Université Partis-Sud | **Année universitaire 2002-2003**
DEUG SMPE — S3 | **Stage Mathematica**

Feuille de TP n°1

Les solutions de ces exercices doivent être rédigées avec soin. Après les avoir résolus à l'aide de Mathematica, envoyer le fichier Mathematica correctement formaté à l'adresse suivante :

francois.guenard@math.u-psud.fr

1. Le théorème du binôme donne la forme du développement de $(a + b)^n$. Quelle est la formule donnant la forme du développement de $(1 + x + x^2 + \cdots + x^n)^2$?

2. On appelle *commutant* d'une matrice A, et l'on note $\mathscr{C}(A)$ l'ensemble des matrices M qui commutent avec A, c'est-à-dire l'ensemble des matrices M telles que $AM - MA = 0$. Soit $A = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$ une matrice 2×2. Ecrire la matrice de l'application $\varphi_A : \mathscr{M}_2(\mathbb{R}) \to \mathscr{M}_2(\mathbb{R})$, $M \mapsto AM - MA$ dans la base canonique de $\mathscr{M}_2(\mathbb{R})$. Déterminer ensuite le noyau de φ_A et exprimer $\mathscr{C}(A)$ en fonction de a, b, c et d.
IND : Dans chaque cas, pour décrire $\mathscr{C}(A)$, on pourra en donner une base.

3. Pour tout entier n, On note h_n la matrice de Hilbert d'ordre n, dont le coefficient (i, j) vaut $1/(i + j - 1)$. Calculer l'inverse de h_5, et étudier les variations des coefficients de cette matrice inverse lorsqu'on "perturbe" très légèrement un ou plusieurs coefficients de h_5.

Université Paris-Sud

DEUG S3 SMPE - 2002-2003

Stage Mathematica

Première séance

Introduction à Mathematica

Thèmes abordés - Mathematica à l'ouverture - Les commandes - La saisie des formules, en ligne ou à l'aide de la palette - Nombres réels ou complexes - Fonctions avec des crochets - Calculs formels - Fraction - Décomposition en éléments simples - L'infini est intégré au produit - Calcul de la somme d'une série - Les simplifications, pas toujours ce que l'on veut -

Travail sur un document - Choisir l'échelle d'affichage - Formater le texte et structurer le document - Choisir une feuille de style appropriée -

Nommer les objets : fonctions, listes, nombres, paramètres, graphiques - la notation a :=... - Crochets pour les fonctions, parenthèses pour séparer les termes, accolades pour les listes

Vecteurs et matrices - Résolution de systèmes linéaires

■ Calculs élémentaires

In[82]:= **125 / 35**

Out[82]= $\frac{25}{7}$

In[81]:= $\mathbf{\frac{125}{35}}$

Out[81]= $\frac{25}{7}$

In[107]:= **N[25 / 7, 100]**

Out[107]= 3.57142857142857142857142857142857142857142857142857142857142857142857142857142857142\
8571428571428571428571

In[108]:= **N[π, 1000]**

Out[108]= 3.14159265358979323846264338327950288419716939937510582097494459230781640628620
899862803482534211706798214808651328230664709384460955058223172535940812848111
745028410270193852110555964462294895493038196442881097566593344612847564823378
678316527120190914564856692346034861045432664821339360726024914127372458700660
631558817488152092096282925409171536436789259036001133053054882046652138414695
194151160943305727036575959195309218611738193261179310511854807446237996274956
735188575272489122793818301194912983367336244065664308602139494639522473719070
217986094370277053921717629317675238467481846766940513200056812714526356082778
577134275778960917363717872146844090122495343014654958537105079227968925892354
201995611212902196086403441815981362977477130996051870721134999999837297804995
105973173281609631859502445945534690830264252230825334468503526193118817101000
313783875288658753320838142061717766914730359825349042875546873115956286388235
3787593751957781857780532171226806613001927876611195909216420199

