si $a(q) = \Omega \wedge q$, $R^{-1}aR(q) = R^{-1}(\Omega \wedge R(q)) = R^{-1}(\Omega) \wedge q$, donc $R^{-1}aR \cdot M = R^{-1}(\Omega) \cdot M = \Omega \cdot \mu$.

On conclut que le vecteur $\mu = R \int_S q \wedge (R^{-1}\dot{R} \wedge q)\, dq$ est une intégrale première.

Exercice 11 *On note* $\mu(R, \dot{R}) = R \int_S q \wedge R^{-1}\dot{R} q\, \rho(q) dq$ *le moment cinétique et* $E = L(R, \dot{R}) = \frac{1}{2}A(R^{-1}\dot{R})$ *l'énergie cinétique d'un solide en mouvement autour de l'origine. Quelles sont les valeurs critiques de l'application* $(\mu, E) : TSO(3) \to \mathbf{R}^4$ *?*

Solution de l'exercice 11. *Valeurs critiques des intégrales premières de la toupie de poids nul.*

L'application $TSO(3) \to SO(3) \times \mathbf{R}^3$, $(R, \dot{R}) \to (R, \Omega)$ est un difféomorphisme. Dans ces coordonnées,

$$(\mu, E)(R, \Omega) = (RA\Omega, \frac{1}{2}\Omega \cdot A\Omega),$$

d'où

$$d(\mu, E)_{(R,\Omega)}(\dot{R}, \dot{\Omega}) = (\dot{R}A\Omega + RA\dot{\Omega}, \dot{\Omega} \cdot A\Omega).$$

L'image de l'application $\dot{R} \mapsto \dot{R}A\Omega$, espace tangent à l'orbite de $A\Omega$ en $RA\Omega$, est le plan orthogonal à $RA\Omega$. La différentielle est donc surjective dès qu'il existe $\dot{\Omega}$ orthogonal à $A\Omega$ tel que $RA\dot{\Omega}$ ne soit pas orthogonal à $RA\Omega$, i.e. dès que Ω n'est pas un vecteur propre de A^2. Notons $I_1 > I_2 > I_3$ les valeurs propres de A, aussi appelées *moments principaux d'inertie.* Si Ω est un vecteur propre de A relatif à I_i, alors $\| \mu(R,\Omega) \|^2 = I_i^2 \| \Omega \|^2 = 2I_iE(R,\Omega)$. Par conséquent, l'application (μ, E) est une submersion au-dessus des couples (v, e) tels que $\| v \|^2 /2e$ soit distinct de I_1, I_2 et I_3. Dans ce cas, l'image réciproque $(\mu, E)^{-1}(v, e)$ est une sous-variété compacte de dimension 2 de $TSO(3)$.

Si $\| v \|^2 = 2e\, I_i$, soit Ω un vecteur propre de norme $\sqrt{2e/I_i}$ de A pour la valeur propre I_i et soit R une rotation qui envoie Ω sur v/I_i. Alors $\mu(R,\Omega) = v$, $E(R,\Omega) = e$, et l'image de la différentielle de μ est le plan orthogonal à Ω, donc elle n'est pas surjective. On conclut que (v, e) n'est pas une valeur régulière dans ce cas.

Exercice 12 *Vérifier que la transformation de Legendre est involutive, i.e. que si g est la transformée de Legendre de f, alors f est la transformée de Legendre de g.*

Solution de l'exercice 12. *Involutivité de la transformation de Legendre.*

Par définition,

$$\forall \dot{q} \in \mathbf{R}^n, \quad \forall p \in (\mathbf{R}^n)^*, \quad p(\dot{q}) \leq f(\dot{q}) + g(p).$$

Par conséquent, pour tout $\dot{q}$, $f(\dot{q}) \geq \sup_p p(\dot{q}) - g(p)$. Il s'agit de montrer qu'il y a égalité. Supposons, par l'absurde, qu'il existe $\dot{q}_0$ tel que $f(\dot{q}_0) > x_0 = \sup_p p(\dot{q}_0) - g(p)$. Appliquons le théorème de Hahn-Banach au convexe $K = \{(\dot{q}, x) \in \mathbf{R}^n \times \mathbf{R}\,;\, x \geq f(\dot{q})\}$, qui ne contient pas $(\dot{q}_0, x_0)$: il existe un hyperplan qui sépare $(\dot{q}_0, x_0)$ de K. Cet hyperplan est le graphe d'une application affine, de la forme $q \mapsto p_0(q) - d$. Alors

- pour tout q, $p_0(q) - d \leq f(q)$;
- $p_0(\dot{q}_0) - d > x_0$.

La première assertion entraîne que $d \geq g(p_0)$, puis que $p_0(\dot{q}_0) - d \leq p_0(\dot{q}_0) - g(p_0)$, ce qui contredit la seconde assertion $p_0(\dot{q}_0) - d > \sup_p p(\dot{q}_0) - g(p)$.

