ELSEVIER

Bull. Sci. math. 126 (2002) 831–854

BULLETIN DES SCIENCES MATHÉMATIQUES

www.elsevier.com/locate/bulsci

# Sur la convergence d'applications formelles entre sous-variétés analytiques réelles

Sylvain Damour *, Joël Merker

*LATP UMR 6632, Centre de Mathématiques et d'Informatique, Université de Provence, 39, rue Joliot-Curie, 13453 Marseille Cedex 13, France*

Reçu le 14 juin 2002

**Abstract**

Let $f$ be a formal mapping between a minimal generic real-analytic submanifold $M \subset \mathbb{C}^n$ and a real-analytic subset $M' \subset \mathbb{C}^{n'}$. In this article, we introduce the notion of first and second characteristic varieties associated to $(M, M', f)$ and we give two new sufficient conditions for the convergence of $f$. In particular, we prove that if $M'$ does not contain any complex curves and if the family of the first characteristic varieties is regular, then $f$ is convergent.


**Résumé**

Soit $f$ une application formelle entre une sous-variété analytique réelle générique minimale $M \subset \mathbb{C}^n$ et un sous-ensemble analytique réel $M' \subset \mathbb{C}^{n'}$. Dans cet article, on introduit les notions de première et seconde variétés caractéristiques associées au triplet $(M, M', f)$ et on donne deux conditions nouvelles qui assurent que $f$ est convergente. En particulier, on démontre que si $M'$ ne contient pas de courbe complexe et si la famille des premières variétés caractéristiques est régulière, $f$ est convergente.


*MSC:* 32V25; 32V40; 32H02; 32H40; 32V10

*Keywords:* Real-analytic manifold; Segre variety; Reflection principle; Formal mapping

*Mots-clés :* Variété analytique réelle ; Variété de Segre ; Principe de réflexion ; Application formelle

* Auteur correspondant.
*Adresses e-mail :* damour@cmi.univ-mrs.fr (S. Damour), merker@cmi.univ-mrs.fr (J. Merker).

0007-4497/02/$ – see front matter 
PII: S0007-4497(02)01144-2

## Introduction

On étudie la convergence d'une application formelle $f$ entre une sous-variété analytique réelle générique minimale $M \subset \mathbb{C}^n$ ($n \geqslant 2$) et un sous-ensemble analytique réel $M' \subset \mathbb{C}^{n'}$. L'origine de ce problème remonte aux travaux fondamentaux [5,14,25].

En s'inspirant du principe de réflexion de H. Lewy [18] et S. Pinchuk [26] et en poursuivant les travaux développés récemment dans [8,11,12,20,23], on introduit la première variété caractéristique associée au triplet $(M, M', f)$. C'est le sous-ensemble analytique complexe $\mathcal{V}_1 \subset \mathbb{C}^{n'}$ défini par les équations de $M'$ complexifiées et différentiées (via $f$) par les opérateurs CR de $M$ (cf. Définition 1.1). On démontre que si la dimension de $\mathcal{V}_1$ est nulle, $f$ est convergente (cf. Théorème 1.2) ; ce qui généralise [2,5].

Dans la situation où $\mathcal{V}_1$ est de dimension positive, on s'inspire d'un théorème de K. Diederich et J.E. Fornæss [13] au sujet de la non existence de courbes complexes contenues dans les bords de domaines bornés à bords analytiques réels. On définit ainsi la seconde variété caractéristique $\mathcal{V}_2 \subset \mathbb{C}^{n'}$ associée au triplet $(M, M', f)$. C'est l'intersection de $\mathcal{V}_1$ avec le sous-ensemble analytique complexe défini par les équations de $M'$ complexifiées et différentiées par les opérateurs holomorphes tangents à $\mathcal{V}_1$. Cette construction nécessite que la famille des premières variétés caractéristiques soit régulière (cf. Définition 1.4). On démontre alors que si la dimension de $\mathcal{V}_2$ est nulle, $f$ est convergente (cf. Théorème 1.6). De plus, on prouve que $\mathcal{V}_2 \subset M'$ ; ce qui implique que si $M'$ ne contient pas de morceau ouvert de courbe complexe, $f$ est convergente (cf. Théorème 1.7).

Expliquons maintenant l'idée générale de la démonstration. Considérons tout d'abord la situation où $\mathcal{V}_1$ est de dimension nulle. La relation fondamentale qui exprime que $f$ est une application formelle *entre $M$ et $M'$* implique que chaque fonction composante $f_j$ satisfait une équation polynomiale à coefficients analytiques par rapport à un jet d'ordre fini de $f$ (cf. Proposition 4.1). Pour des applications CR entre hypersurfaces, de telles relations polynomiales apparaissent dans les travaux de K. Diederich et S.M. Webster [17] et de K. Diederich et J.E. Fornæss [14]. On utilise ensuite de façon essentielle la notion de chaînes de Segre associées à la complexifiée $\mathcal{M}$ de la variété analytique réelle $M$ (cf. [19, 23]). Procédant par récurrence, on démontre que pour tout $i \geqslant 1$, $f$ est convergente sur la chaîne de Segre de longueur $i$. Dans cette étape, l'ingrédient principal est le théorème d'approximation de M. Artin [1] qui établit, pour un système d'équations analytiques, l'existence de solutions analytiques arbitrairement proches pour la topologie de Krull d'une solution formelle donnée. Finalement, on conclut grâce à une interprétation géométrique de la minimalité (au sens de J.-M. Trépreau [29,30] et A.E. Tumanov [31]) d'après laquelle il existe une chaîne de Segre de longueur finie $i_0$ qui recouvre tout un voisinage de l'origine dans $\mathcal{M}$ (cf. [19,23]).

Dans la situation où $\mathcal{V}_1$ est de dimension positive, deux approches sont possibles. La première, développée dans [7–10,23] pour une application $f$ de Cauchy–Riemann de classe $\mathcal{C}^\infty$, consiste à inclure le graphe de $f$ dans un ensemble analytique complexe de dimension minimale et à estimer ensuite le degré de transcendance d'une extension de corps associée à $f$. La seconde approche est basée sur la méthode développée par K. Diederich et J.E. Fornæss [13] et appliquée récemment dans [12,20,23]. Si la famille des premières variétés caractéristiques est régulière, on applique les opérateurs holomorphes tangents à $\mathcal{V}_1$ aux équations de $M'$ complexifiées et on obtient ainsi des équations supplémentaires. En pratique, on aura donc différentié les équations de $M'$ selon toutes les directions complexes tangentes. On démontre alors que si $\mathcal{V}_2$ est de dimension nulle, chaque fonction composante $f_j$ satisfait une équation polynomiale à coefficients analytiques par rapport aux jets de $f$ en *deux points* (cf. Proposition 5.5). Enfin, comme dans le cas où $\mathcal{V}_1$ est de dimension nulle, la minimalité de $M$ permet de conclure que $f$ est convergente.

Le plan de cet article est le suivant. La Section 1 donne les définitions et les énoncés précis des résultats. Dans la Section 2, on démontre des résultats préliminaires sur les variétés de Segre et leur généralisation comme chaînes de Segre. La Section 3 traite du théorème d'approximation de M. Artin et de ses corollaires. Dans la Section 4, on détaille le premier principe de réflexion et on donne la démonstration du Théorème 1.2. Enfin, la Section 4 explique le second principe de réflexion et achève les démonstrations des Théorèmes 1.6 et 1.7.

## 1. Énoncé des résultats

### 1.1. Notations et définitions

Soit $M \subset \mathbb{C}^n \simeq \mathbb{R}^{2n}$ $(n \geqslant 2)$ une sous-variété analytique réelle de codimension $d \geqslant 1$ définie dans un voisinage du point $0 \in M$ par les équations $r_k(z) = 0$, $k = 1, \ldots, d$, où les $r_k$ sont des fonctions analytiques réelles à valeurs réelles satisfaisant $dr_1 \wedge \cdots \wedge dr_d \neq 0$ en 0. Soit $T_zM$ l'espace tangent réel à $M$ en $z \in M$ et $T_z^cM := T_zM \cap iT_zM$ l'espace tangent complexe. On suppose que la sous-variété $M$ est *de Cauchy–Riemann* (CR), c'est-à-dire que $T_z^cM$ est de dimension complexe constante, appelée dimension CR de $M$ et notée $m$. La sous-variété $M$ est *minimale* en 0, au sens de J.-M. Trépreau [29,30] et A.E. Tumanov [31], si elle ne contient pas de sous-variété CR stricte passant par 0 et de dimension CR égale à $m$. Récrivons les équations définissantes de $M$ sous la forme habituelle

$$\rho_k(z, \bar{z}) = 0, \quad k = 1, \ldots, d, \tag{1.1}$$

où les $\rho_k$ sont des fonctions holomorphes de $2n$ variables satisfaisant $\rho_k(z, \bar{z}) \in \mathbb{R}$. On suppose que $M$ est *générique*, c'est-à-dire que $\partial\rho_1 \wedge \cdots \wedge \partial\rho_d \neq 0$ en 0, ou de façon équivalente $m = n - d$.

La *variété de Segre* $Q_w$ de $M$ associée à un point $w$ suffisamment proche de 0 est la sous-variété complexe définie dans un voisinage de 0 par les équations (1.1) complexifiées $\rho_k(z, \bar{w}) = 0$, $k = 1, \ldots, d$. Par le théorème des fonctions implicites, on peut récrire les équations de $M$ dans un voisinage de 0 sous la forme

$$y_k = \phi_k(x, \bar{x}, \bar{y}), \quad k = 1, \ldots, d, \tag{1.2}$$

où

$$\mathbb{C}^n \ni z = (x, y) \in \mathbb{C}^m \times \mathbb{C}^d \tag{1.3}$$

est un système de coordonnées holomorphes locales défini dans un voisinage de 0 et où les $\phi_k(x, \xi, \eta)$ sont des fonctions holomorphes dans un voisinage de $(0,0,0)$ satisfaisant $\phi_k(0, \xi, \eta) \equiv \phi_k(x, 0, \eta) \equiv \eta_k$. Les opérateurs

$$L_j(z, \bar{z}) := \frac{\partial}{\partial x_j} + \sum_{k=1}^{d} \frac{\partial \phi_k}{\partial x_j}(x, \bar{x}, \bar{y}) \frac{\partial}{\partial y_k}, \quad j = 1, \ldots, m, \tag{1.4}$$

forment une base (commutante) des opérateurs CR $(1,0)$ de $M$, à coefficients analytiques réels; les opérateurs $\Lambda_j(z) := L_j(z, 0)$, $j = 1, \ldots, m$, forment une base des opérateurs holomorphes tangents à la variété de Segre $Q_0$.

Comme pour $M$, on définit le sous-ensemble analytique réel $M' \subset \mathbb{C}^{n'}$ dans un voisinage du point $0 \in M'$ par les équations analytiques réelles $\rho'_k(z', \bar{z}') = 0$, $k = 1, \ldots, d'$. Dans la suite, on utilisera les notations vectorielles $\rho := (\rho_1, \ldots, \rho_d)$, $\phi := (\phi_1, \ldots, \phi_d)$ et $\rho' := (\rho'_1, \ldots, \rho'_{d'})$.

On note $\mathbb{C}[[z]] := \mathbb{C}[[z_1, \ldots, z_n]]$ l'anneau des séries formelles en les $n$ variables $z_1, \ldots, z_n$ à coefficients complexes. Soit $f$ une *application formelle entre $M$ et $M'$*, c'est-à-dire un $n'$-uplet $(f_1, \ldots, f_{n'})$ de séries formelles $f_j \in \mathbb{C}[[z]]$ tel que $f(0) = 0$ et tel qu'il existe une matrice $\mu$ de taille $d' \times d$ à coefficients dans $\mathbb{C}[[z, \zeta]]$ vérifiant

$$\rho'\big(f(z), \bar{f}(\zeta)\big) = \mu(z, \zeta)\rho(z, \zeta) \quad \text{dans } \mathbb{C}[[z, \zeta]], \tag{1.5}$$

où l'on note $\bar{f}(\zeta) := \overline{f(\bar{\zeta})}$. Dans la situation où $f$ est convergente sur un voisinage $\Omega$ de 0 dans $\mathbb{C}^n$, (1.5) est équivalent à $f(M \cap \Omega) \subset M'$.

### *1.2. Énoncé du premier principe de réflexion*

Pour tous $k = 1, \ldots, d'$ et $\alpha \in \mathbb{N}^m$, on note $\Phi_k^\alpha$ la fonction antiholomorphe définie au voisinage de 0 dans $\mathbb{C}^{n'}$ par

$$\Phi_k^\alpha : z' \mapsto \Lambda^\alpha \rho'_k\big(f(z), \bar{z}'\big)\big|_{z=0}, \tag{1.6}$$

où $\Lambda^\alpha$ désigne l'opérateur composé $\Lambda^\alpha := \Lambda_1^{\alpha_1} \ldots \Lambda_m^{\alpha_m}$.