In[58]:= $e^{\frac{i}{4}}$

Out[58]= $e^{\frac{i}{4}}$

In[60]:= $e^{\frac{i\pi}{4}}$

Out[60]= $e^{\frac{i\pi}{4}}$

In[61]:= **ComplexExpand[%]**

Out[61]= $\frac{1+i}{\sqrt{2}}$

In[83]:= **Re**$\left[e^{\frac{i\pi}{4}}\right]$

Out[83]= $\frac{1}{\sqrt{2}}$

In[62]:= **TrigToExp[Cos[2 x]]**

Out[62]= $\frac{1}{2} e^{-2 i x} + \frac{1}{2} e^{2 i x}$

In[63]:= **f :=** $\frac{x^2 + 3x + 2}{x^2 - 1}$

In[64]:= **Apart[f]**

Out[64]= $1 + \frac{3}{-1 + x}$

In[65]:= **Simplify[f]**

Out[65]= $\frac{2 + x}{-1 + x}$

In[113]:= **Together**$\left[\frac{1}{1 + x} + \frac{x}{2 + x}\right]$

Out[113]= $\frac{2 + 2x + x^2}{(1 + x)(2 + x)}$

■ Sommes finies ou infinies

In[66]:= $\sum_{k=1}^{10} k^2$

Out[66]= 385

In[68]:= $\sum_{k=1}^{10} k^2 x^k$

Out[68]= $x + 4 x^2 + 9 x^3 + 16 x^4 + 25 x^5 + 36 x^6 + 49 x^7 + 64 x^8 + 81 x^9 + 100 x^{10}$

In[80]:= Simplify[$\sum_{k=1}^{10} k^2 x^k$]

Out[80]= $x (1 + 4 x + 9 x^2 + 16 x^3 + 25 x^4 + 36 x^5 + 49 x^6 + 64 x^7 + 81 x^8 + 100 x^9)$

In[70]:= FullSimplify[$\sum_{k=1}^{10} k^2 x^k$]

Out[70]= $x (1 + x (4 + x (9 + x (16 + x (25 + x (36 + x (49 + x (64 + x (81 + 100 x)))))))))$

In[71]:= $\sum_{k=0}^{\infty} x^k$

Out[71]= $\frac{1}{1 - x}$

In[72]:= $\sum_{k=0}^{\infty} k x^k$

Out[72]= $\frac{x}{(-1 + x)^2}$

In[73]:= $\sum_{k=0}^{\infty} k^2 x^k$

Out[73]= $\frac{-x - x^2}{(-1 + x)^3}$

In[74]:= $\sum_{k=10}^{\infty} k^2 x^k$

Out[74]= $\frac{-100 x^{10} + 179 x^{11} - 81 x^{12}}{(-1 + x)^3}$

In[77]:= $\sum_{k=0}^{\infty} k^2 x^k - \sum_{k=10}^{\infty} k^2 x^k$

Out[77]= $\frac{-x - x^2}{(-1 + x)^3} - \frac{-100 x^{10} + 179 x^{11} - 81 x^{12}}{(-1 + x)^3}$

In[76]:= Together[$\sum_{k=0}^{\infty} k^2 x^k - \sum_{k=10}^{\infty} k^2 x^k$]

Out[76]= $x + 4 x^2 + 9 x^3 + 16 x^4 + 25 x^5 + 36 x^6 + 49 x^7 + 64 x^8 + 81 x^9$

■ Formatage d'un document

■ Listes, vecteurs et matrices

Définition en ligne d ' une matrice

```
In[86]:= m := {{1, 2, 3}, {4, 5, 6}}
```

```
In[87]:= m // TableForm
```

Out[87]//TableForm=

1	2	3
4	5	6

Définition avec la palette
(Ctrl + Enter pour ajouter une ligne, Barre d ' espace + Enter pour ajouter une ligne)

In[92]:= **n :=** $\begin{pmatrix} 7 & 8 \\ \alpha & \beta \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$

```
In[93]:= m.n // TableForm
```

Out[93]//TableForm=

$7+2\alpha$	$11+2\beta$
$28+5\alpha$	$38+5\beta$

```
In[94]:= n.m // TableForm
```

Out[94]//TableForm=

39	54	69
$\alpha+4\beta$	$2\alpha+5\beta$	$3\alpha+6\beta$
4	5	6

```
In[95]:= Inverse[m.n]
```

Out[95]= $\left\{\left\{\frac{38+5\beta}{-42+21\alpha-21\beta}, \frac{-11-2\beta}{-42+21\alpha-21\beta}\right\}, \left\{\frac{-28-5\alpha}{-42+21\alpha-21\beta}, \frac{7+2\alpha}{-42+21\alpha-21\beta}\right\}\right\}$

```
In[96]:= Inverse[m.n] // TableForm
```

Out[96]//TableForm=

$\frac{38+5\beta}{-42+21\alpha-21\beta}$	$\frac{-11-2\beta}{-42+21\alpha-21\beta}$
$\frac{-28-5\alpha}{-42+21\alpha-21\beta}$	$\frac{7+2\alpha}{-42+21\alpha-21\beta}$