Exercice 13 *On suppose que la fonction $H(p, q, t) = H(q)$ ne dépend ni de p ni de t. Vérifier que, dans ce cas, les équations d'Hamilton s'intègrent explicitement.*

Solution de l'exercice 13. *Résolution d'une équation d'Hamilton particulière.*

Comme $\frac{\partial H}{\partial p} = 0$, $q(t) = q_0$ est constant. De $\dot{p} = -\frac{\partial H}{\partial q}(q_0)$, on tire $p(t) = p_0 - t\frac{\partial H}{\partial q}(q_0)$.

Exercice 14 *Soit g une métrique riemannienne définie sur un ouvert U de $\mathbf{R}^n$. Ecrire le hamiltonien défini sur $U \times (\mathbf{R}^n)^*$ qui décrit les géodésiques paramétrées à vitesse constante.*

Solution de l'exercice 14. *Equations de Hamilton pour les géodésiques.*

Les géodésiques paramétrées à vitesse constante sont les extrémales du problème lagrangien $L(q, \dot{q}) = \frac{1}{2}g_q(\dot{q})$, qui est fortement convexe et surlinéaire. D'après l'exemple **??**, la transformée de Legendre de $L = \frac{1}{2}g$ est

$$H(p) = \frac{1}{2}pG^{-1}p^\top,$$

où $G = (g_{ij})$ est la matrice de g. A un facteur $\frac{1}{4}$ près, c'est le produit scalaire induit par g sur le dual $(\mathbf{R}^n)^*$.

Exercice 15 *Soit H un hamiltonien sur $\mathbf{R}^n \times (\mathbf{R}^n)^*$. Soient f et g deux intégrales premières de H. Montrer que $\{f, g\}$ est encore une intégrale première. Dans le cas du mouvement d'un solide dans l'espace soumis à aucune force extérieure, montrer qu'il existe 6 intégrales premières (la vitesse du centre de gravité et le moment cinétique), et calculer leurs crochets de Poissons deux à deux.*

Exercice 16 *Soit $\phi : (q, p) \mapsto (Aq + Bp^\top, q^\top C + pD)$ une application linéaire $\mathbf{R}^n \times (\mathbf{R}^n)^* \to \mathbf{R}^n \times (\mathbf{R}^n)^*$. A quelle conditions sur les matrices $n \times n$ A, B, C et D ϕ est-elle une transformation canonique ?*

Solution de l'exercice 16. *Transformations canoniques linéaires.*

La forme symplectique de $\mathbf{R}^n \times (\mathbf{R}^n)^*$ s'écrit matriciellement

$$\omega((\dot{q}, \dot{p}), (\dot{q}', \dot{p}')) = \dot{p}\dot{q}' - \dot{q}^\top \dot{p}'^\top.$$

On calcule

$$\begin{aligned}(\phi^*\omega)((\dot{q}, \dot{p}), (\dot{q}', \dot{p}')) &= (\dot{q}^\top C + \dot{p}D)(A\dot{q}' + B\dot{p}'^\top) - (\dot{q}^\top A^\top + \dot{p}B^\top)(C^\top \dot{q}' + D^\top \dot{p}'^\top) \\ &= \dot{q}^\top(CA - A^\top C^\top)\dot{q}' + \dot{p}(DB - B^\top D^\top)\dot{p}'^\top \\ &\quad + \dot{p}(DA - B^\top C^\top)\dot{q}' + \dot{q}^\top(CB - A^\top D^\top)\dot{p}'^\top.\end{aligned}$$

Par conséquent, ϕ est canonique si et seulement si

$$CA - A^\top C^\top = DB - B^\top D^\top = 0, \quad DA - B^\top C^\top = A^\top D^\top - CB = I.$$

Exercice 17 *Soient $f(q, p) = aq + pb$, $g(q, p) = cq + pd$ deux fonctions linéaires sur $\mathbf{R}^n \times (\mathbf{R}^n)^*$. Calculer leur crochet de Poisson.*

Solution de l'exercice 17. *Crochet de Poisson de fonctions linéaires.*

Le gradient symplectique d'une fonction linéaire est un champ de vecteurs constant. Ces champs de vecteurs commutent entre eux, donc $\xi_{\{f,g\}} = [\xi_f, \xi_g] = 0$, et $\{f, g\}$ est constante. En fait, comme $\{q_i, q_j\} = 0$, $\{p_i, p_j\} = 0$, $\{p_i, q_j\} = -\delta_{ij}$,

$$\begin{aligned}
\{f,g\} &= \sum_{ij} a_i c_j \{q_i, q_j\} + b_i c_j \{p_i, q_j\} + a_i d_j \{q_i, p_j\} + b_i d_j \{p_i, p_j\} \\
&= \sum_{ij} (-b_i c_j + a_i d_j)\delta_{ij} \\
&= \sum_i -b_i c_i + a_i d_i \\
&= -cb + ad \\
&= \omega((b,a),(d,c)).
\end{aligned}$$

Solution de l'exercice 15. *Crochet de Poisson d'intégrales premières.*

D'après l'identité de Jacobi,

$$\{\{f,g\},H\} = -\{\{g,H\},f\} - \{\{H,f\},g\} = 0,$$

donc $\{f, g\}$ est une intégrale première.