**Définition 1.1.** La *première variété caractéristique* associée au triplet $(M, M', f)$ est le sous-ensemble analytique complexe $\mathcal{V}_1$ défini au voisinage de 0 dans $\mathbb{C}^{n'}$ par les équations $\Phi_k^\alpha(z') = 0$, pour tous $k$ et $\alpha$ (voir aussi [8,11,12,20,23]).

Les opérateurs $\Lambda_j$ appliqués à l'équation formelle $\rho'(f(z), 0) = \mu(z, 0)\rho(z, 0)$ montrent que $0 \in \mathcal{V}_1$. D'autre part, les équations de $\mathcal{V}_1$ pour $\alpha = 0$ impliquent que $\mathcal{V}_1 \subset Q'_0$, où $Q'_0 := \{z' \colon \rho'(z', 0) = 0\}$.

On peut maintenant énoncer le premier résultat de cet article :

**Théorème 1.2.** *Soit $f$ une application formelle entre une sous-variété analytique réelle générique $M \subset \mathbb{C}^n$ et un sous-ensemble analytique réel $M' \subset \mathbb{C}^{n'}$, $0 \in M$, $0 \in M'$, $f(0) = 0$. Si $M$ est minimale en 0 et si $\mathcal{V}_1$ est de dimension nulle en 0, $f$ est convergente.*

Si $M'$ est une sous-variété analytique réelle générique de $\mathbb{C}^{n'}$, on note $Q'_{z'}$ sa variété de Segre au point $z'$ et $A'_0$ le germe en 0 de l'ensemble analytique complexe $\{z'\colon Q'_{z'} = Q'_0\}$ (cf. [14–17]). Supposons que $n = n'$ et que $f$ une application formelle *inversible* entre $M$ et $M'$, c'est-à-dire que la matrice $n \times n$ des coefficients d'ordre 1 des séries formelles $f_j \in \mathbb{C}[[z]]$ est inversible. On démontre alors que les ensembles $\mathcal{V}_1$ et $A'_0$ coïncident au voisinage de 0 (cf. Proposition 2.7), et donc :

**Corollaire 1.3.** *Soit $f$ une application formelle inversible entre deux sous-variétés analytiques réelles génériques $M, M' \subset \mathbb{C}^n$, $0 \in M$, $0 \in M'$, $f(0) = 0$. Si $M$ est minimale en* 0 *et si $A'_0 = \{0\}$, $f$ est convergente.*

Cet énoncé a été obtenu dans [5] dans le cas d'hypersurfaces Levi non dégénérées et dans [2] dans le cas où le rang des $\partial\Phi_k^\alpha/\partial z'|_{z'=0}$ est égal à $n'$. Dans la situation où la dimension de $A'_0$ est positive, et lorsque $M'$ est holomorphiquement non dégénérée, la convergence de $f$ est établie dans [21,22] grâce à l'étude de l'application de réflexion CR formelle.

### *1.3. Énoncé du second principe de réflexion*

Pour tout entier $A \geqslant 0$, on note $D^A f(z)$ le *jet d'ordre $A$ de $f$*, c'est-à-dire le vecteur des dérivées partielles de $f$ jusqu'à l'ordre $A$ :

$$D^A f(z) := \left(\frac{\partial^{|\beta|} f_j}{\partial z^\beta}(z)\right)_{|\beta| \leqslant A,\ j=1,\ldots,n'}.$$

Les composantes du vecteur $D^A f(z)$ sont des séries formelles de $\mathbb{C}[[z]]$ ; leur nombre est le coefficient de Pascal $\kappa(A) := n'\binom{n+A}{n}$. On complexifie les opérateurs (1.4) et on considère les séries formelles

$$L^\alpha(z,\zeta)\rho'_k\big(f(z),\zeta'\big) \in \mathbb{C}[[z,\zeta,\zeta']], \tag{1.7}$$

pour $k = 1,\ldots,d'$ et $\alpha \in \mathbb{N}^m$. Par nœthérianité, il existe un entier $A \geqslant 0$ (on choisit le plus petit) tel que la famille des (1.7) pour tous $k$ et $\alpha$ engendre le même idéal dans $\mathbb{C}[[z,\zeta,\zeta']]$ que la famille *finie* des (1.7) pour $|\alpha| \leqslant A$. Récrivons cette dernière famille après conjugaison complexe sous la forme

$$H\big(z,\zeta,D^A\bar{f}(\zeta),z'\big), \tag{1.8}$$

où $H := (H_1,\ldots,H_N)$ sont des fonctions holomorphes au voisinage de $(0,0,D^A\bar{f}(0),0)$ dans $\mathbb{C}^n \times \mathbb{C}^n \times \mathbb{C}^{\kappa(A)} \times \mathbb{C}^{n'}$ et où $N := d'\binom{m+A}{m}$. Pour définir la seconde réflexion (cf. [12, 20]), on aura besoin que la famille des premières variétés caractéristiques soit *régulière* au sens suivant :

**Définition 1.4.** On dit que le triplet $(M, M', f)$ *satisfait la condition* $(\mathcal{R})$ s'il existe un entier $1 \leqslant b \leqslant n'$ et une famille $h := (h_1,\ldots,h_b)$ de fonctions holomorphes au voisinage de $(0,0,D^A\bar{f}(0),0)$ dans $\mathbb{C}^n \times \mathbb{C}^n \times \mathbb{C}^{\kappa(A)} \times \mathbb{C}^a$, $a := n' - b$, tels que

$$\langle z'_2 - h(z,\zeta,\Delta,z'_1)\rangle = \langle H(z,\zeta,\Delta,z')\rangle, \tag{1.9}$$

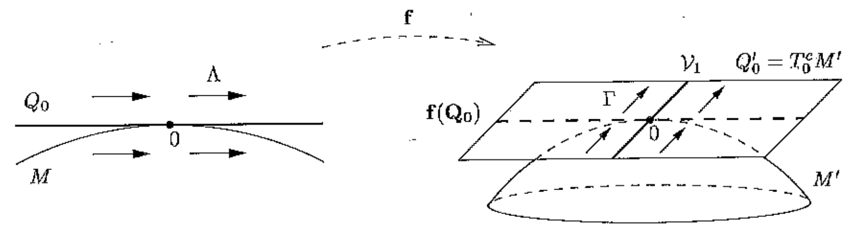


Fig. 1. Construction de la seconde variété caractéristique $\mathcal{V}_2$. Les familles $\Lambda = (\Lambda_1, \dots, \Lambda_m)$ et $\Gamma = (\Gamma_1, \dots, \Gamma_a)$ forment des bases de champs de vecteurs holomorphes tangents respectivement à $Q_0$ et à $\mathcal{V}_1$. Les noms en gras désignent des objets formels (dessinés en pointillés).

où $\mathbb{C}^{n'} \ni z' = (z'_1, z'_2) \in \mathbb{C}^a \times \mathbb{C}^b$ est un système de coordonnées holomorphes locales défini dans un voisinage de 0 et $(X)$ désigne l'idéal engendré par les fonctions composantes de $X$.

Comme dans [12,20], notons qu'étant donné le système (1.8) de fonctions analytiques $H(z, \zeta, \Delta, z')$, la condition $(\mathcal{R})$ est satisfaite de manière générique, c'est-à-dire en dehors d'un sous-ensemble analytique strict. En particulier, les résultats d'algébricité obtenus dans [12,20] sont basés sur cette observation. Un critère élémentaire pour que la condition $(\mathcal{R})$ soit satisfaite est que le rang de la matrice $\partial H / \partial z'(z, \zeta, \Delta, z')$ soit constant au voisinage de $(0, 0, D^A \bar{f}(0), 0)$.

Si la condition $(\mathcal{R})$ est satisfaite, le sous-ensemble analytique complexe $\mathcal{V}_1$ est lisse en 0 et sa dimension est $a$. Les opérateurs

$$\Gamma_j(z') := \frac{\partial}{\partial z'_{1j}} + \sum_{k=1}^{b} \frac{\partial h_k}{\partial z'_{1j}}(0, 0, D^A \bar{f}(0), z'_1) \frac{\partial}{\partial z'_{2k}}, \quad j = 1, \dots, a, \tag{1.10}$$

forment une base (commutante) des opérateurs holomorphes tangents à $\mathcal{V}_1$ dans un voisinage de 0 (cf. Fig. 1).

Pour tous $l = 1, \dots, d'$ et $\beta \in \mathbb{N}^a$, on note $\Psi_l^\beta$ la fonction antiholomorphe définie au voisinage de 0 dans $\mathbb{C}^{n'}$ par

$$\Psi_l^\beta : z' \mapsto \Gamma^\beta \rho'_l(\cdot, \bar{z}')|_0, \tag{1.11}$$

où $\Gamma^\beta$ désigne l'opérateur composé $\Gamma^\beta := \Gamma_1^{\beta_1} \dots \Gamma_a^{\beta_a}$.

**Définition 1.5.** La *seconde variété caractéristique* associée au triplet $(M, M', f)$ est le sous-ensemble analytique complexe $\mathcal{V}_2 \subset \mathcal{V}_1$ défini au voisinage de 0 dans $\mathbb{C}^{n'}$ par les équations $\Phi_k^\alpha(z') = \Psi_l^\beta(z') = 0$, pour tous $k$, $l$, $\alpha$ et $\beta$ (voir aussi [12,13,20,23]).

L'application des opérateurs $\Gamma_j$ à l'équation $\rho'(z', 0) = 0$, justifiée puisque $\mathcal{V}_1 \subset Q'_0$, montre que $0 \in \mathcal{V}_2$.

Le second résultat principal de cet article affine le Théorème 1.2 :

**Théorème 1.6.** *Soit $f$ une application formelle entre une sous-variété analytique réelle générique $M \subset \mathbb{C}^n$ et un sous-ensemble analytique réel $M' \subset \mathbb{C}^{n'}$, $0 \in M$, $0 \in M'$,*

$f(0)=0$. *Si $M$ est minimale en* 0, *si $(M, M', f)$ satisfait la condition $(\mathcal{R})$ et si $\mathcal{V}_2$ est de dimension nulle en* 0, *$f$ est convergente.*

On démontre que l'ensemble analytique complexe $\mathcal{V}_2$ est contenu dans $M'$ au voisinage de 0 (cf. Proposition 2.8) ; d'où le

**Théorème 1.7.** *Soit $f$ une application formelle entre une sous-variété analytique réelle générique $M \subset \mathbb{C}^n$ et un sous-ensemble analytique réel $M' \subset \mathbb{C}^{n'}$, $0 \in M$, $0 \in M'$, $f(0)=0$. Si $M$ est minimale en* 0, *si $(M, M', f)$ satisfait la condition $(\mathcal{R})$ et si $M'$ ne contient pas de morceau ouvert de courbe complexe passant par* 0, *$f$ est convergente.*

## 2. Résultats préliminaires

### 2.1. *Variétés de Segre*

La famille $(Q_w)_w$ des variétés de Segre associées à la sous-variété analytique réelle générique $M$ (cf. Section 1.1) a été introduite par B. Segre [27] et joue un rôle essentiel dans de nombreuses versions du principe de réflexion (voir par exemple [14–17,24,32,33]). On rappelle ci-dessous quelques propriétés de base des variétés de Segre :

**Lemme 2.1.** *Pour tous points $z, w \in \mathbb{C}^n$ suffisamment proches de* 0, *on a :*

(i) $z \in Q_w \Leftrightarrow w \in Q_z$ ;
(ii) $z \in Q_z \Leftrightarrow z \in M$ ;
(iii) $f|_{Q_0}$ *est une application formelle entre $Q_0$ et $Q'_0$.*

**Démonstration.** Les assertions (i) et (ii) se démontrent facilement grâce à la relation fondamentale $\overline{\rho(z, \bar{w})} = \rho(w, \bar{z})$. En fixant $\zeta = 0$ dans (1.5), on obtient l'égalité $\rho'(f(z), 0) = \mu(z, 0)\rho(z, 0)$ dans $\mathbb{C}[[z]]$ ; d'où l'assertion (iii). □

### 2.2. *Réflexion de Segre*

Dans cette section, l'introduction de la notion de réflexion de Segre par rapport à $M$ nous permet de donner une vision plus géométrique des variétés caractéristiques $\mathcal{V}_1$ et $\mathcal{V}_2$. Cette notion de réflexion de Segre tire son origine des travaux de K. Diederich et J.E. Fornæss [13], Sect. 6 (cf. la Remarque 2.5).

Soient $z_0$ et $w_0$ deux points de $\mathbb{C}^n$ suffisamment proches de 0, tels que $z_0 \in Q_{w_0}$. Soit $V \subset Q_{w_0}$ une sous-variété complexe passant par le point $z_0$, de dimension $a$, et soit $(\Delta_j)_{j=1,\ldots,a}$ une base des opérateurs holomorphes tangents à $V$. Pour tout $\alpha \in \mathbb{N}^a$, $\Delta^\alpha$ désigne l'opérateur composé $\Delta^\alpha := \Delta_1^{\alpha_1} \ldots \Delta_a^{\alpha_a}$.