Définition formelle d ' une matrice,
à partir d ' une formule générale - Ordre des itérateurs

```
In[102]:= Table[i, {i, 1, 3}, {j, 1, 4}] // TableForm
```

Out[102]//TableForm=

1	1	1	1
2	2	2	2
3	3	3	3

Matrice de coefficients binomiaux

```
In[99]:= pascal[n_] := Table[Binomial[k, p], {k, 0, n}, {p, 0, n}]

In[100]:= pascal[3] // TableForm

Out[100]//TableForm=
        1    0    0    0
        1    1    0    0
        1    2    1    0
        1    3    3    1
```

■ Résolution d'équations algébriques

In[103]:= **Solve[{x + y == 2, x - y == 3}, {x, y}]**

Out[103]= $\left\{\left\{x \to \frac{5}{2},\ y \to -\frac{1}{2}\right\}\right\}$

In[104]:= **Solve[{x + y == 2, x - α y == 3}, {x, y}]**

Out[104]= $\left\{\left\{x \to -\frac{-3-2\alpha}{1+\alpha},\ y \to -\frac{1}{1+\alpha}\right\}\right\}$

In[105]:= **Reduce[{x + y == 2, x - α y == 3}, {x, y}]**

Out[105]= $x == \frac{3+2\alpha}{1+\alpha}\ \&\&\ y == \frac{1}{-1-\alpha}\ \&\&\ 1+\alpha \neq 0$

In[106]:= **Reduce[{x + y == 2, x - α y == β}, {x, y}]**

Out[106]= $x == 2 - y\ \&\&\ \alpha == -1\ \&\&\ \beta == 2\ ||\ x == \frac{2\alpha+\beta}{1+\alpha}\ \&\&\ y == \frac{2-\beta}{1+\alpha}\ \&\&\ 1+\alpha \neq 0$

In[109]:= **Solve[$x^3 + x^2 + x + 1 == 0$, x]**

Out[109]= $\{\{x \to -1\}, \{x \to -i\}, \{x \to i\}\}$

In[110]:= **Solve[$x^3 + x + 1 == 0$, x]**

Out[110]= $\left\{\left\{x \to -\left(\frac{2}{3\left(-9+\sqrt{93}\right)}\right)^{1/3} + \frac{\left(\frac{1}{2}\left(-9+\sqrt{93}\right)\right)^{1/3}}{3^{2/3}}\right\},\right.$

$\left\{x \to -\frac{\left(1+i\sqrt{3}\right)\left(\frac{1}{2}\left(-9+\sqrt{93}\right)\right)^{1/3}}{2\ 3^{2/3}} + \frac{1-i\sqrt{3}}{2^{2/3}\left(3\left(-9+\sqrt{93}\right)\right)^{1/3}}\right\},$

$\left.\left\{x \to -\frac{\left(1-i\sqrt{3}\right)\left(\frac{1}{2}\left(-9+\sqrt{93}\right)\right)^{1/3}}{2\ 3^{2/3}} + \frac{1+i\sqrt{3}}{2^{2/3}\left(3\left(-9+\sqrt{93}\right)\right)^{1/3}}\right\}\right\}$

NSolve[$x^3 + x + 1 == 0$, x]

Out[112]= $\{\{x \to -0.682328\}, \{x \to 0.341164 - 1.16154\, i\}, \{x \to 0.341164 + 1.16154\, i\}\}$

■ Exercices

■ Exercice 1

In[114]:= $\mathbf{a[n\_] := \left(\sum_{k=0}^{n} x^k\right)^2}$

In[116]:= **Expand[a[10]]**

Out[116]= $1+2x+3x^2+4x^3+5x^4+6x^5+7x^6+8x^7+9x^8+10x^9+11x^{10}+10x^{11}+9x^{12}+8x^{13}+7x^{14}+6x^{15}+5x^{16}+4x^{17}+3x^{18}+2x^{19}+x^{20}$

La forme remarquable est
1 + 2 *x* + 3 *x*^2 + ... + 3 *x*^(2*n*-2) + 2 *x*^(2*n*-1) + *x*^2*n*
Mathematica permet de la conjecturer à partir des première valeurs. Ensuite, il suffit de "poser" la multiplication.

