Équations différentielles algébriques pour les courbes holomorphes entières dans les hypersurfaces projectives complexes de degré optimal

JOËL MERKER

DMA, École Normale Supérieure, Paris

www.dma.ens.fr/∼merker/

I. Conjecture de Green-Griffiths

II. L'« enfer algébrique » des jets invariants

III. Retour aux jets de Green-Griffiths

IV. Décomposition en fibrés de Schur

V. Caractéristique d'Euler-Poincaré

VI. Comportements asymptotiques

VII. Spéculations prospectives

Séminaire « Géométries »

Université Lyon 1, le 26 mars 2010

I – Conjecture de Green-Griffiths

- **Hypersurface projective complexe algébrique :**

$$X = \big\{ \big[z_0 \colon z_1 \colon \ldots \colon z_n \colon z_{n+1}\big] \in \mathbb{P}^{n+1} \colon P(z_0, z_1, \ldots, z_n, z_{n+1}) = 0 \big\}.$$

- **Fibré canonique :**

$$K_X := \Lambda^n T^*_X.$$

- X **de type général :** Lorsque $m \to \infty$:

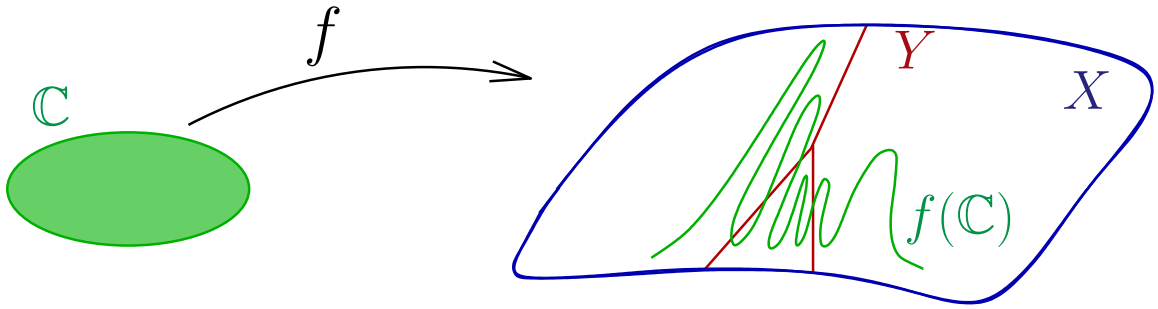
$$h^0\big(X,\, K_X^{\otimes m}\big) \sim c \cdot m^{\dim X},$$

pour une certaine constante $c > 0$.

- **Caractérisation équivalente :** degré optimal :

$$\boxed{\deg X \geqslant \dim X + 3}.$$

- **Conjecture de Green-Griffiths forte (1979) :** Si l'hypersurface projective algébrique $X^n \subset \mathbb{P}^{n+1}(\mathbb{C})$ est générique de degré $\geqslant n+3$, alors il existe un sous-ensemble algébrique propre $Y \subset X$ tel que toute courbe holomorphe entière non constante $f : \mathbb{C} \to X$ est nécessairement intégralement contenue dans Y, à savoir : $f(\mathbb{C}) \subset Y$.



• **Degré optimal :** $\boxed{\deg X \geqslant n+3}$, ce qui correspond ainsi à demander que X soit **de type général**.

• **Conjecture d'hyperbolicité de Kobayashi (1970) :** Une hypersurface projective lisse $X^n \subset \mathbb{P}^{n+1}(\mathbb{C})$ est **hyperbolique** : « toute courbe holomorphe entière $f : \mathbb{C} \to X$ est nécessairement **constante** », lorsque

$$\boxed{\deg X \geqslant 2n+1},$$

pourvu que X soit générique.

• **Siu 2002, 2004 :** Il existe $d_n \gg 1$ tel que les hypersurfaces génériques $X^n \subset \mathbb{P}^{n+1}$ de degré :

$$\deg X \geqslant d_n$$

sont hyperboliques.