**Définition 2.2.** La *réflexion de Segre* de $V$ par rapport à $M$, associée au couple $(z_0, w_0)$, est le sous-ensemble analytique complexe $S(V)$ défini au voisinage de $w_0$ par les équations antiholomorphes en $w$ : $\Delta^\alpha P_k(\cdot, \bar{w})|_{z_0} = 0$, pour tous $k = 1, \ldots, d$ et $\alpha \in \mathbb{N}^a$.

La réflexion de Segre généralise la notion de variétés de Segre :

**Lemme 2.3.** *Les assertions suivantes sont satisfaites au voisinage de* $w_0$ :

(i) $S(z_0) = Q_{z_0}$ ;
(ii) $S(Q_{w_0}) = w_0$ ;
(iii) $S(V) \subset Q_{z_0}$ ;
(iv) $w_0 \in S(V)$.

**Démonstration.** Les assertions (i) et (ii) sont directes. Pour (iii), il suffit de considérer les équations définissantes de $S(V)$ pour $\alpha = (0, \ldots, 0)$. Pour (iv), puisque $V \subset Q_{w_0}$, on peut appliquer les opérateurs $\Delta_j$ aux équations $P_k(z, \bar{w}_0) = 0$, $k = 1, \ldots, d$, $z \in Q_{w_0}$ proche de $z_0$. □

La réflexion de Segre peut être introduite de manière équivalente par une définition plus géométrique :

**Lemme 2.4.** *La réflexion* $S(V)$ *est l'ensemble des points* $w \in \mathbb{C}^n$ *suffisamment proches de* $w_0$*, tels que* $V$ *est contenu dans* $Q_w$ *au voisinage de* $z_0$.

**Démonstration.** L'inclusion $V \subset Q_w$ signifie que $P_k(\cdot, \bar{w})|_V \equiv 0$, pour tout $k = 1, \ldots, d$. Ceci équivaut à $\Delta^\alpha P_k(\cdot, \bar{w})|_{z_0} = 0$, pour tous $k = 1, \ldots, d$ et $\alpha \in \mathbb{N}^a$. □

**Remarque 2.5.** L'énoncé du Lemme 2.4 est équivalent à dire que $S(V) = \bigcap_{z \in V \cap U} Q_z$ au voisinage de $w_0$, où $U$ est un voisinage de $z_0$ dans $\mathbb{C}^n$ (voir aussi [13], Sect. 6).

La propriété suivante est essentielle et remonte également au travail de K. Diederich et J.E. Fornæss [13], Sect. 6. Elle justifie l'introduction de la notion de seconde variété caractéristique (voir Proposition 2.8 plus loin) :

**Lemme 2.6.** *Si* $V \subset Q_0$ *est une sous-variété complexe passant par le point* 0 *et si* $S$ *désigne la réflexion de Segre par rapport à* $M$ *associée au couple* $(0, 0)$*, l'intersection* $V \cap S(V)$ *est contenue dans* $M$ *au voisinage de* 0.

**Démonstration.** Soit $w \in V$, suffisamment proche de 0. Si de plus $w \in S(V)$, le Lemme 2.4 implique que $V \subset Q_w$ dans un voisinage de 0. Finalement, $w \in Q_w$, ce qui entraîne que $w \in M$. □

Soit $W \subset \mathbb{C}^n$ une sous-variété complexe définie au voisinage du point $0 \in W$ par les équations holomorphes $r_k(z) = 0$, $k = 1, \ldots, \delta$, avec $\partial r_1 \wedge \cdots \wedge \partial r_\delta \neq 0$ en 0. L'opérateur formel $A := \sum_{j=1}^n a_j(z)\, \partial/\partial z_j$, avec $a_j \in \mathbb{C}[[z]]$ pour tout $j$, est dit *tangent à* $W$ s'il existe une matrice $\lambda$ de taille $\delta \times \delta$ à coefficients dans $\mathbb{C}[[z]]$ telle que

$$\sum_{j=1}^n a_j(z) \frac{\partial r}{\partial z_j}(z) = \lambda(z) r(z) \quad \text{dans } \mathbb{C}[[z]],$$

où l'on note $r$ le vecteur colonne $(r_1, \ldots, r_\delta)$.

La première variété caractéristique $\mathcal{V}_1$ généralise l'ensemble analytique complexe $A'_0$ (cf. Section 1.2) introduit dans [17] et utilisé par la suite dans [14–16]. Ces deux notions coïncident si l'application $f$ est inversible (voir aussi [11], Lem. 4.1 et [12], Lem. 2) :

**Proposition 2.7.** *Soit $f$ une application formelle inversible entre deux sous-variétés analytiques réelles génériques $M, M' \subset \mathbb{C}^n$, $0 \in M$, $0 \in M'$, $f(0) = 0$. Alors, $\mathcal{V}_1$ coïncide avec $A'_0$ au voisinage de* 0.

**Démonstration.** D'une part, le Lemme 2.4 appliqué à $V = Q'_0$ montre que $S'(Q'_0)$ coïncide avec $A'_0$ dans un voisinage de 0, où $S'$ désigne la réflexion de Segre par rapport à $M'$, associée au couple $(0,0)$. D'autre part, vu la propriété d'invariance des variétés de Segre (cf. Lemme 2.1(iii)), $f|_{Q_0}$ est une application formelle inversible entre $Q_0$ et $Q'_0$. Ainsi, comme les opérateurs $\Lambda_j$, $j = 1, \ldots, m$, forment une base des opérateurs holomorphes tangents à $Q_0$, les opérateurs $f_*\Lambda_j$, $j = 1, \ldots, m$, poussés en avant des $\Lambda_j$ par $f$, forment une base des opérateurs formels tangents à $Q'_0$. Par conséquent, dériver les séries formelles $\rho'_k(f(\cdot), \bar{z}')$, $k = 1, \ldots, d$, par les opérateurs holomorphes $\Lambda_j$, $j = 1, \ldots, m$, revient à dériver les fonctions holomorphes $\rho'_k(\cdot, \bar{z}')$, $k = 1, \ldots, d$, par les opérateurs formels $f_*\Lambda_j$, $j = 1, \ldots, m$. Par définition, ceci signifie que $\mathcal{V}_1$ coïncide avec $S'(Q'_0)$ dans un voisinage de 0. □

Les propriétés précédentes de la réflexion de Segre impliquent également une propriété fondamentale de la seconde variété caractéristique :

**Proposition 2.8.** *Soit $f$ une application formelle entre une sous-variété analytique réelle générique $M \subset \mathbb{C}^n$ et un sous-ensemble analytique réel $M' \subset \mathbb{C}^{n'}$, $0 \in M$, $0 \in M'$, $f(0) = 0$. Alors, l'ensemble analytique complexe $\mathcal{V}_2$ est contenu dans $M'$ au voisinage de* 0.

**Démonstration.** Le Lemme 2.6 appliqué à $V = \mathcal{V}_1$ montre que $\mathcal{V}_1 \cap S'(\mathcal{V}_1) \subset M'$, dans un voisinage de 0, où $S'$ désigne la réflexion de Segre par rapport à $M'$ associée au couple $(0,0)$. Vu la Définition 1.5, il est clair que $\mathcal{V}_2$ coïncide avec $\mathcal{V}_1 \cap S'(\mathcal{V}_1)$ dans un voisinage de 0, et donc $\mathcal{V}_2 \subset M'$ dans un voisinage de 0. □

### *2.3. Chaînes de Segre*

La *complexifiée* de $M$ est la sous-variété complexe $\mathcal{M} \subset \mathbb{C}^{2n}$ de dimension $2n - d$ définie au voisinage du point $(0,0)$ par les équations $\rho_k(z, \zeta) = 0$, $k = 1, \ldots, d$. Comme pour $M$ (cf. (1.2) et (1.3)), les équations de $\mathcal{M}$ s'écrivent aussi $y_k = \phi_k(x, \xi, \eta)$, $k = 1, \ldots, d$, en notant $z = (x, y) \in \mathbb{C}^m \times \mathbb{C}^d$ et $\zeta = (\xi, \eta) \in \mathbb{C}^m \times \mathbb{C}^d$. La complexification des champs de vecteurs CR $(1,0)$ $L_j$ de $M$ (cf. (1.4)) donne des champs de vecteurs holomorphes tangents à $\mathcal{M}$ :

$$\mathcal{L}_j(z, \zeta) := \frac{\partial}{\partial x_j} + \sum_{k=1}^{d} \frac{\partial \phi_k}{\partial x_j}(x, \xi, \eta) \frac{\partial}{\partial y_k}, \quad j = 1, \ldots, m. \tag{2.1}$$

Par ailleurs, la complexification des champs de vecteurs CR (0, 1) $\overline{L}_j$ de $M$ donne *une autre famille* de champs de vecteurs holomorphes tangents à $\mathcal{M}$ :

$$\underline{\mathcal{L}}_j(z,\zeta) := \frac{\partial}{\partial \xi_j} + \sum_{k=1}^{d} \frac{\partial \bar{\phi}_k}{\partial \xi_j}(\xi, x, y)\frac{\partial}{\partial \eta_k}, \quad j = 1, \dots, m. \tag{2.2}$$

Les $\mathcal{L}_j$ (resp. $\underline{\mathcal{L}}_j$) commutent entre eux et la famille $(\mathcal{L}_1, \dots, \mathcal{L}_m, \underline{\mathcal{L}}_1, \dots, \underline{\mathcal{L}}_m)$ est libre.

Si $X$ est un champ de vecteurs holomorphe tangent à $\mathcal{M}$, on note $(Z,t) \mapsto X_t(Z) := \exp(tX)(Z)$ le flot associé, pour un point $Z = (z, \zeta) \in \mathcal{M}$ proche de $(0,0)$ et un temps $t \in \mathbb{C}$ proches de 0. Pour tous $j = 1, \dots, m$ et $i \in \mathbb{N}$, on pose

$$\mathcal{L}_j^i := \begin{cases} \mathcal{L}_j & \text{si } i \text{ est impair,} \\ \underline{\mathcal{L}}_j & \text{si } i \text{ est pair.} \end{cases}$$

Puis, pour un multi-temps $t \in \mathbb{C}^m$ et $i \geqslant 1$, on pose $\mathcal{L}_t^i := \mathcal{L}_{m,t_m}^i \circ \cdots \circ \mathcal{L}_{1,t_1}^i$. Enfin, pour un $i$-uplet de multi-temps $T = (T_1, \dots, T_i) \in (\mathbb{C}^m)^i$, on pose $\mathcal{L}_T^{(i)} := \mathcal{L}_{T_i}^i \circ \cdots \circ \mathcal{L}_{T_1}^1$. On appelle *chaîne de Segre* (cf. [19,23]) de longueur $i \geqslant 1$ et d'origine $Z \in \mathcal{M}$, et on note $\mathcal{S}_Z^i$, l'image d'un voisinage de 0 dans $(\mathbb{C}^m)^i$ par l'application : $T \mapsto \mathcal{L}_T^{(i)}(Z)$. Remarquons que la réunion des chaînes de Segre d'origine $Z \in \mathcal{M}$ fixé, pour toutes les longueurs $i \geqslant 1$, est l'orbite (ou variété intégrale) dans $\mathcal{M}$ du point $Z$ pour la famille de champs de vecteurs $(\mathcal{L}_1, \dots, \mathcal{L}_m, \underline{\mathcal{L}}_1, \dots, \underline{\mathcal{L}}_m)$.

