

Die Gaussche Strenge

Le levier symbolique. À cause de la grande difficulté qu'il y a à exposer pleinement la signification des notions géométriques, on se contente généralement de présenter seulement de manière formelle ou axiomatique les concepts de connexion, de dérivée covariante, de courbure, de torsion, ainsi que les identités de type Bianchi auxquelles satisfont les dérivées covariantes des tenseurs fondamentaux. Les présentations résumées des quantités g_{kl} , g^{pq} , Γ_{ij}^k , R_{ijk}^l , R_{ij} , R et E_{ij} que l'on s'autorise en relativité générale souffrent parfois de cette imperfection. À vrai dire, par l'effet d'un penchant au calcul auquel la pensée est entraînée dès que le langage symbolique s'introduit dans les raisonnements, l'« essence du tensoriel » incite à l'« algébrisation des contenus ».

Il est dans la nature des mathématiques des temps modernes (en contraste avec celles de l'Antiquité) que nous possédons un levier sous la forme de notre langage symbolique et de notre terminologie, grâce à quoi les raisonnements les plus complexes sont réduits à un certain mécanisme. De cette manière, la science a gagné infiniment en richesse, mais elle a autant perdu en beauté et en caractère, comme on le fait ordinairement dans la pratique. Combien ce levier est-il fréquemment appliqué de manière purement mécanique ! bien que l'autorisation de l'employer implique, dans la plupart des cas, certaines hypothèses passées sous silence*.

Gauß, Werke, **10**, 1, p. 434.

* «Est ist der Character der Mathematik der neueren Zeit (im Gegensatz gegen das Alterthum), dass durch unsere Zeichensprache und Namengebungen wir eine Hebel besitzen, wodurch die verwickeltesten Argumentationen auf einen gewissen Mechanismus reducirt werden. An Reichthum hat dadurch die Wissenschaft unendlich gewonnen, an Schönheit und Solidität aber, wie das Geschäft gewöhnlich betrieben wird, eben so sehr verloren. Wie oft wird jener Hebel eben nur mecanisch angewandt, obgleich die Befugniss dazu in den meisten Fällen gewisse stillschweigende Voraussetzungen implicirt.»

Die Gaussche Streng. Cependant, comme l'exigeait Gauss lui-même dans cette lettre du 1^{er} septembre 1850 adressée à son fidèle interlocuteur Schumacher (où il critiquait le peu de souci de rigueur que Prehn manifestait dans un mémoire sur les séries divergentes paru la même année dans le *Journal de Crelle*) :

Chaque fois que l'on utilise le calcul et chaque fois qu'on emploie des concepts, j'exige que l'on reste toujours conscient des stipulations originelles [ursprünglichen Bedingungen], et que tous les résultats du mécanisme ne soient jamais considérés comme des propriétés en dehors d'une autorisation claire **. *Ibidem.*

Ainsi s'exprime la rigoureuse et austère sévérité mathématique de Gauss (die **GAUSSsche Streng**) : jamais acte de calcul ne doit être engagé qui ne soit encadré au préalable par des conditions précises quant à l'extension de ses significations. Par exemple, quel que soit le sens qu'on donne aux séries divergentes en choisissant un procédé de sommation déterminé, de type Cesaro, Féjer ou Toeplitz, il faut impérativement justifier par des propositions dûment établies à partir des définitions initiales que l'on peut effectuer toutes les opérations algébriques élémentaires sur les séries ainsi « apprivoisées », et notamment la multiplication ; on ne pourrait certainement pas se contenter d'exécuter ces opérations au prétexte qu'elles sont justifiées pour les séries convergentes. Tout calcul que l'on transfère graduellement à des objets qui s'élèvent en généralité expose en effet à des non-sens éventuels. Ainsi l'addition, la soustraction et la multiplication entre séries divergentes doit-elle conserver la mémoire des processus sommatoires qui ont été choisis pour leur donner un sens. C'est donc la première interprétation immédiate de cette citation de Gauss : nécessité de se conformer au sens interne ; nécessité

† « Ich fordere, man soll bei allem Gebrauch des Calculs, bei allen Begriffsverwendungen sich immer der ursprünglichen Bedingungen bewusst bleiben, und alle Producte des Mechanismus niemals über die klare Befugniss hinaus als Eigenthum betrachten. »

de respecter les bornes définitionnelles ; sous peine d'incohérence.

Science et conscience coprésente. Mais au-delà, Gauss évoque sans la développer une pensée plus profonde qui nous est suggérée par le membre de phrase « j'exige que l'on reste toujours conscient des stipulations originelles ». On sait combien il est délicat et malaisé de répondre à cet impératif de « conscientisation continue du sens », surtout lorsqu'il s'agit de calculs de type tensoriel qui sont assez longs ou considérables pour égarer l'intuition géométrique ou noyer l'esprit de synthèse, un peu comme si les « masses-pensées » chères à Riemann devaient se réserver à tout instant l'énergie de « se rendre présentes les totalités conceptuelles » ; toutefois, l'austérité ou la rigueur gaussienne (die GAUSSsche Strenge) sont là pour nous rappeler les *impératifs catégoriques de la pensée mathématique*, similaires aux impératifs que Kant théorisa dans sa *Critique de la raison pratique*, c'est-à-dire des règles qui sont constituées par des principes scientifiques abstraits et qui sont désignées par des devoirs.