• **Demailly à Luminy en juin 2006 : grands degrés !**

• **Dimension 2 :** $X^2 \subset \mathbb{P}^3(\mathbb{C})$: G.-G. + Kobayashi :

- ☐ Siu-Yeung 1996 : $d \geqslant \mathbf{10^{13}}$.
- ☐ McQuillan, 1999 : $d \geqslant \mathbf{36}$.
- ☐ Demailly-El Goul, 2000 : $d \geqslant \mathbf{21}$.
- ☐ Paŭn, 2008 : $d \geqslant \mathbf{18}$.

• **Dimension 3 :** $X^3 \subset \mathbb{P}^4(\mathbb{C})$:

- ☐ Rousseau 2007 : $d \geqslant \mathbf{593}$, Green-Griffiths.
- ☐ Diverio-Trapani 2009 : $d \geqslant \mathbf{593}$, Kobayashi.

Théorème. (DIVERIO-M.-ROUSSEAU, nov. 2008) *Si* $X \subset \mathbb{P}^{n+1}$ *est une hypersurface projective algébrique* générique, *il existe un sous-ensemble algébrique propre* $Y \subsetneqq X$ *tel que* $f(\mathbb{C}) \subset Y$ *pour toute courbe holomorphe entière non constante :*

- *pour* $\dim X = \mathbf{4}$, *lorsque* $\deg X \geqslant \mathbf{3203}$;
- *pour* $\dim X = \mathbf{5}$, *lorsque* $\deg X \geqslant \mathbf{35355}$;
- *pour* $\dim X = \mathbf{6}$, *lorsque* $\deg X \geqslant \mathbf{172925}$.

Théorème. (DIVERIO-M.-ROUSSEAU) *En dimension quelconque* $n \geqslant 2$ *avec* $X^n \subset \mathbb{P}^{n+1}(\mathbb{C})$ *générique, même conclusion lorsque :*

$$\deg X \geqslant \mathbf{2^{n^5}}.$$

Stratégies (à éviter !)

☐ Jets simples de Green-Griffiths (trop simples ?) **Non !**

☐ Jets raffinés de Demailly (incompréhensibles !)

☐ Inégalités de Morse-Demailly-Trapani-Siu (insuffisantes pour atteindre la borne optimale !)

☐ Fibrés de jets sur les variétés projectives (lieu-base non contrôlé $\Rightarrow$ Kobayashi inacessible !)

Théorème. (Aujourd'hui) *Équations différentielles en degré optimal* $\deg X \geqslant n+3$ *(avec hypothèse).*

Certitude : revenir aux jets de Green-Griffiths

Structure générale des démonstrations

Étape 1 : Les courbes holomorphes entières $f : \mathbb{C} \to X$ satisfont des équations différentielles algébriques.

Étape 2 : Une pléthore de telles équations différentielles implique la dégénérescence algébrique $f(\mathbb{C}) \subset Y \subsetneqq X$.

Théorème. [Nombreux auteurs] *Toute courbe holomorphe entière non constante $f : \mathbb{C} \to X$ satisfait des équations différentielles algébriques globales lorsque $d = \deg X$ est assez grand.*

- **Dimension 2 :** [Green-Griffiths 1980] optimal :

$$\deg X \geqslant \mathbf{5}.$$

- **Dimension 3 :**
  - ☐ [Rousseau 2006] $\deg X \geqslant \mathbf{97}$.
  - ☐ [Diverio 2008] $\deg X \geqslant \mathbf{74}$.
  - ☐ [M., 30 Mai 2009] $\deg X \geqslant \mathbf{34}$.
- **Dimension 4 :**
  - ☐ [Diverio 2008] $\deg X \geqslant \mathbf{298}$.
  - ☐ [D.M.R. 2009] $\deg X \geqslant \mathbf{259}$.
- **Dimension 5 :**
  - ☐ [Diverio 2008] $\deg X \geqslant \mathbf{1222}$.
- **Dimension 6 :**
  - ☐ [D.M.R. 2009] $\deg X \geqslant \mathbf{4352}$.