Les chaînes de Segre fournissent une interprétation géométrique de la notion de minimalité (au sens de J.-M. Trépreau [29,30] et A.E. Tumanov [31]) pour une sous-variété analytique réelle générique :

**Proposition 2.9** [3,19,23]. *Si $M$ est minimale en 0, il existe un entier $i_0$ tel que l'application : $T \mapsto \mathcal{L}_T^{(i_0)}(0)$ est une submersion d'un voisinage de 0 dans $(\mathbb{C}^m)^{i_0}$ sur un voisinage de $(0,0)$ dans $\mathcal{M}$.*

**Démonstration.** La variété $M$ étant analytique réelle, l'hypothèse implique que $M$ est de type fini en 0 (au sens de T. Bloom et I. Graham [4]), c'est-à-dire que l'algèbre de Lie réelle de $(L_1, \dots, L_m, \overline{L}_1, \dots, \overline{L}_m)$ en 0 est tout l'espace tangent réel $T_0M$ à $M$ en 0. La complexification d'un crochet de Lie de longueur $l$ arbitraire

$$[\dots[[[L_{j_1}^*, L_{j_2}^*], L_{j_3}^*], L_{j_4}^*], \dots, L_{j_l}^*]$$

est

$$[\dots[[[\mathcal{L}_{j_1}^*, \mathcal{L}_{j_2}^*], \mathcal{L}_{j_3}^*], \mathcal{L}_{j_4}^*], \dots, \mathcal{L}_{j_l}^*],$$

où $j_k \in \{1, \dots, m\}$, pour tout $k = 1, \dots, l$, et $L_j^*$ (resp. $\mathcal{L}_j^*$) désigne indifféremment $L_j$ ou $\overline{L}_j$ (resp. $\mathcal{L}_j$ ou $\underline{\mathcal{L}}_j$). Par conséquent, l'algèbre de Lie complexe de $(\mathcal{L}_1, \dots, \mathcal{L}_m, \underline{\mathcal{L}}_1, \dots, \underline{\mathcal{L}}_m,)$ en $(0,0)$ est tout l'espace tangent complexe $T_{(0,0)}\mathcal{M}$ à $\mathcal{M}$ en $(0,0)$. Finalement, d'après la construction de H.J. Sussmann [28], qui redémontre les théorèmes de W.L. Chow et de T. Nagano, l'orbite en $(0,0)$ de la famille $(\mathcal{L}_1, \dots, \mathcal{L}_m, \underline{\mathcal{L}}_1, \dots, \underline{\mathcal{L}}_m,)$ contient un voisinage de $(0,0)$ dans $\mathcal{M}$. En d'autres termes, il existe un entier $i_0$ tel que l'application $T \mapsto \mathcal{L}_T^{(i_0)}(0)$ est une submersion d'un voisinage de 0 dans $(\mathbb{C}^m)^{i_0}$ sur un voisinage de $(0,0)$ dans $\mathcal{M}$. $\square$

## 3. Convergence de solutions formelles d'équations analytiques

L'ingrédient essentiel pour la démonstration des Théorèmes 1.2 et 1.6 est le théorème d'approximation de M. Artin, qui établit, pour un système d'équations analytiques, l'existence de solutions analytiques arbitrairement proches pour la topologie de Krull d'une solution formelle donnée :

**Théorème 3.1** (M. Artin [1]). *Soit $g$ une application formelle entre $\mathbb{C}^n$ et $\mathbb{C}^a$ qui satisfait $g(0)=0$ et*

$$R_k\big(z,g(z)\big)=0 \quad \textit{dans}\ \mathbb{C}[[z]],\ k=1,\dots,b,$$

*où les $R_k(z,w)$ sont des fonctions holomorphes au voisinage de $(0,0)$ dans $\mathbb{C}^n\times\mathbb{C}^a$ telles que $R_k(0,0)=0$. Alors, pour tout $N\in\mathbb{N}$, il existe un voisinage $\Omega$ de $0$ dans $\mathbb{C}^n$ et une application holomorphe $h:\Omega\to\mathbb{C}^a$ tels que*

$$R_k\big(z,h(z)\big)\equiv 0 \quad \textit{au voisinage de}\ 0,\ k=1,\dots,b,$$

*et*

$$h=g \mod \mathfrak{m}^N,$$

*où $\mathfrak{m}:=\langle z_1,\dots,z_n\rangle$ désigne l'idéal maximal de $\mathbb{C}[[z]]$.*

L'énoncé suivant est un corollaire du théorème d'approximation de M. Artin :

**Lemme 3.2.** *Soit $g$ une application formelle entre $\mathbb{C}^n$ et $\mathbb{C}^a$ qui satisfait $g(0)=0$ et*

$$R_k\big(z,g(z)\big)=0 \quad \textit{dans}\ \mathbb{C}[[z]],\ k=1,\dots,b,$$

*où les $R_k(z,w)$ sont des fonctions holomorphes au voisinage de $(0,0)$ dans $\mathbb{C}^n\times\mathbb{C}^a$ telles que $R_k(0,0)=0$. Supposons que $b\geqslant a$ et qu'il existe un déterminant extrait d'ordre $a$ de $\partial R/\partial w(z,g(z))$ non nul dans $\mathbb{C}[[z]]$, en notant $R:=(R_1,\dots,R_b)$. Alors, l'application formelle $g$ est convergente.*

**Démonstration.** On peut supposer, quitte à réordonner les $R_k$, que $\det\partial R'/\partial w(z,g(z))\neq 0$ dans $\mathbb{C}[[z]]$, en notant $R':=(R_1,\dots,R_a)$. Soit $\mathcal{R}$ l'ensemble analytique complexe défini au voisinage de $(0,0)$ dans $\mathbb{C}^n\times\mathbb{C}^a$ par les équations $R_k(z,w)=0$, $k=1,\dots,a$. Pour tout $N\in\mathbb{N}$, notons $h_N$ l'application holomorphe donnée par le Théorème 3.1 et $\Gamma_N$ son graphe. Pour $N$ assez grand, la fonction holomorphe $\det\partial R'/\partial w(z,h_N(z))$ n'est pas identiquement nulle, puisque $h_N=g \mod \mathfrak{m}^N$. Notons $\mathcal{S}_N$ l'ensemble analytique complexe de dimension $n-1$ défini au voisinage de 0 dans $\mathbb{C}^n$ par l'équation $\det\partial R'/\partial w(z,h_N(z))=0$. Pour tout point $\zeta\in\mathbb{C}^n\setminus\mathcal{S}_N$ suffisamment proche de 0, $\mathcal{R}$ est une variété complexe de dimension $n$ dans un voisinage de $(\zeta,h_N(\zeta))$, et coïncide donc avec $\Gamma_N$ dans un voisinage de $(\zeta,h_N(\zeta))$. Ainsi, pour $N$ suffisamment grand, $\Gamma_N$ est une composante irréductible de $\mathcal{R}$ dans un voisinage de 0. Le nombre de composantes irréductibles de $\mathcal{R}$ étant localement fini et la suite $(h_N)$ convergeant vers $g$ pour la topologie de Krull, la suite $(h_N)$ est constante égale à $g$ à partir d'un certain rang. Par conséquent, l'application formelle $g$ est convergente. □

Dans un cas simplifié, une autre conséquence du théorème d'approximation de M. Artin est :

**Lemme 3.3.** *Soit $\phi \in \mathbb{C}[[z]]$, $z \in \mathbb{C}^n$, une série formelle qui satisfait $\phi(0) = 0$ et*

$$P\big(z, \phi(z)\big) = 0 \quad \text{dans } \mathbb{C}[[z]],$$

*où $P(z, w)$ est un polynôme en $w$ de degré $\geqslant 1$ à coefficients holomorphes en $z$, tel que $P(0,0) = 0$. Alors, la série formelle $\phi$ est convergente.*

**Démonstration.** Quitte à remplacer $P$ par $\partial P/\partial w$, on peut supposer que $\partial P/\partial w(z, \phi(z)) \neq 0$ dans $\mathbb{C}[[z]]$. Le Lemme 3.2 pour $a = b = 1$ implique alors que la série formelle $\phi$ est convergente. □

Enfin, nous aurons besoin de l'énoncé suivant dans la démonstration du Lemme 4.3, pour prouver que les dérivées transverses de l'application formelle $f$ sont convergentes sur les chaînes de Segre d'origine 0 :

**Lemme 3.4.** *Soit $\phi \in \mathbb{C}[[T, s]]$, $T \in \mathbb{C}^M$, $s \in \mathbb{C}^d$, $M \geqslant 1$, une série formelle qui satisfait $\phi(0,0) = 0$ et*

$$\phi(T,s)^N + \sum_{k=0}^{N-1} S_k(T,s)\phi(T,s)^k = 0 \quad \text{dans } \mathbb{C}[[T,s]], \tag{3.1}$$

*où $N \geqslant 1$ et les $S_k \in \mathbb{C}[[T,s]]$ sont des séries formelles telles que $S_k(0,0) = 0$ et telles que les dérivées partielles $\partial^{|\beta|}S_k/\partial s^\beta(T,0)$, $\beta \in \mathbb{N}^d$, sont convergentes. Alors, les dérivées partielles $\partial^{|\beta|}\phi/\partial s^\beta(T,0)$, $\beta \in \mathbb{N}^d$, sont convergentes.*

**Démonstration.** On étudie tout d'abord le cas où $d = 1$. Puis, lorsque $d \geqslant 2$, on se ramène au cas précédent en dérivant selon chaque direction complexe.

*Cas* 1 : $d = 1$. On écrit $\phi(T,s) = \sum_{l=0}^{\infty} \phi_l(T)s^l$, où $\phi_l \in \mathbb{C}[[T]]$, $l \in \mathbb{N}$, et on montre par récurrence sur $L \in \mathbb{N}$ que $\phi_L$ est convergente.

*Pour* $L = 0$. En posant $s = 0$ dans (3.1) on obtient que $\phi(T,0) = \phi_0(T)$ annule un polynôme à coefficients holomorphes. Le Lemme 3.3 implique alors que $\phi_0$ est convergente.

*Supposons le résultat démontré pour* $0, 1, \ldots, L-1$. La fonction

$$\psi(T,s) := \sum_{l=0}^{L-1} \phi_l(T)s^l$$

est du même type que les coefficients $S_k(T,s)$ du polynôme (3.1) (elle est même holomorphe). Ainsi, en écrivant $\phi = (\phi - \psi) + \psi$ dans (3.1), on obtient

$$(\phi - \psi)^N(T,s) + \sum_{k=0}^{N-1} S'_k(T,s)(\phi - \psi)^k(T,s) = 0 \quad \text{dans } \mathbb{C}[[T,s]], \tag{3.2}$$

où les $S'_k(T,s)$ sont des séries formelles telles que $S'_k(0,0) = 0$ et telles que pour tout $\nu \in \mathbb{N}$, $\partial^\nu S'_k/\partial s^\nu(T,0)$ est convergente. Or, $(\phi - \psi)(T,s) = s^L\phi'(T,s)$, où $\phi' \in \mathbb{C}[[T,s]]$.

En outre, si $S_k'(T,s) \neq 0$, on écrit $S_k'(T,s) = s^{L_k} S_k''(T,s)$, où $S_k''(T,0) \neq 0$. Alors, en divisant (3.2) par la plus grande puissance de $s$ possible, et en posant $s=0$, on obtient que $\phi'(T,0)$ annule un polynôme à coefficients holomorphes. Le Lemme 3.3 implique alors que $\phi'(T,0) = \phi_L(T)$ est convergent, ce qui termine la récurrence.

*Cas* 2 : $d \geqslant 2$. Pour toute direction complexe $\zeta \in S^d$, où $S^d := \{s \in \mathbb{C}^d \colon |s| = 1\}$ désigne la sphère unité de $\mathbb{C}^d$, on pose $\tilde{\phi}(T,t) := \phi(T, t\zeta)$ et $\tilde{S}_k(T,t) := S_k(T, t\zeta)$, $k = 0, \ldots, N-1$. Ce sont des séries formelles de $\mathbb{C}[[T,t]]$, $T \in \mathbb{C}^M$, $t \in \mathbb{C}$. Pour tous $k = 0, \ldots, N-1$ et $\nu \in \mathbb{N}$, la série formelle $\partial^\nu \tilde{S}_k / \partial t^\nu (T,0)$ est convergente. En posant $s = t\zeta$ dans (3.1), le cas 1 prouve alors que pour tout $\nu \in \mathbb{N}$, $\partial^\nu \tilde{\phi} / \partial t^\nu (T,0)$ est convergente. Or, on a :

**Assertion 3.5.** *Pour tout $\beta \in \mathbb{N}^d$, la dérivée partielle $\partial^{|\beta|}\phi(T,s)/\partial s^\beta|_{s=0}$ est une combinaison linéaire (finie) à coefficients constants des dérivées directionnelles $\partial^\nu \phi(T,t\zeta)/\partial t^\nu|_{t=0}$, $\zeta \in S^d$, $\nu = |\beta|$.*

L'Assertion 3.5 implique que les séries formelles $\partial^{|\beta|}\phi/\partial s^\beta (T,0)$ sont convergentes ; ce qui achève la démonstration du Lemme 3.4. □

**Démonstration de l'Assertion 3.5.** Soit $\zeta \in S^d$. Par la formule de dérivation composée, on a :

$$\frac{\partial^\nu \phi(T,t\zeta)}{\partial t^\nu}\bigg|_{t=0} = \sum_{\beta \in \mathbb{N}^d,\ |\beta| = \nu} C_\beta \zeta^\beta \frac{\partial^{|\beta|}\phi(T,s)}{\partial s^\beta}\bigg|_{s=0}, \tag{3.3}$$

où les $C_\beta$ désignent les coefficients de Pascal multidimensionnels. Le nombre de termes de la somme du membre de droite est

$$N := \binom{\nu + d - 1}{d-1}.$$

Considérons maintenant $N$ directions complexe $\zeta_1, \ldots, \zeta_N \in S^d$. L'équation (3.3) écrite pour chaque $\zeta_i$ se formule vectoriellement par

$$\left( \frac{\partial^\nu \phi(T,t\zeta_i)}{\partial t^\nu}\bigg|_{t=0} \right)_{i=1,\ldots,N} = A \left( \frac{\partial^{|\beta|}\phi(T,s)}{\partial s^\beta}\bigg|_{s=0} \right)_{\beta \in \mathbb{N}^d,\ |\beta| = \nu}, \tag{3.4}$$

où la matrice $A = (A_i^\beta)$ de taille $N \times N$ est définie par $A_i^\beta := C_\beta \zeta_i^\beta$, en utilisant la notation indicielle (resp. exponentielle) pour les numéros de lignes (resp. de colonnes) et en munissant $\mathbb{N}^d$ de l'ordre lexicographique. Il reste à prouver que la matrice $A = A(\zeta_1, \ldots, \zeta_N)$ est inversible. Le déterminant de $A$ se simplifie sous la forme d'un déterminant de Van der Monde généralisé

$$\delta(\zeta_1, \ldots, \zeta_N) := \det\big(\zeta_i^\beta\big)_{i=1,\ldots,N}^{\beta \in \mathbb{N}^d,\ |\beta| = \nu}.$$

Par la formule de développement d'un déterminant, $\delta(\zeta_1, \ldots, \zeta_N)$ est un polynôme homogène de degré $N\nu$, à coefficients entiers $+1$ ou $-1$, et dont les monômes sont les $\zeta_{\sigma(1)}^{\beta_1} \cdots \zeta_{\sigma(N)}^{\beta_N}$, où $\beta_1, \ldots, \beta_N$ sont les multi-indices de $\mathbb{N}^d$ de longueur $\nu$ rangés dans l'ordre lexicographique et où $\sigma \in \mathfrak{S}_N$ est une permutation de $\{1, \ldots, N\}$. Ainsi,

$\delta(\zeta_1,\ldots,\zeta_N)\not\equiv 0$ et il suffit de choisir $N$ directions complexes $\zeta_1^0,\ldots,\zeta_N^0\in S^d$ qui n'annulent par $\delta$ pour que $A_0:=A(\zeta_1^0,\ldots,\zeta_N^0)$ soit inversible. L'équation (3.4) pour $\zeta_1^0,\ldots,\zeta_N^0$, multipliée à gauche par $A_0^{-1}$, donne alors la conclusion. □

## 4. Premier principe de réflexion

### 4.1. *Détermination finie de $f$ par son jet*

On suit les notations et définitions de la Section 1.