Solide libre. C'est un problème variationnel lagrangien sur le groupe des déplacements $\mathcal{D}$. Il est invariant à gauche. Le théorème de Noether fournit donc 6 intégrales premières, de la forme $\frac{\partial L}{\partial \dot{q}}(D, \dot{D})(W(D))$ où W est un champ de vecteurs invariant à droite sur $\mathcal{D}$.

La vitesse du centre de gravité est l'intégrale première correspondant aux champs engendrant des translations. Ces champs commutent entre eux. Par conséquent, les composantes de la vitesse du centre de gravité ont des crochets nuls deux à deux.

Le moment cinétique est l'intégrale première correspondant aux champs engendrant des rotations. Un tel champ est de la forme $a_\Omega = q \mapsto \Omega \wedge q$. Le crochet de Lie de deux tels champs vaut

$$[a_\Omega, a'_\Omega] = a_{\Omega\wedge\Omega'}.$$

Enfin, le crochet de la rotation infinitésimale a_Ω par la translation infinitésimale v est $a_\Omega(v)$.

Exercice 18 *Déduire le théorème de Noether de sa version hamiltonienne, dans le cas où le lagrangien est surlinéaire et fortement convexe.*

Solution de l'exercice 18. *Théorème de Noether et hamiltonien.*

Soit V un champ de vecteurs sur U qui est une symétrie infinitésimale du lagrangien L. Son relèvement en un champ de vecteurs W sur $U \times (\mathbf{R}^n)^*$ est le gradient symplectique de la fonction linéaire dans les fibres définie par $f(q,p) = p(V(q))$. W est une symétrie infinitésimale du hamiltonien, donc, d'après le théorème **??**, f est une intégrale première des équations de Hamilton. Notons $\Phi : U \times \mathbf{R}^n \to U \times (\mathbf{R}^n)^*$ le difféomorphisme lié à la transformation de Legendre,

$$\Phi(q, \dot{q}) = (q, \frac{\partial L}{\partial \dot{q}}(q, \dot{q})).$$

Alors $f \circ \Phi$ est une intégrale première des équations d'Euler-Lagrange. Or

$$f \circ \Phi(q, \dot{q}) = \frac{\partial L}{\partial \dot{q}}(q, \dot{q})(V(q))$$

est bien l'intégrale première fournie par le théorème de Noether.

Exercice 19 *On utilise le difféomorphisme $SO(3) \times (\mathbf{R}^3)^* \to T^*SO(3)$ donné par les translations à gauche. Ecrire la 1-forme et la 2-forme canoniques, ainsi que le hamiltonien du solide tournant autour de l'origine, dans un champ de potentiel V.*

Solution de l'exercice 19. *Hamiltonien du solide tournant autour de l'origine, dans un champ de potentiel.*

Etant donné $(R, p) \in SO(3) \times (\mathbf{R}^3)^*$, $\Phi(R, p) \in T^*SO(3)$ est la forme linéaire ℓ sur $T_R SO(3)$ qui à un vecteur tangent $\dot{R}$ associe $p\Omega$, où $\Omega \in \mathbf{R}^3$ est défini par $a_\Omega = R^{-1}\dot{R}$. Comme

$$\alpha_{(R,\ell)}(\dot{R}, \dot{\ell}) = \ell(\dot{R}),$$

$$\Phi^*\alpha_{(R,p)}(\dot{R}, \dot{p}) = p\Omega = \mathrm{trace}(a_{p^\top} R^{-1}\dot{R}).$$

Avec la notation usuelle des formes différentielles, on peut écrire

$$\Phi^*\alpha = \mathrm{trace}(a_{p^\top} R^{-1} dR).$$

Il vient

$$\Phi^* d\alpha = \mathrm{trace}(a_{dp^\top} R^{-1} dR - a_{p^\top} R^{-1} dR\, R^{-1} dR),$$

où, lorsqu'on multiplie des matrices dont les coefficients sont des formes différentielles, on utilise le produit extérieur.