Très loin de : $\deg X \geqslant n + 3 = \mathbf{6},\ \mathbf{7},\ \mathbf{8},\ \mathbf{9},\ \ldots$

II – L'« enfer algébrique » des jets invariants

• **Notations :**

$$\boxed{n = \text{dimension}}$$

$$\boxed{d = \text{degré}}$$

$$\boxed{\kappa = \text{ordre des jets}}$$

• **Deux fibré de jets de courbes holomorphes :**

□ **Green-Griffiths :**

$$\mathscr{E}^{GG}_{\kappa,m} T^*_X.$$

□ **Demailly-Semple :**

$$\mathscr{E}^{DS}_{\kappa,m} T^*_X.$$

• **Obstacle significatif :** [ROUSSEAU, 2006] En dimension **3**, l'ordre des jets doit être $\geqslant$ **3**.

• **Plus généralement :** Un théorème d'annulation dû à Brückmann et Rackwitz donne facilement :

Corollaire. [DIVERIO, 2008] *Pour tout fibré en droites ample $A \to X$ et tout $\kappa \leqslant \dim X - 1$, on a :*

$$\begin{aligned} 0 &= H^0\big(X,\, \mathscr{E}^{GG}_{\kappa,m} \otimes A^{-1}\big) \\ &= H^0\big(X,\, \mathscr{E}^{DS}_{\kappa,m} \otimes A^{-1}\big)\,. \end{aligned}$$

• **Donc il faut supposer toujours $\kappa \geqslant \dim X$.**

• **Définition :** Dans une carte locale, considérer le jet d'ordre κ :

$$j^\kappa f := \big(f_1', \dots, f_n', f_1'', \dots, f_n'', \dots\dots, f_1^{(\kappa)}, \dots, f_n^{(\kappa)}\big)$$

d'un disque holomorphe :

$$f = (f_1, f_2, \dots, f_n) : \mathbb{D} \longrightarrow X^n.$$

• **Descriptions connues des jets de Demailly-Semple :**

□ $n = 2$, $\kappa = 3$: DEMAILLY (non publié) ; ROUSSEAU : **5** invariants fondamentaux.

□ $n = 3$, $\kappa = 3$: ROUSSEAU : **16**.

□ $n = 2$, $\kappa = 4$: DEMAILLY-EL GOUL (non publié) ; M. : **9**.

□ $n = \mathbf{2}$, $\kappa = \mathbf{5}$: M. : **56**.

□ $n = \mathbf{4}$, $\kappa = \mathbf{4}$: M. : **2835**.

• **Algorithme général :**

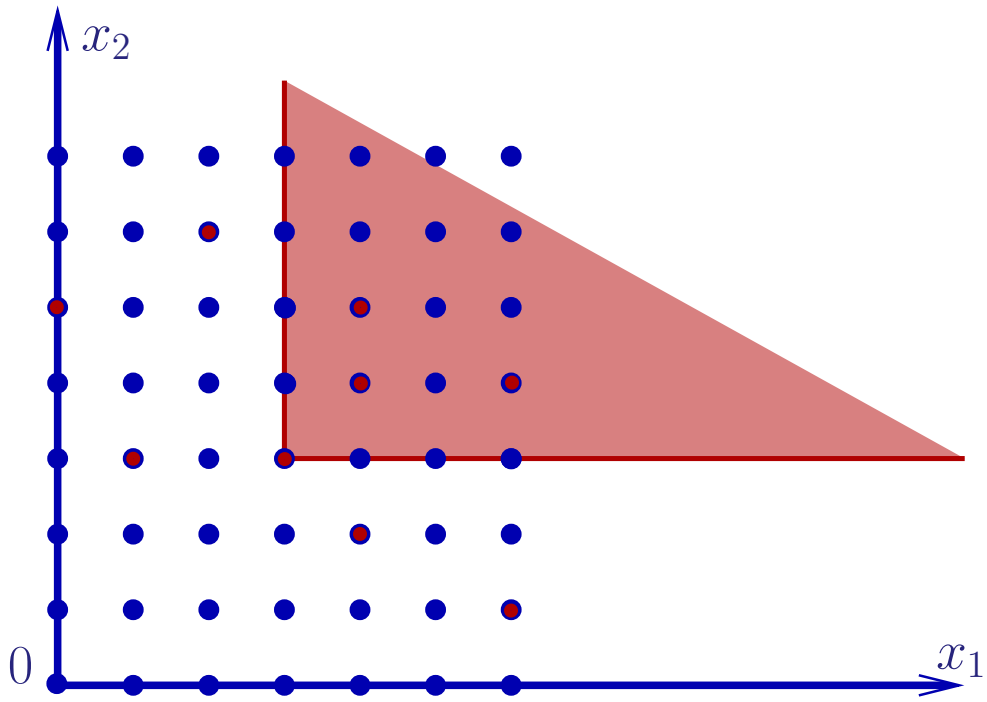
Théorème. [M., 2008] *Construction d'un algorithme complet qui engendre tous les polynômes invariants par reparamétrisation, en dimension arbitraire n et pour des jets d'ordre quelconque κ.*