La première étape de la démonstration du Théorème 1.2 utilise l'hypothèse $\dim\mathcal{V}_1=0$ et prouve que chaque $f_j$ est déterminée de façon analytique et finie par un jet d'ordre fini de $f$ (voir aussi [11], Lem. 3.3 et [12], Sect. 2) :

**Proposition 4.1.** *Si la dimension de $\mathcal{V}_1$ est nulle en 0, il existe un entier $A\geqslant 0$ et, pour tout $j=1,\ldots,n'$, il existe un polynôme de Weierstrass en $z'_j$ à coefficients holomorphes en $(z,\zeta,\Delta)\in\mathbb{C}^n\times\mathbb{C}^n\times\mathbb{C}^{\kappa(A)}$ au voisinage de $(0,0,D^A\bar f(0))$, noté $P_j(z,\zeta,\Delta)(z'_j)$, tel que*

$$P_j\big(z,\zeta,D^A\bar f(\zeta)\big)\big(f_j(z)\big)=\lambda_j(z,\zeta)\rho(z,\zeta)\quad \text{dans } \mathbb{C}[[z,\zeta]],\tag{4.1}$$

*où $\lambda_j$ est une matrice ligne $1\times d$ à coefficients dans $\mathbb{C}[[z,\zeta]]$.*

**Remarque 4.2.** La Proposition 4.1 prouve directement que l'application formelle $f$ est convergente sur la variété de Segre $Q_0$. En effet, dans le système de coordonnées (1.3), $Q_0=U\times\{0\}$ où $U$ est un voisinage de 0 dans $\mathbb{C}^m$. On pose $\zeta=0$ et $z=(x,0)$ dans (4.1) et on obtient que $P_j((x,0),0,D^A\bar f(0))(f_j(x,0))\equiv 0$ sur $U$. Le Lemme 3.3 permet de conclure alors que les $f_j(x,0)\in\mathbb{C}[[x]]$ sont convergentes.

**Démonstration de la Proposition 4.1.** Soient $\mathcal{L}_1,\ldots,\mathcal{L}_m$ les opérateurs holomorphes définis en (2.1). Pour tous $k=1,\ldots,d'$ et $\alpha\in\mathbb{N}^m$ on applique l'opérateur composé $\mathcal{L}^\alpha:=\mathcal{L}_1^{\alpha_1}\ldots\mathcal{L}_m^{\alpha_m}$ à la $k$-ième ligne de (1.5) et on obtient que

$$\mathcal{L}^\alpha(z,\zeta)\rho'_k\big(f(z),\bar f(\zeta)\big)=\big[\mathcal{L}^\alpha(z,\zeta)\mu_k(z,\zeta)\big]\rho(z,\zeta)\quad \text{dans } \mathbb{C}[[z,\zeta]].\tag{4.2}$$

En effet, $\mathcal{L}_j(z,\zeta)\tilde\rho(z,\zeta)\equiv 0$ pour tout $j=1,\ldots,m$, où l'on pose $\tilde\rho(z,\zeta):=y-\phi(x,\xi,\eta)$ avec $z=(x,y)$ et $\zeta=(\xi,\eta)$. Les $\tilde\rho_k(z,\bar z)$ sont aussi des fonctions définissantes de $M$ ; par un léger abus de notation, nous continuerons de noter $\rho$ à la place de $\tilde\rho$ (voir aussi le Lemme 5.1).

Récrivons (4.2) après conjugaison complexe sous la forme

$$H_k^\alpha\big(z,\zeta,D^{|\alpha|}\bar f(\zeta),f(z)\big)=\nu_k^\alpha(z,\zeta)\rho(z,\zeta)\quad \text{dans } \mathbb{C}[[z,\zeta]],\tag{4.3}$$

où les $H_k^\alpha$ sont des fonctions holomorphes au voisinage du point $(0,0,D^{|\alpha|}\bar f(0),0)$ dans $\mathbb{C}^n\times\mathbb{C}^n\times\mathbb{C}^{\kappa(|\alpha|)}\times\mathbb{C}^{n'}$ et les $\nu_k^\alpha$ sont des matrices lignes $1\times d$ à coefficients dans $\mathbb{C}[[z,\zeta]]$. Par nœthérianité de l'anneau $\mathbb{C}[[z,\zeta,z']]$, il existe un entier $A\geqslant 0$ (on choisit le plus petit, cf. Section 1.3) tel que la famille des $H_k^\alpha(z,\zeta,D^{|\alpha|}\bar f(\zeta),z')$ pour tous $k$ et $\alpha$ engendre le même idéal que la famille *finie* pour $|\alpha|\leqslant A$.

Dans l'espace affine complexe $E := \mathbb{C}^n \times \mathbb{C}^n \times \mathbb{C}^{\kappa(A)} \times \mathbb{C}^{n'}$ muni des coordonnées canoniques $(z, \zeta, \Delta, z')$, on considère le sous-ensemble analytique complexe $\mathcal{V}_1^*$ défini dans un voisinage du point $p_0 := (0, 0, D^A \bar{f}(0), 0)$ par l'équation

$$H(z, \zeta, \Delta, z') = 0,$$

où l'on pose $H := (H_k^\alpha)_{k=1,\dots,d',|\alpha|\leqslant A}$, après avoir trivialement prolongé les $H_k^\alpha$ à un voisinage de $p_0$ dans $E$. Vu la Définition 1.1, la première variété caractéristique $\mathcal{V}_1$ coïncide avec la fibre

$$\{z'\colon (0, 0, D^A \bar{f}(0), z') \in \mathcal{V}_1^*\}.$$

Puisque cette fibre est de dimension zéro en $p_0$, on peut appliquer le théorème fondamental de représentation locale des ensembles analytiques complexes (cf. [6], Sect. 5.6, Prop. 4). Il s'en suit que $\mathcal{V}_1^*$ est contenu dans le sous-ensemble analytique complexe défini au voisinage de $p_0$ par les équations

$$P_j(z, \zeta, \Delta)(z'_j) = 0, \quad j = 1, \dots, n', \tag{4.4}$$

où $P_j(z, \zeta, \Delta)(z'_j)$ est un polynôme de Weierstrass en $z'_j$ à coefficients holomorphes en $(z, \zeta, \Delta)$.

Ainsi, chaque polynôme $P_j$ s'annule sur l'ensemble analytique complexe $\mathcal{V}_1^*$, c'est-à-dire que $P_j(z, \zeta, \Delta)(z'_j)$ appartient au radical de l'idéal $\langle H \rangle$ engendré par les $H_k^\alpha$, $k = 1, \dots, d'$, $|\alpha| \leqslant A$. Quitte à élever $P_j$ à une certaine puissance entière, on peut supposer que chaque $P_j$ appartient à l'idéal $\langle H \rangle$. Cela signifie que pour tout $j = 1, \dots, n'$, il existe une matrice ligne $1 \times d'\binom{m+A}{m}$ à coefficients holomorphes, notée $G_j(z, \zeta, \Delta, z')$, telle que

$$P_j(z, \zeta, \Delta)(z'_j) = G_j(z, \zeta, \Delta, z') H(z, \zeta, \Delta, z'). \tag{4.5}$$

Finalement, (4.3) et (4.5) impliquent que

$$P_j\big(z, \zeta, D^A \bar{f}(\zeta)\big)(f_j(z)) = G_j\big(z, \zeta, D^A \bar{f}(\zeta), f(z)\big)\delta(z, \zeta)\rho(z, \zeta) \quad \text{dans } \mathbb{C}[[z, \zeta]],$$

où $\delta$ est la matrice ligne formées des $\nu_k^\alpha$ pour $k = 1, \dots, d'$ et $|\alpha| \leqslant A$. Ceci achève la démonstration de la Proposition 4.1 en prenant $\lambda_j(z, \zeta) := G_j(z, \zeta, D^A \bar{f}(\zeta), f(z))\delta(z, \zeta)$ dans $\mathbb{C}[[z, \zeta]]$. □

### *4.2. Convergence de $f$ sur les chaînes de Segre*

Soient $\mathcal{L}_j$ et $\underline{\mathcal{L}}_j$, $j = 1, \dots, m$, les champs de vecteurs holomorphes tangents à $\mathcal{M}$ définis en (2.1) et (2.2). La variété complexe $\mathcal{M}$ pouvant être définie indifféremment par les équations $y = \phi(x, \xi, \eta)$ ou $\eta = \bar{\phi}(\xi, x, y)$, on définit deux nouvelles familles de champs de vecteurs holomorphes tangents à $\mathcal{M}$ :

$$\mathcal{K}_l(z, \zeta) := \frac{\partial}{\partial y_l} + \sum_{k=1}^{d} \frac{\partial \bar{\phi}_k}{\partial y_l}(\xi, x, y) \frac{\partial}{\partial \eta_k}, \quad l = 1, \dots, d,$$

et

$$\underline{\mathcal{K}}_l(z, \zeta) := \frac{\partial}{\partial \eta_l} + \sum_{k=1}^{d} \frac{\partial \phi_k}{\partial \eta_l}(x, \xi, \eta) \frac{\partial}{\partial x_k}, \quad l = 1, \dots, d.$$

Les champs $(\mathcal{L}_1, \ldots, \mathcal{L}_m, \mathcal{K}_1, \ldots, \mathcal{K}_d)$ (resp. $(\underline{\mathcal{L}}_1, \ldots, \underline{\mathcal{L}}_m, \underline{\mathcal{K}}_1, \ldots, \underline{\mathcal{K}}_d)$) commutent entre eux. Comme à la Section 2.3, on utilise la notation $\mathcal{L}^i_j := \mathcal{L}_j$ (resp. $\underline{\mathcal{L}}_j$) si $i$ est impair (resp. pair) ; de même pour $\mathcal{K}^i_j$. Puis, pour $i \geqslant 1$ et des multi-temps $t \in \mathbb{C}^m$ et $s \in \mathbb{C}^d$, on pose $\mathcal{L}^i_t := \mathcal{L}^i_{m,t_m} \circ \cdots \circ \mathcal{L}^i_{1,t_1}$ et $\mathcal{K}^i_s := \mathcal{K}^i_{d,s_d} \circ \cdots \circ \mathcal{K}^i_{1,s_1}$. Pour $Z = (z, \zeta) \in \mathcal{M}$, on pose par abus de notation $f(Z) := f(z)$ et $\bar{f}(Z) := \bar{f}(\zeta)$. Plus généralement, pour $i \geqslant 1$, on pose

$$f^i(Z) := \begin{cases} f(z) & \text{si } i \text{ est impair,} \\ \bar{f}(\zeta) & \text{si } i \text{ est pair.} \end{cases} \tag{4.6}$$

Remarquons que si $F \in \mathbb{C}[[z]]$ est une série formelle en $z \in \mathbb{C}^n$, alors pour tout $t \in \mathbb{C}^d$, $F(\mathcal{L}_t(Z)) = F(Z)$ dans $\mathbb{C}[[Z]]$, où $Z = (z, \zeta) \in \mathcal{M}$ et $F(Z) := F(z)$. De même, si $G \in \mathbb{C}[[\zeta]]$, $G(\underline{\mathcal{L}}_\tau(Z)) = G(Z)$ dans $\mathbb{C}[[Z]]$, pour $\tau \in \mathbb{C}^d$ et $G(Z) := G(\zeta)$. En particulier, pour tout $i \geqslant 1$ et $A \in \mathbb{N}$, on a :

$$D^A f^i\big(\mathcal{L}^{(i+1)}_{(T,t)}(0)\big) = D^A f^i\big(\mathcal{L}^{(i)}_T(0)\big) \quad \text{dans } \mathbb{C}[[T, t]], \tag{4.7}$$

où $T \in (\mathbb{C}^m)^i$ et $t \in \mathbb{C}^m$.