■ Exercice 2

On peut obtenir directement le résultat avec une seule instruction :

In[17]:= $\mathbf{Reduce}\left[\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}.\begin{pmatrix} x & y \\ z & t \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} x & y \\ z & t \end{pmatrix}.\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} == \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, \{x, y, z, t\}\right]$

Out[17]= $a == d \,\&\&\, b == 0 \,\&\&\, c == 0 \,||\, x == \frac{c\,t + a\,z - d\,z}{c} \,\&\&\, y == \frac{b\,z}{c} \,\&\&\, c \neq 0 \,||\, c == 0 \,\&\&\, x == \frac{b\,t + a\,y - d\,y}{b} \,\&\&\, z == 0 \,\&\&\, b \neq 0 \,||\, b == 0 \,\&\&\, c == 0 \,\&\&\, y == 0 \,\&\&\, z == 0 \,\&\&\, a - d \neq 0$

Il faut maintenant interpréter le résultat. Si A est une matrice scalaire (le premier cas donné par *Mathematica*), $C(A)$ est égal à $M_2(\mathbb{R})$. Dans le cas où A n' est pas diagonale ($c \neq 0$ ou $b \neq 0$, c' est – à – dire les cas 2 et 3), $C(A)$ est de dimension 2 (résultat formulé en fonction de t et de z dans le premier cas, de t et y dans le second), et une base est (Identité, A). Dans le dernier cas, c' est – à – dire lorsque A est une matrice diagonale non scalaire ($b = c = 0$), $C(A)$ est l' ensemble des matrices diagonales ($y = z = 0$).

■ Exercice 3

In[18]:= $\mathbf{h[n\_] := Table\left[\frac{1}{i+j-1}, \{i, 1, n\}, \{j, 1, n\}\right]}$

In[31]:=
```
ε[t_, u_, v_, n_] :=
  t Table[DiscreteDelta[i - u] DiscreteDelta[j - v], {i, 1, n}, {j, 1, n}]
```

```
In[32]:= ε[.001, 2, 3, 5] // TableForm
```

Out[32]//TableForm=

0	0	0	0	0
0	0	0.001	0	0
0	0	0	0	0
0	0	0	0	0
0	0	0	0	0

```
In[24]:= h[5] // TableForm
```

Out[24]//TableForm=

1	$\frac{1}{2}$	$\frac{1}{3}$	$\frac{1}{4}$	$\frac{1}{5}$
$\frac{1}{2}$	$\frac{1}{3}$	$\frac{1}{4}$	$\frac{1}{5}$	$\frac{1}{6}$
$\frac{1}{3}$	$\frac{1}{4}$	$\frac{1}{5}$	$\frac{1}{6}$	$\frac{1}{7}$
$\frac{1}{4}$	$\frac{1}{5}$	$\frac{1}{6}$	$\frac{1}{7}$	$\frac{1}{8}$
$\frac{1}{5}$	$\frac{1}{6}$	$\frac{1}{7}$	$\frac{1}{8}$	$\frac{1}{9}$

```
In[22]:= Inverse[h[5]] // TableForm
```

Out[22]//TableForm=

25	−300	1050	−1400	630
−300	4800	−18900	26880	−12600
1050	−18900	79380	−117600	56700
−1400	26880	−117600	179200	−88200
630	−12600	56700	−88200	44100

```
In[33]:= Inverse[h[5] + ε[.001, 2, 3, 5]] // TableForm
```

Out[33]//TableForm=

7.40223	16.7598	−280.391	570.95	−320.279
−18.4358	−268.156	2386.26	−4655.2	2604.47
−58.6592	1055.87	−4434.64	6569.83	−3167.6
176.76	−1501.68	1603.04	2602.91	−3054.97
−109.106	703.911	823.575	−5420.11	4188.27

Comme on le voit, une variation d'un seul coefficient de 10^{-3} change complètement les valeurs des coefficients de la matrice inverse. On parle de matrice mal conditionnée. En fait, comme on peut le voir dans le tableau ci – dessous, les déterminants des matrices de Hilbert sont de plus en plus petits, ce qui signifie que ' très près' de l' une de ces matrices se trouvent des matrices non inversibles. Lorsqu' on s' approche d' une telle matrice, certains coefficients de l' inverse tendent en module vers l' infini. Ils bougent donc ' très vite'.

```
In[37]:= Table[{n, N[Det[h[n]]]}, {n, 1, 10}] // TableForm
```

Out[37]//TableForm=

1	1.
2	0.0833333
3	0.000462963
4	1.65344×10^{-7}
5	3.7493×10^{-12}
6	5.3673×10^{-18}
7	4.8358×10^{-25}
8	2.73705×10^{-33}
9	9.72023×10^{-43}
10	2.16418×10^{-53}