• Joël M. *Jets de Demailly-Semple d'ordres 4 et 5 en dimension 2*, Int. J. Contemp. Math. Sciences, **3** (2008) no. 18, 861–933.

• Joël M. *An algorithm to generate all polynomials in the k-jet of a holomorphic disc $D \to \mathbb{C}^n$ that are invariant under source reparametrization*, arxiv.org/abs/0808.3547/, 103 pages.

• **Syzygies :** Les relations entre invariants sont engendrées en même temps.

• **Bases de Gröbner ; Polytopes de Newton :**



• **Obtenir 16 bi-invariants mutuellement indépendants :**

W^{10},	f_1',	Λ^3,	Λ^5,	Λ^7,	D^6,	D^8,	N^{10},
M^8,	E^{10},	L^{12},	Q^{14},	R^{15},	U^{17},	V^{19},	X^{21}

• **Ordre lexicographique :**

$$\Lambda^3 > \Lambda^5 > \Lambda^7 > D^6 > D^8 > N^{10} > M^8 > E^{10} > L^{12} >$$
$$> Q^{14} > R^{15} > U^{17} > V^{19} > X^{21}.$$

• **Expressions explicites :**

$$\Lambda^3 := \begin{vmatrix} f_1' & f_2' \\ f_1'' & f_2'' \end{vmatrix} =: \Delta_{1,2}^{',''},$$

$$\Lambda^5 := \Delta_{1,2}^{','''} f_1' - 3\,\Delta_{1,2}^{',''} f_1'',$$

$$D^6 := \begin{vmatrix} f_1' & f_2' & f_3'' \\ f_1'' & f_2'' & f_3'' \\ f_1''' & f_2''' & f_3''' \end{vmatrix} =: \Delta^{',''',''''} .$$

$$\Lambda^7 := \left(\Delta_{1,2}^{',''''} + 4\,\Delta_{1,2}^{'',''''}\right) f_1' f_1' - \\ - 10\,\Delta_{1,2}^{','''} f_1' f_1'' + 15\,\Delta_{1,2}^{',''} f_1'' f_1'',$$

$$D^8 := f_1' \begin{vmatrix} f_1' & f_2' & f_3'' \\ f_1'' & f_2'' & f_3'' \\ f_1'''' & f_2'''' & f_3'''' \end{vmatrix} - 6\, f_1'' \begin{vmatrix} f_1' & f_2' & f_3'' \\ f_1'' & f_2'' & f_3'' \\ f_1''' & f_2''' & f_3''' \end{vmatrix},$$

$$N^{10} := \Delta_{1,2,3}^{',''',''''} f_1' f_1' - 3\,\Delta_{1,2,3}^{','',''''} f_1' f_1'' + \\ + 4\,\Delta_{1,2,3}^{','','''} f_1' f_1''' + 3\,\Delta_{1,2,3}^{','','''} f_1'' f_1'',$$

$$M^8 := \frac{-5\,\Lambda^5\Lambda^5 + 3\,\Lambda^3\Lambda^7}{f_1' f_1'} \\ = 3\,\Delta_{1,2}^{',''''}\,\Delta_{1,2}^{',''} + 12\,\Delta_{1,2}^{'','''}\,\Delta_{1,2}^{',''} - 5\,\Delta_{1,2}^{','''}\,\Delta_{1,2}^{','''},$$

$$E^{10} := \frac{-6\,\Lambda^5\,D^6 + 3\,\Lambda^3\,D^8}{f_1'} \\ = 3\,\Delta_{1,2,3}^{','',''''}\,\Delta_{1,2}^{',''} - 6\,\Delta_{1,2,3}^{','','''}\,\Delta_{1,2}^{','''},$$