L'équation (4.1) conjuguée, en remplaçant $\bar{z}$ (resp. $\bar{\zeta}$) par $\zeta$ (resp. $z$), donne :

$$\bar{P}_j\big(\zeta, z, D^A f(z)\big)\big(\bar{f}_j(\zeta)\big) = \bar{\lambda}_j(\zeta, z)\rho(z, \zeta) \quad \text{dans } \mathbb{C}[[z, \zeta]]. \tag{4.8}$$

Avec $Z = (z, \zeta)$ et en posant

$$P^i_j\big(Z, D^A f^i(Z)\big)\big(f^i_j(Z)\big) := \begin{cases} P_j(z, \zeta, D^A \bar{f}(\zeta))(f_j(z)) & \text{si } i \text{ est impair,} \\ \bar{P}_j(\zeta, z, D^A f(z))(\bar{f}_j(\zeta)) & \text{si } i \text{ est pair,} \end{cases}$$

et

$$\lambda^i_j(Z) := \begin{cases} \lambda_j(z, \zeta) & \text{si } i \text{ est impair,} \\ \bar{\lambda}_j(\zeta, z) & \text{si } i \text{ est pair,} \end{cases}$$

les équations (4.1) et (4.8) s'écrivent sous la forme commune :

$$P^i_j\big(Z, D^A f^{i-1}(Z)\big)\big(f^i_j(Z)\big) = \lambda^i_j(Z)\rho(Z) \quad \text{dans } \mathbb{C}[[Z]], \tag{4.9}$$

pour tous $i \geqslant 1$ et $j = 1, \ldots, n'$.

**Lemme 4.3.** *Si $f$ vérifie l'égalité formelle* (4.9)*, alors pour tous $i \geqslant 1$ et $B \in \mathbb{N}$, le jet $D^B f^i$ d'ordre $B$ de l'application formelle $f^i$ est convergent sur la chaîne de Segre $\mathcal{S}^i_0$ de longueur $i$ et d'origine* 0*, c'est-à-dire que $D^B f^i|_{\mathcal{S}^i_0}$ est convergent.*

**Démonstration.** On montre par récurrence sur $i \geqslant 1$ que pour tout $B \in \mathbb{N}$, $D^B f^i|_{\mathcal{S}^i_0}$ est convergent, c'est-à-dire que l'application formelle $D^B f^i(\mathcal{L}^{(i)}_T(0))$ est convergente, $T \in (\mathbb{C}^m)^i$.

Fixons donc $i \geqslant 1$. On montre tout d'abord que les dérivées transverses $\mathcal{K}^{i\,\beta} f^i(\mathcal{L}^{(i)}_T(0))$, $\beta \in \mathbb{N}^d$, sont convergentes. En posant $Z = \mathcal{K}^i_s \circ \mathcal{L}^{(i)}_T(0) \in \mathcal{M}$ dans l'équation (4.9), vu (4.7) et puisque les $\mathcal{K}_l$ (resp. $\underline{\mathcal{K}}_l$) commutent avec les $\mathcal{L}_j$ (resp. $\underline{\mathcal{L}}_j$), on obtient que pour tous $i \geqslant 1$ et $j = 1, \ldots, n'$,

$$P_j^i\big(\mathcal{K}_s^i \circ \mathcal{L}_T^{(i)}(0), D^A f^{i-1}\big(\mathcal{K}_s^i \circ \mathcal{L}_{T'}^{(i-1)}(0)\big)\big)\big(f_j^i\big(\mathcal{K}_s^i \circ \mathcal{L}_T^{(i)}(0)\big)\big) = 0$$
$$\text{dans } \mathbb{C}[[T, s]], \tag{4.10}$$

où $s \in \mathbb{C}^d$, $T = (T_1, \ldots, T_i) \in (\mathbb{C}^m)^i$ et $T' = (T_1, \ldots, T_{i-1})$. Les coefficients de l'équation polynomiale (4.10) sont de la forme

$$S(T, s) = H\big(\mathcal{K}_s^i \circ \mathcal{L}_T^{(i)}(0), D^A f^{i-1}\big(\mathcal{K}_s^i \circ \mathcal{L}_{T'}^{(i-1)}(0)\big)\big),$$

où $H(Z, D)$ est une fonction holomorphe. Pour $\beta \in \mathbb{N}^d$, la dérivée partielle $\partial^{|\beta|} S / \partial s^\beta (T, 0)$ est une fonction holomorphe en les

$$\frac{\partial^{|\gamma|}}{\partial s^\gamma}\big(\mathcal{K}_s^i \circ \mathcal{L}_T^{(i)}(0)\big)\big|_{s=0}, \quad \gamma \in \mathbb{N}^d, \ |\gamma| \leqslant |\beta|, \tag{4.11}$$

et en les

$$\frac{\partial^{|\delta|}}{\partial s^\delta}\big(D^A f^{i-1}\big(\mathcal{K}_s^i \circ \mathcal{L}_{T'}^{(i-1)}(0)\big)\big)\big|_{s=0} = \mathcal{K}^{i^\delta} D^A f^{i-1}\big(\mathcal{L}_{T'}^{(i-1)}(0)\big),$$
$$\delta \in \mathbb{N}^d, \ |\delta| \leqslant |\beta|. \tag{4.12}$$

Or, les fonctions du type (4.11) sont convergentes puisque les $\mathcal{L}_j^i$ et les $\mathcal{K}_l^i$ sont des champs holomorphes, et les fonctions du type (4.12) sont convergentes par hypothèse de récurrence pour $i \geqslant 2$, et sont constantes égales à $\mathcal{K}^\delta D^A \bar{f}(0)$ pour $i = 1$. Ainsi, les hypothèses du Lemme 3.4 sont satisfaites et l'on obtient que les séries formelles

$$\frac{\partial^{|\beta|}}{\partial s^\beta}\big(f_j^i\big(\mathcal{K}_s^i \circ \mathcal{L}_T^{(i)}(0)\big)\big)\big|_{s=0} = \mathcal{K}^{i^\beta} f_j^i\big(\mathcal{L}_T^{(i)}(0)\big) \tag{4.13}$$

sont convergentes.

Soient $\alpha \in \mathbb{N}^m$ et $\beta \in \mathbb{N}^d$. On cherche à calculer la dérivée partielle

$$\frac{\partial^{|\alpha|+|\beta|}}{\partial t^\alpha \partial s^\beta}\big(f_j^i\big(\mathcal{L}_t^i \circ \mathcal{K}_s^i \circ \mathcal{L}_T^{(i)}(0)\big)\big)\big|_{(t,s)=(0,0)} = \mathcal{L}^{i^\alpha} \mathcal{K}^{i^\beta} f_j^i\big(\mathcal{L}_T^{(i)}(0)\big),$$

pour $j = 1, \ldots, n'$, $i \geqslant 1$, $t \in \mathbb{C}^m$, $s \in \mathbb{C}^d$ et $T \in (\mathbb{C}^m)^i$. Puisque les séries formelles (4.13) sont convergentes, et comme $\mathcal{L}_t^i \circ \mathcal{K}_s^i \circ \mathcal{L}_T^{(i)}(0) = \mathcal{K}_s^i \circ \mathcal{L}_{(T_1,\ldots,T_{i-1},T_i+t)}^{(i)}(0)$, les séries formelles

$$\mathcal{K}^{i^\beta} f_j^i\big(\mathcal{L}_{(T_1,\ldots,T_{i-1},T_i+t)}^{(i)}(0)\big) \in \mathbb{C}[[T, t]] \tag{4.14}$$

sont convergentes. Par conséquent, la dérivée partielle $\partial^{|\alpha|}/\partial t^\alpha|_{t=0}$ de (4.14), qui vaut $\mathcal{L}^{i^\alpha} \mathcal{K}^{i^\beta} f_j^i(\mathcal{L}_T^{(i)}(0))$, est aussi convergente. Or, pour $\gamma \in \mathbb{N}^n$, $j = 1, \ldots, n'$ et $i \geqslant 1$ fixés, la dérivée partielle $\partial^{|\gamma|} f_j^i / \partial Z^\gamma$ est une combinaison linéaire à coefficients constants des $\mathcal{L}^{i^\alpha} \mathcal{K}^{i^\beta} f_j^i$, $|\alpha| + |\beta| \leqslant |\gamma|$ ; elle est donc aussi convergente. Ceci prouve que pour tout $B \in \mathbb{N}$, le jet $D^B f^i(\mathcal{L}_T^{(i)}(0))$ est convergent, ce qui termine la récurrence. □

La seconde étape de la démonstration du Théorème 1.2 utilise l'hypothèse de minimalité :

**Proposition 4.4.** *Si $M$ est minimale en* 0 *et si $f$ vérifie l'égalité formelle* (4.1) (*équivalente à* (4.9)), *l'application formelle $f$ est convergente.*

**Démonstration.** Puisque $M$ est minimale en 0, la Proposition 2.9 implique qu'il existe un entier $i_0$ tel que l'application holomorphe $\Psi : T \mapsto \mathcal{L}_T^{(i_0)}(0)$ est une submersion d'un voisinage $U \in \mathcal{V}_{(\mathbb{C}^m)^{i_0}}(0)$ de 0 dans $(\mathbb{C}^m)^{i_0}$ sur un voisinage $V \in \mathcal{V}_{\mathcal{M}}(0)$ de 0 dans $\mathcal{M}$. Par suite, il existe une application holomorphe $\Phi : V' \to U'$, $V' \in \mathcal{V}_{\mathcal{M}}(0)$, $U' \in \mathcal{V}_{(\mathbb{C}^m)^{i_0}}(0)$, $V' \subset V$, $U' \subset U$, telle que $\Psi \circ \Phi = \mathrm{id}_{V'}$.

Puisque $f$ vérifie (4.9), on peut appliquer le Lemme 4.3 pour $B = 0$ et $i = i_0$. Ceci prouve que l'application formelle $f^{i_0}(\mathcal{L}_T^{(i_0)}(0))$ est convergente, $T \in (\mathbb{C}^m)^{i_0}$. Finalement, en posant $T = \Phi(Z)$ pour $Z \in V'$, on obtient que $f^{i_0}(Z)$ est convergente, et par conséquent que l'application formelle $f$ est convergente. □

**Fin de la démonstration du Théorème 1.2.** La dimension de $\mathcal{V}_1$ étant nulle en 0, la Proposition 4.1 prouve que $f$ vérifie l'égalité formelle (4.1), qui est équivalente à (4.9) vu le début de la Section 4.2. Puis, $M$ étant minimale en 0, la Proposition 4.4 termine la démonstration de la convergence de $f$. □

## 5. Second principe de réflexion

### *5.1. Préliminaires*

On suit les notations et définitions de la Section 1. On convient de noter $\mathbb{C}^n \ni z = (x, y) \in \mathbb{C}^m \times \mathbb{C}^d$, $\zeta = (\xi, \eta)$ et $w = (u, v)$. Si la condition $(\mathcal{R})$ est satisfaite (cf. Définition 1.4), on note également $\mathbb{C}^{n'} \ni \zeta' = (\zeta_1', \zeta_2') \in \mathbb{C}^a \times \mathbb{C}^b$ et $f = (f_1, f_2)$.

Une écriture équivalente de la relation (1.5) qui exprime que $f$ est une application formelle entre $M$ et $M'$ nous sera utile :

**Lemme 5.1.** *L'égalité* (1.5) *est équivalente à*

$$\rho'\big(f\big(x, \phi(x, \xi, \eta)\big), \bar{f}(\xi, \eta)\big) = 0 \quad \textit{dans}\ \mathbb{C}[[x, \xi, \eta]], \tag{5.1}$$

*pour* $x, \xi \in \mathbb{C}^m$ *et* $\eta \in \mathbb{C}^d$.