Du lagrangien

$$L(R, \dot{R}) = \frac{1}{2}\Omega^\top A \Omega - \int_S V(Rq)\, dq,$$

on tire le hamiltonien par transformation de Legendre,

$$H(R, p) = \frac{1}{2} p A^{-1} p^\top + \int_S V(Rq)\, dq.$$

Exercice 20 *Soit $H : T^*M \to \mathbf{R}$ un hamiltonien qui, comme fonction de p seul, est quadratique et défini positif. Soit $N_c = \{H = c\}$ une hypersurface de niveau de H, avec $c \neq 0$. Vérifier que la $2n-1$-forme différentielle $\alpha \wedge \omega^{n-1}$, restreinte à N_c, ne s'annule jamais, et qu'elle est invariante par le flot du gradient symplectique ξ_H.*

Solution de l'exercice 20. *Mesure de Liouville sur les hypersurfaces d'énergie constante.*

On effectue le calcul ponctuel en coordonnées. En se souvenant que les formes de degré pair commutent, il vient

$$\begin{aligned}\frac{\omega^{n-1}}{(n-1)!} &= dp_1 \wedge dq_1 \wedge \cdots \wedge dp_{n-1} \wedge dq_{n-1} \\ &\quad + dp_1 \wedge dq_1 \wedge \cdots \wedge dp_{n-2} \wedge dq_{n-2} \wedge dp_n \wedge dq_n \\ &\quad + \cdots + dp_2 \wedge dq_2 \wedge \cdots \wedge dp_n \wedge dq_n,\end{aligned}$$

d'où

$$(\alpha \wedge \frac{\omega^{n-1}}{(n-1)!})_{(q,p)} = \iota_p dp_1 \wedge \cdots \wedge dq_n.$$

Par homogénéïté,

$$d_{(q,p)}H(p) = 2H(q,p) \neq 0.$$

Si $v_1, \ldots, v_{2n-1}$ forment une base de $T_{(q,p)}N_c = \ker dH$, alors p et les v_i sont linéairement indépendants, donc $\alpha \wedge \omega^{n-1}(v_1, \ldots, v_{2n-1}) \neq 0$.

Vérifions que la 1-forme différentielle tautologique α, restreinte à N_c, est invariante par le flot de ξ_H. Comme H est quadratique,

$$\begin{aligned}\iota_{\xi_H}\alpha_{(q,p)} &= \alpha_{(q,p)}(\xi_H) \\ &= \alpha(\begin{pmatrix} \frac{\partial H}{\partial p} \\ -\frac{\partial H}{\partial q}\end{pmatrix}) \\ &= p(\frac{\partial H}{\partial p}) \\ &= 2H.\end{aligned}$$

D'après la formule de Cartan **??**,

$$\mathcal{L}_{\xi_H}\alpha = d\iota_{\xi_H}\alpha + \iota_{\xi_H}d\alpha = 2dH - dH = dH,$$

dont la restriction à N_c est nulle. Par conséquent, $\alpha_{|N_c}$ est invariante par le flot de ξ_H. Il en est de même de $\omega_{|N_c} = d(\alpha_{|N_c})$, et de $\alpha \wedge \omega_{|N_c}^{n-1}$.

Exercice 21 *Soit $\phi : (q,p) \mapsto (Aq + Bp^\top, q^\top C + pD)$ une application linéaire $\mathbf{R}^n \times (\mathbf{R}^n)^* \to \mathbf{R}^n \times (\mathbf{R}^n)^*$. On suppose que ϕ est une transformation canonique. Montrer que si B est inversible, alors ϕ possède une fonction génératrice.*

Solution de l'exercice 21. *Fonctions génératrices de transformations canoniques linéaires.*

D'après l'exercice 16, ϕ est canonique si et seulement si

$$CA - A^\top C^\top = DB - B^\top D^\top = 0, \quad DA - B^\top C^\top = A^\top D^\top - CB = I.$$

On calcule

$$\begin{aligned}
\alpha - \phi^*\alpha &= pdq - (q^\top C + pD)(Adq + Bdp^\top) \\
&= pdq - q^\top CAdq - pDBdp^\top - q^\top CBdp^\top - pDAdq \\
&= -q^\top CAdq - pDBdp^\top - q^\top A^\top D^\top dp^\top - pDAdq \\
&= dS,
\end{aligned}$$

où

$$S(q,p) = -\frac{1}{2}(q^\top CAq + pDBp^\top + pDAq).$$

Si B est inversible, on peut exprimer p en fonction de q et de $Q = Aq + Bp^\top$,

$$p = Q^\top (B^\top)^{-1} - q^\top A^\top (B^\top)^{-1},$$

donc ϕ admet la fonction génératrice

$$\begin{aligned}
S(q,Q) &= -\frac{1}{2}(q^\top CAq + (Q^\top (B^\top)^{-1} - q^\top A^\top (B^\top)^{-1})D(Q - Aq) \\
&\quad + (Q^\top (B^\top)^{-1} - q^\top A^\top (B^\top)^{-1})DAq).
\end{aligned}$$