$$L^{12} := \frac{-\Lambda^7 D^6 + 5\,\Lambda^3 N^{10}}{f_1'} \\ = -\Delta_{1,2,3}^{','','''}\,\Delta_{1,2}^{',''''}\, f_1' - 4\,\Delta_{1,2,3}^{','','''}\,\Delta_{1,2}^{'','''}\, f_1' + 5\,\Delta_{1,2,3}^{',''',''''}\,\Delta_{1,2}^{',''}\, f_1' + 10\,\Delta_{1,2,3}^{','','''}\,\Delta_{1,2}^{','''}\, f_1'' - \\ - 15\,\Delta_{1,2,3}^{','',''''}\,\Delta_{1,2}^{',''}\, f_1'' + 20\,\Delta_{1,2,3}^{','','''}\,\Delta_{1,2}^{',''}\, f_1''',$$

$$
\begin{aligned}
Q^{14} &:= \frac{\Lambda^7 D^8 - 10\,\Lambda^5 N^{10}}{f_1'} \\
&= -10\,\Delta^{',''',''''}_{1,2,3}\,\Delta^{','''}_{1,2}\,f_1' f_1' + \Delta^{','',''''}_{1,2,3}\,\Delta^{',''''}_{1,2}\,f_1' f_1' + 4\,\Delta^{',''',''''}_{1,2,3}\,\Delta^{'','''}_{1,2}\,f_1' f_1' + \\
&\quad + 20\,\Delta^{','',''''}_{1,2,3}\,\Delta^{','''}_{1,2}\,f_1' f_1'' + 30\,\Delta^{',''',''''}_{1,2,3}\,\Delta^{',''}_{1,2}\,f_1' f_1'' - 6\,\Delta^{','','''}_{1,2,3}\,\Delta^{',''''}_{1,2}\,f_1' f_1'' - \\
&\quad - 24\,\Delta^{','','''}_{1,2,3}\,\Delta^{'','''}_{1,2}\,f_1' f_1'' - 40\,\Delta^{','','''}_{1,2,3}\,\Delta^{','''}_{1,2}\,f_1' f_1''' - 75\,\Delta^{','',''''}_{1,2,3}\,\Delta^{',''}_{1,2}\,f_1'' f_1'' + \\
&\quad + 30\,\Delta^{','','''}_{1,2,3}\,\Delta^{','''}_{1,2}\,f_1'' f_1'' + 120\,\Delta^{','','''}_{1,2,3}\,\Delta^{',''}_{1,2}\,f_1'' f_1''', \\
R^{15} &:= \Delta^{','',''''}_{1,2,3}\,\Delta^{','',''''}_{1,2,3}\,f_1' - 12\,\Delta^{',''',''''}_{1,2,3}\,\Delta^{','','''}_{1,2,3}\,f_1' + 24\,\Delta^{','',''''}_{1,2,3}\,\Delta^{','','''}_{1,2,3}\,f_1'' - \\
&\quad - 48\,\Delta^{','','''}_{1,2,3}\,\Delta^{','','''}_{1,2,3}\,f_1''', \\
U^{17} &= \frac{4\,D^8 E^{10} + 3\,\Lambda^3 R^{15}}{f_1'} \\
&= 15\,\Delta^{','',''''}_{1,2,3}\,\Delta^{','',''''}_{1,2,3}\,\Delta^{',''}_{1,2} - 36\,\Delta^{',''',''''}_{1,2,3}\,\Delta^{','','''}_{1,2,3}\,\Delta^{',''}_{1,2} - \\
&\quad - 24\,\Delta^{','',''''}_{1,2,3}\,\Delta^{','','''}_{1,2,3}\,\Delta^{','''}_{1,2} + 144\,\Delta^{','','''}_{1,2,3}\,\Delta^{','','''}_{1,2,3}\,\Delta^{'','''}_{1,2}, \\
V^{19} &= \frac{8\,N^{10} E^{10} + \Lambda^5 R^{15}}{f_1'} \\
&= 24\,\Delta^{',''',''''}_{1,2,3}\,\Delta^{','',''''}_{1,2,3}\,\Delta^{',''}_{1,2}\,f_1' - 60\,\Delta^{',''',''''}_{1,2,3}\,\Delta^{','','''}_{1,2,3}\,\Delta^{','''}_{1,2}\,f_1' + \\