**Démonstration.** En effet, compte tenu de (1.2), la condition nécessaire est directe. Pour la condition suffisante, on effectue le changement de variables holomorphe $\tilde{x} = x$, $\tilde{y} = y - \phi(x, \xi, \eta)$, $\tilde{\xi} = \xi$ et $\tilde{\eta} = \eta$. On a alors $\psi(x, y, \xi, \eta) := \rho'(f(z), \bar{f}(\zeta)) = \tilde{\psi}(\tilde{x}, \tilde{y}, \tilde{\xi}, \tilde{\eta})$. Or, $\psi(x, \phi(x, \xi, \eta), \xi, \eta) = 0$ dans $\mathbb{C}[[x, \xi, \eta]]$ vu (5.1) ; d'où $\tilde{\psi}(\tilde{x}, 0, \tilde{\xi}, \tilde{\eta}) = 0$. On peut donc factoriser $\tilde{y}$ dans la série entière $\tilde{\psi}$ et écrire $\tilde{\psi}(\tilde{x}, \tilde{y}, \tilde{\xi}, \tilde{\eta}) = \tilde{y}\tilde{\psi}_1(\tilde{x}, \tilde{y}, \tilde{\xi}, \tilde{\eta})$. On a ainsi obtenu (1.5), avec le léger abus de notation qui consiste à conserver l'écriture $\rho(z, \zeta)$, au lieu de $\tilde{\rho}(z, \zeta) := y - \phi(x, \xi, \eta)$, pour les fonctions définissantes de $M$ (cf. le même abus de notation en (4.2)). □

Pour tous $x, \xi \in \mathbb{C}^m$ et $\mathbb{C}^n \ni w = (u, v) \in \mathbb{C}^m \times \mathbb{C}^d$ proches de 0, on pose

$$\zeta(\xi, w) := \big(\xi, \bar{\phi}(\xi, w)\big) \in \mathbb{C}^n$$

et

$$z(x, \xi, w) := \big(x, \phi\big(x, \zeta(\xi, w)\big)\big) \in \mathbb{C}^n. \tag{5.2}$$

Vu (1.2), $\rho(w, \zeta(\xi, w)) \equiv 0$ et $\rho(z(x, \xi, w), \zeta(\xi, w)) \equiv 0$ au voisinage de 0. En outre, vu l'identité $\phi(u, \xi, \bar{\phi}(\xi, u, v)) \equiv v$, on a

$$z(u, \xi, w) = w, \tag{5.3}$$

pour tous $\xi$ et $w$.

Le lemme suivant généralise l'idée déjà contenue dans [13], Sect. 6, qui permet d'effectuer une seconde réflexion par rapport à $M'$ :

**Lemme 5.2.** *Si la condition $(\mathcal{R})$ est satisfaite, la série formelle*

$$\rho'_k\big(f\big(z(x, \xi, w)\big), \zeta'_1, \bar{h}\big(\zeta(\xi, w), w, D^A f(w), \zeta'_1\big)\big) \tag{5.4}$$

*est nulle dans* $\mathbb{C}[[x, \xi, w, \zeta'_1]]$, *pour tout* $k = 1, \ldots, d'$.

**Démonstration.** Soit $k = 1, \ldots, d'$. Vu (5.3), on a

$$\rho'_k\big(f\big(z(u + t, \xi, w)\big), \zeta'\big) = \sum_{\alpha \in \mathbb{N}^m} \bar{H}_k^\alpha\big(\zeta(\xi, w), w, D^A f(w), \zeta'\big)\frac{t^\alpha}{\alpha!}$$
$$\text{dans } \mathbb{C}[[t, \xi, w, \zeta'_1]], \tag{5.5}$$

où $H_k^\alpha$ est la fonction holomorphe définie en (4.3). En effet, vu (5.2), appliquer l'opérateur $\partial/\partial x_j$ à $\psi(z(x, \xi, w))$ équivaut à appliquer l'opérateur $\mathcal{L}_j$ à $\psi(\zeta(\xi, w))$, pour $\psi$ une série formelle quelconque. Or, la condition $(\mathcal{R})$ étant satisfaite, la substitution $\zeta' = (\zeta'_1, \bar{h}(\zeta(\xi, w), w, D^A f(w), \zeta'_1))$ dans chaque $\bar{H}_k^\alpha(\zeta(\xi, w), w, D^A f(w), \zeta')$ donne zéro. Par conséquent, en effectuant cette substitution dans (5.5) et après le changement de variable $x = u + t$, on obtient (5.4). □

Grâce au Lemme 5.2, la seconde réflexion par rapport à $M'$ est possible et donne une relation analogue à (4.3) :

**Lemme 5.3.** *Si la condition $(\mathcal{R})$ est satisfaite, il existe des fonctions $G_k^\beta$, $k = 1, \ldots, d'$, $\beta \in \mathbb{N}^a$, holomorphes au voisinage de* $(0, 0, 0, D^A f(0), 0)$ *dans* $\mathbb{C}^n \times \mathbb{C}^n \times \mathbb{C}^a \times \mathbb{C}^{\kappa(A)} \times \mathbb{C}^{n'}$ *telles que*

$$G_k^\beta\big(\zeta, w, \bar{f}_1(\zeta), D^A f(w), f(z)\big) = B_k^\beta(z, \zeta, w)\rho(z, \zeta) + C_k^\beta(z, \zeta, w)\rho(w, \zeta)$$
$$\textit{dans } \mathbb{C}[[z, \zeta, w]], \tag{5.6}$$

*où les $B_k^\beta$ et $C_k^\beta$ sont des matrices lignes $1 \times d$ à coefficients dans* $\mathbb{C}[[z, \zeta, w]]$.

**Démonstration.** Le Lemme 5.2 prouve que pour tout $k = 1, \ldots, d'$, la série formelle (5.4) est nulle dans $\mathbb{C}[[x, \xi, w, \zeta'_1]]$. Pour tout $\beta \in \mathbb{N}^a$, la dérivée partielle $\partial^{|\beta|}/\partial \zeta_1'^\beta$ de (5.4) est donc également nulle. Elle s'écrit sous la forme

$$G_k^\beta\big(\zeta(\xi, w), w, \zeta'_1, D^A f(w), f\big(z(x, \xi, w)\big)\big), \tag{5.7}$$

où les $G_k^\beta$ sont des fonctions holomorphes au voisinage de $(0,0,0,D^A f(0),0)$ dans $\mathbb{C}^n \times \mathbb{C}^n \times \mathbb{C}^a \times \mathbb{C}^{\kappa(A)} \times \mathbb{C}^{n'}$. En particulier, en substituant $\zeta_1' = \bar{f}_1(\zeta(\xi,w))$ dans (5.7), on obtient que la série formelle

$$G_k^\beta\big(\zeta(\xi,w),w,\bar{f}_1\big(\zeta(\xi,w)\big),D^A f(w),f\big(z(x,\xi,w)\big)\big) \tag{5.8}$$

est nulle dans dans $\mathbb{C}[[x,\xi,w]]$, pour tous $k=1,\dots,d'$ et $\beta \in \mathbb{N}^a$.

La fin de la démonstration est inspirée du Lemme 5.1. En effectuant le changement de variable $\tilde{\eta} = \eta - \bar{\phi}(\xi,w)$ dans (5.8), on obtient que le vecteur colonne $\rho(w,\zeta)$ est en facteur dans $G_k^\beta(\zeta,w,\bar{f}_1(\zeta),D^A f(w),f(x,\phi(x,\zeta)))$, c'est-à-dire qu'il existe une matrice ligne $C_k^\beta$ à coefficients dans $\mathbb{C}[[z,\zeta,w]]$ telle que $G_k^\beta = C_k^\beta \rho$. Finalement, on obtient (5.6) en effectuant le changement de variable $\tilde{y} = y - \phi(y,\zeta)$ dans $G_k^\beta - C_k^\beta \rho$. □

**Remarque 5.4.** Appliquer l'opérateur $\partial/\partial\zeta_{1j}'$ à

$$\psi\big(\zeta_1',\bar{h}\big(\zeta(\xi,w),w,D^A f(w),\zeta_1'\big)\big)$$

en $w=\xi=0$ équivaut après conjugaison complexe à appliquer l'opérateur $\Gamma_j$ défini en (1.10) à $\psi(z')$, pour $\psi$ une série formelle quelconque. Par conséquent, la fonction antiholomorphe $z' \mapsto \bar{G}_k^\beta(0,0,0,D^A\bar{f}(0),\bar{z}')$ est égale à la fonction $\Psi_k^\beta$ définie en (1.11).

*5.2. Détermination finie de $f$ par deux jets*

La première étape de la démonstration du Théorème 1.6 prouve un énoncé analogue à la Proposition 4.1, mais qui concerne les jets de $f$ en *deux points* :

**Proposition 5.5.** *Si la condition ($\mathcal{R}$) est satisfaite et si la dimension de $\mathcal{V}_2$ est nulle en 0, il existe un entier $A \geqslant 0$ et, pour tout $j=1,\dots,n'$, il existe un polynôme de Weierstrass en $z_j'$ à coefficients holomorphes en $(z,\zeta,w,\Delta,D) \in \mathbb{C}^n \times \mathbb{C}^n \times \mathbb{C}^n \times \mathbb{C}^{\kappa(A)} \times \mathbb{C}^{\kappa(A)}$ au voisinage de $(0,0,0,D^A\bar{f}(0),D^A f(0))$, noté $Q_j(z,\zeta,w,\Delta,D)(z_j')$, tel que*

$$\begin{aligned}&Q_j\big(z,\zeta,w,D^A\bar{f}(\zeta),D^A f(w)\big)\big(f_j(z)\big) = B_j(z,\zeta,w)\rho(z,\zeta) + C_j(z,\zeta,w)\rho(w,\zeta)\\ &\quad \textit{dans } \mathbb{C}[[z,\zeta,w]],\end{aligned} \tag{5.9}$$

*où $B_j$ et $C_j$ sont des matrices lignes $1\times d$ à coefficients dans $\mathbb{C}[[z,\zeta,w]]$.*

**Démonstration.** La réunion des deux familles d'équations (4.3) et (5.6) donne un nouveau système d'équations : pour tout $k \in \mathbb{N}$,

$$\begin{aligned}&F_k\big(z,\zeta,w,D^A\bar{f}(\zeta),D^A f(w),f(z)\big) = B_k'(z,\zeta,w)\rho(z,\zeta) + C_k'(z,\zeta,w)\rho(w,\zeta)\\ &\quad \text{dans } \mathbb{C}[[z,\zeta,w]],\end{aligned} \tag{5.10}$$

où les $F_k$ sont des fonctions holomorphes au voisinage du point $\pi_0 := (0,0,0,D^A\bar{f}(0), D^A f(0),0)$ dans $\mathbb{C}^n \times \mathbb{C}^n \times \mathbb{C}^n \times \mathbb{C}^{\kappa(A)} \times \mathbb{C}^{\kappa(A)} \times \mathbb{C}^{n'}$ et les $B_k'$ et $C_k'$ sont des matrices lignes $1\times d$ à coefficients dans $\mathbb{C}[[z,\zeta,w]]$.

On procède maintenant comme pour la Proposition 4.1. Dans $\mathbb{C}^n \times \mathbb{C}^n \times \mathbb{C}^n \times \mathbb{C}^{\kappa(A)} \times \mathbb{C}^{\kappa(A)} \times \mathbb{C}^{n'}$ on considère le sous-ensemble analytique complexe $\mathcal{V}_2^*$ défini dans un voisinage du point $\pi_0$ par les équations

$$F_k(z, \zeta, w, \Delta, D, z') = 0, \quad k \in \mathbb{N}.$$

Vu la Remarque 5.4, la seconde variété caractéristique $\mathcal{V}_2$ coïncide avec la fibre

$$\{z' \colon (0, 0, 0, D^A \bar{f}(0), D^A f(0), z') \in \mathcal{V}_2^*\}.$$

Cette fibre étant de dimension zéro en $\pi_0$, le théorème fondamental de représentation locale des ensembles analytiques complexes (cf. [6]) prouve que $\mathcal{V}_2^*$ est contenu dans le sous-ensemble analytique complexe défini au voisinage de $\pi_0$ par les équations

$$Q_j(z, \zeta, w, \Delta, D)(z'_j) = 0, \quad j = 1, \ldots, n', \tag{5.11}$$

où $Q_j(z, \zeta, w, \Delta, D)(z'_j)$ est un polynôme de Weierstrass en $z'_j$ à coefficients holomorphes en $(z, \zeta, w, \Delta, D)$.

Ainsi, chaque polynôme $Q_j$, quitte à l'élever à une certaine puissance, appartient à l'idéal $\langle F_k, k \in \mathbb{N}\rangle$. Pour tout $j = 1, \ldots, n'$, il existe donc un entier $K_j \geqslant 0$ et une matrice ligne $D_j$ de taille $1 \times K_j$ à coefficients holomorphes telle que

$$Q_j(z, \zeta, w, \Delta, D)(z'_j) = D_j(z, \zeta, w, \Delta, D, z') F^j(z, \zeta, w, \Delta, D, z'), \tag{5.12}$$

où $F^j$ désigne le vecteur colonne $(F_1, \ldots, F_{K_j})$. Finalement, (5.10) et (5.12) impliquent (5.9). $\square$

### 5.3. *Convergence de $f$ sur les chaînes de Segre et fin des démonstrations*

On reprend les notations de la Section 4.2. On pose $\pi : \mathbb{C}^n \times \mathbb{C}^n \ni (z, \zeta) \mapsto z \in \mathbb{C}^n$ et $\underline{\pi} : (z, \zeta) \mapsto \zeta$ les projections canoniques. Pour tout entier $i \geqslant 1$, soient

$$\begin{aligned} Z^i &:= \mathcal{K}_s^i \circ \mathcal{L}_T^{(i)}(0), \\ Z^{i-1} &:= \mathcal{K}_s^i \circ \mathcal{L}_{T'}^{(i-1)}(0), \\ Z^{i-2} &:= \mathcal{K}_s^i \circ \mathcal{L}_{T''}^{(i-2)}(0), \end{aligned}$$

des points de $\mathcal{M}$, où $s \in \mathbb{C}^d$ et $T = (T_1, \ldots, T_i) \in (\mathbb{C}^m)^i$ sont proches de 0 et où $T' = (T_1, \ldots, T_{i-1})$ et $T'' = (T_1, \ldots, T_{i-2})$. Par convention, on pose $Z^0 = Z^{-1} = 0$.

Pour tout $i \geqslant 1$ *impair*, on pose $z^i := \pi(Z^i)$, $\zeta^i := \underline{\pi}(Z^{i-1})$ et $w^i := \pi(Z^{i-2})$. Remarquons que $\underline{\pi}(Z^{i-1}) = \underline{\pi}(Z^i)$ et que $\pi(Z^{i-2}) = \pi(Z^{i-1})$. En substituant $z = z^i$, $\zeta = \zeta^i$ et $w = w^i$ dans (5.9), puisque $\rho(z^i, \zeta^i) = \rho(Z^i) = 0$ et $\rho(w^i, \zeta^i) = \rho(Z^{i-1}) = 0$, on obtient

$$Q_j\big(\pi(Z^i), \underline{\pi}(Z^{i-1}), \pi(Z^{i-2}), D^A f^{i-1}(Z^{i-1}), D^A f^{i-2}(Z^{i-2})\big)\big(f_j^i(Z^i)\big) = 0 \quad \text{dans } \mathbb{C}[[T, s]], \tag{5.13}$$

avec la notation $f^i$ définie en (4.6).

De même, pour tout $i \geqslant 2$ *pair*, en substituant $\bar{z} = \underline{\pi}(Z^i)$, $\bar{\zeta} = \pi(Z^{i-1})$ et $\bar{w} = \underline{\pi}(Z^{i-2})$ dans la conjuguée de (5.9), on obtient

$$\bar{Q}_j\big(\underline{\pi}(Z^i),\pi(Z^{i-1}),\underline{\pi}(Z^{i-2}),D^A f^{i-1}(Z^{i-1}),D^A f^{i-2}(Z^{i-2})\big)\big(f_j^i(Z^i)\big)=0 \quad \text{dans } \mathbb{C}[[T,s]]. \tag{5.14}$$

Finalement, en posant $Q_j^i := Q_j$ (resp. $\bar{Q}_j$) si $i$ est impair (resp. pair) et par un léger abus de notation sur $Q_j^i$, (5.13) et (5.14) impliquent que pour tous $i \geqslant 1$ et $j = 1,\dots,n'$,

$$Q_j^i\big(Z^i,Z^{i-1},Z^{i-2},D^A f^{i-1}(Z^{i-1}),D^A f^{i-2}(Z^{i-2})\big)\big(f_j^i(Z^i)\big)=0 \quad \text{dans } \mathbb{C}[[T,s]]. \tag{5.15}$$

**Lemme 5.6.** *Si $f$ vérifie l'égalité formelle* (5.15), *alors pour tous $i \geqslant 1$ et $B \in \mathbb{N}$, le jet $D^B f^i$ est convergent sur la chaîne de Segre $\mathcal{S}_0^i$.*

**Démonstration.** Comme pour le Lemme 4.3, on procède par récurrence sur $i \geqslant 1$. Soit donc $i \geqslant 1$ fixé. On montre tout d'abord que les dérivées transverses $\mathcal{K}^{i\beta} f^i(\mathcal{L}_T^{(i)}(0))$, $\beta \in \mathbb{N}^d$, sont convergentes. Les coefficients de l'équation polynomiale (5.15) sont holomorphes en les $Z^i$, $Z^{i-1}$, $Z^{i-2}$, $D^A f^{i-1}(Z^{i-1})$ et $D^A f^{i-2}(Z^{i-2})$. Pour $\beta \in \mathbb{N}^d$, la dérivée partielle $\partial^{|\beta|}/\partial s^\beta|_{s=0}$ de chacun de ces coefficients est une fonction holomorphe en les

$$\frac{\partial^{|\gamma|}}{\partial s^\gamma}\big(\mathcal{K}_s^i \circ \mathcal{L}_T^{(i)}(0)\big)\big|_{s=0}, \quad |\gamma| \leqslant |\beta|, \tag{5.16}$$

$$\frac{\partial^{|\nu|}}{\partial s^\nu}\big(\mathcal{K}_s^i \circ \mathcal{L}_{T'}^{(i-1)}(0)\big)\big|_{s=0}, \quad |\nu| \leqslant |\beta|, \tag{5.17}$$

$$\frac{\partial^{|\sigma|}}{\partial s^\sigma}\big(\mathcal{K}_s^i \circ \mathcal{L}_{T''}^{(i-2)}(0)\big)\big|_{s=0}, \quad |\sigma| \leqslant |\beta|, \tag{5.18}$$

$$\mathcal{K}^{i\delta} D^A f^{i-1}\big(\mathcal{L}_{T'}^{(i-1)}(0)\big), \quad |\delta| \leqslant |\beta|, \tag{5.19}$$

$$\mathcal{K}^{i\lambda} D^A f^{i-2}\big(\mathcal{L}_{T''}^{(i-2)}(0)\big), \quad |\lambda| \leqslant |\beta|. \tag{5.20}$$

Or, les fonctions des types (5.16), (5.17) et (5.18) sont convergentes puisque les $\mathcal{L}_j^i$ et les $\mathcal{K}_l^i$ sont des champs holomorphes. Par ailleurs, les fonctions du type (5.19) sont convergentes par hypothèse de récurrence pour $i \geqslant 2$, et sont constantes égales à $\mathcal{K}^\delta D^A \bar{f}(0)$ pour $i = 1$. Enfin, les fonctions du type (5.20) sont convergentes par hypothèse de récurrence pour $i \geqslant 3$, et sont constantes égales à $\underline{\mathcal{K}}^\lambda D^A \bar{f}(0)$ pour $i = 2$ et à $\mathcal{K}^\lambda D^A f(0)$ pour $i = 1$. Le Lemme 3.4 implique alors que les séries formelles $\mathcal{K}^{i\beta} f_j^i(\mathcal{L}_T^{(i)}(0))$ sont convergentes. Puis, comme pour le Lemme 4.3, les dérivées partielles $\mathcal{L}^{i\alpha}\mathcal{K}^{i\beta} f^i(\mathcal{L}_T^{(i)}(0))$, $\alpha \in \mathbb{N}^m$, $\beta \in \mathbb{N}^d$, sont convergentes et donc aussi le jet $D^B f^i(\mathcal{L}_T^{(i)}(0))$, pour tout $B \in \mathbb{N}$. La récurrence est terminée. □

**Fin de la démonstration du Théorème 1.6.** La condition $(\mathcal{R})$ étant satisfaite et la dimension de $\mathcal{V}_2$ étant nulle en 0, la Proposition 5.5 prouve que $f$ vérifie l'égalité formelle (5.9). Puis, le début de la Section 5.3 montre que $f$ vérifie alors (5.15). Enfin, comme $M$ est minimale en 0, on conclut que $f$ est convergente comme pour la Proposition 4.4, en utilisant le Lemme 5.6 pour $B = 0$ et en utilisant l'interprétation géométrique de la minimalité de la Proposition 2.9. □

**Fin de la démonstration du Théorème 1.7.** La Proposition 2.8 prouve que $\mathcal{V}_2$ est contenu dans $M'$ au voisinage de 0. Comme $\mathcal{V}_2$ est un sous-ensemble analytique complexe de $\mathbb{C}^{n'}$ passant par 0 (cf. Définition 1.5), il est de dimension zéro en 0. Grâce à la condition $(\mathcal{R})$ , le Théorème 1.6 permet alors de conclure que $f$ est convergente. □

## Références


[1] M. Artin, On the solutions of analytic equations, Invent. Math. 5 (1968) 277–291.

[2] M.S. Baouendi, P. Ebenfelt, L.P. Rothschild, Rational dependence of smooth and analytic CR mappings on their jets, Math. Ann. 315 (1999) 205–249.

[3] M.S. Baouendi, P. Ebenfelt, L.P. Rothschild, Real Submanifolds in Complex Space and their Mappings, Princeton University Press, Princeton, NJ, 1999.

[4] T. Bloom, I. Graham, On "type" conditions for generic real submanifolds of $\mathbb{C}^n$, Invent. Math. 40 (1977) 217–243.

[5] S.S. Chern, J.K. Moser, Real hypersurfaces in complex manifolds, Acta Math. 133 (1974) 219–271.

[6] E.M. Chirka, Complex Analytic Sets, Kluwer Academic, Dordrecht, 1989.

[7] B. Coupet, S. Damour, J. Merker, A. Sukhov, Sur l'analyticité des applications CR lisses à valeurs dans un ensemble algébrique réel, C. R. Acad. Sci. Paris, Ser. I 334 (2002) 953–956.

[8] B. Coupet, S. Pinchuk, A. Sukhov, Analyticité des applications CR, C. R. Acad. Sci. Paris, Ser. I 329 (1999) 489–494.

[9] B. Coupet, S. Pinchuk, A. Sukhov, On partial analyticity of CR mappings, Math. Z. 235 (2000) 541–557.

[10] S. Damour, Feuilletages holomorphes locaux et analyticité partielle d'applications CR $\mathcal{C}^\infty$, Manuscripta Math. (2002), à paraître.

[11] S. Damour, On the analyticity of smooth CR mappings between real-analytic CR manifolds, Michigan Math. J. 49 (2001) 583–603.

[12] S. Damour, Sur l'algébricité des applications holomorphes, C. R. Acad. Sci. Paris, Ser. I 332 (2001) 491–496.

[13] K. Diederich, J.E. Fornæss, Pseudoconvex domains with real-analytic boundary, Ann. Math. 107 (1978) 371–384.

[14] K. Diederich, J.E. Fornæss, Proper holomorphic mappings between real-analytic pseudoconvex domains in $\mathbb{C}^n$, Math. Ann. 282 (1988) 681–700.

[15] K. Diederich, S. Pinchuk, Proper holomorphic maps in dimension 2 extend, Indiana Univ. Math. J. 44 (1995) 1089–1126.

[16] K. Diederich, S. Pinchuk, Reflection principle in higher dimensions, in: Proceedings of the International Congress of Mathematicians, Vol. II, 1998, pp. 703–712.

[17] K. Diederich, S.M. Webster, A reflection principle for degenerate real hypersurfaces, Duke Math. J. 47 (1980) 835–843.

[18] H. Lewy, On the boundary behaviour of holomorphic mappings, Accad. Naz. Lincei 35 (1977) 1–8.

[19] J. Merker, Vector field construction of Segre sets, prépublication électronique: http://arxiv.org/abs/math/9901010.

[20] J. Merker, Note on double reflection and algebraicity of holomorphic mappings, Ann. Fac. Sci. Toulouse Math. 9 (2000) 689–721.

[21] J. Merker, Convergence of formal invertible CR mappings between minimal holomorphically nondegenerate real analytic hypersurfaces, Int. J. Math. Math. Sci. 26 (2001) 281–302.

[22] J. Merker, Étude de l'application de réflexion CR formelle, C. R. Acad. Sci. Paris, Ser. I 333 (2001) 165–168.

[23] J. Merker, On the partial algebraicity of holomorphic mappings between two real algebraic sets, Bull. Soc. math. France 129 (2001) 547–591.

[24] J. Merker, Sur l'enveloppe d'holomorphie de domaines recouverts par des "chapeaux" Levi-plats et le principe de réflexion, Ann. Inst. Fourier (Grenoble) 52 (2002) 1443–1524.

[25] J.K. Moser, S.M. Webster, Normal forms for real surfaces in $\mathbb{C}^2$ near complex tangents and hyperbolic surface transformations, Acta Math. 150 (1983) 255–296.

[26] S. Pinchuk, On the analytic continuation of holomorphic mappings, Mat. Sb. 27 (1975) 345–392.
[27] B. Segre, Intorno al problema di Poincaré della rappresentazione pseudo-conforme, Atti R. Accad. Naz. Lincei Rend. Cl. Sci. Fis. Mat. Natur. 13 (1931) 676–683.
[28] H.J. Sussmann, Orbits of families of vector fields and integrability of distributions, Trans. Amer. Math. Soc. 180 (1973) 171–188.
[29] J.-M. Trépreau, Sur le prolongement holomorphe des fonctions CR définies sur une hypersurface réelle de classe $C^2$ dans $\mathbb{C}^n$, Invent. Math. 83 (1986) 583–592.
[30] J.-M. Trépreau, Sur la propagation des singularités dans les variétés CR, Bull. Soc. Math. France 118 (1990) 403–450.
[31] A.E. Tumanov, Extension of CR-functions into a wedge from a manifold of finite type, Mat. Sb. 136 (1988) 128–139.
[32] S.M. Webster, On the mapping problem for algebraic real hypersurfaces, Invent. Math. 43 (1977) 53–68.
[33] S.M. Webster, On the reflection principle in several complex variables, Proc. Amer. Math. Soc. 71 (1978) 26–28.