&\quad + \Delta^{','',''''}_{1,2,3}\,\Delta^{','',''''}_{1,2,3}\,\Delta^{','''}_{1,2}\,f_1' - 75\,\Delta^{','',''''}_{1,2,3}\,\Delta^{','',''''}_{1,2,3}\,\Delta^{',''}_{1,2}\,f_1'' + \\
&\quad + 36\,\Delta^{',''',''''}_{1,2,3}\,\Delta^{','','''}_{1,2,3}\,\Delta^{',''}_{1,2}\,f_1'' + 168\,\Delta^{','',''''}_{1,2,3}\,\Delta^{','','''}_{1,2,3}\,\Delta^{','''}_{1,2}\,f_1'' - \\
&\quad - 144\,\Delta^{','','''}_{1,2,3}\,\Delta^{','','''}_{1,2,3}\,\Delta^{'','''}_{1,2}\,f_1'' + 96\,\Delta^{','',''''}_{1,2,3}\,\Delta^{','','''}_{1,2,3}\,\Delta^{',''}_{1,2}\,f_1''' - \\
&\quad - 240\,\Delta^{','','''}_{1,2,3}\,\Delta^{','','''}_{1,2,3}\,\Delta^{','''}_{1,2}\,f_1''', \\
X^{21} &= \frac{4\,D^8 Q^{14} - 5\,\Lambda^7 R^{15}}{f_1'} \\
&= -40\,\Delta^{',''',''''}_{1,2,3}\,\Delta^{','',''''}_{1,2,3}\,\Delta^{','''}_{1,2}\,f_1' f_1' - 4\,\Delta^{','',''''}_{1,2,3}\,\Delta^{','',''''}_{1,2,3}\,\Delta^{',''''}_{1,2}\,f_1' f_1' - \\
&\quad - 4\,\Delta^{','',''''}_{1,2,3}\,\Delta^{','',''''}_{1,2,3}\,\Delta^{'','''}_{1,2}\,f_1' f_1' + 60\,\Delta^{',''',''''}_{1,2,3}\,\Delta^{','','''}_{1,2,3}\,\Delta^{',''''}_{1,2}\,f_1' f_1' + \\
&\quad + 240\,\Delta^{',''',''''}_{1,2,3}\,\Delta^{','','''}_{1,2,3}\,\Delta^{'','''}_{1,2}\,f_1' f_1' + 130\,\Delta^{','',''''}_{1,2,3}\,\Delta^{','',''''}_{1,2,3}\,\Delta^{','''}_{1,2}\,f_1' f_1'' + \\
&\quad + 120\,\Delta^{',''',''''}_{1,2,3}\,\Delta^{','',''''}_{1,2,3}\,\Delta^{',''}_{1,2}\,f_1' f_1'' - 168\,\Delta^{','',''''}_{1,2,3}\,\Delta^{','','''}_{1,2,3}\,\Delta^{',''''}_{1,2}\,f_1' f_1'' -
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
&- 668\,\Delta^{',''}_{1,2,3}\,\Delta^{',''}_{1,2,3}\,\Delta^{'','''}_{1,2}\,f_1'f_1'' - 360\,\Delta^{',''',''''}_{1,2,3}\,\Delta^{',''}_{1,2,3}\,\Delta^{','''}_{1,2}\,f_1'f_1''-\\
&- 160\,\Delta^{',''}_{1,2,3}\,\Delta^{',''''}_{1,2,3}\,\Delta^{','''}_{1,2}\,f_1'f_1''' + 240\,\Delta^{',''}_{1,2,3}\,\Delta^{','''}_{1,2,3}\,\Delta^{',''''}_{1,2}\,f_1'f_1'''+\\
&+ 960\,\Delta^{',''}_{1,2,3}\,\Delta^{','''}_{1,2,3}\,\Delta^{'','''}_{1,2}\,f_1'f_1''' - 375\,\Delta^{',''}_{1,2,3}\,\Delta^{',''''}_{1,2,3}\,\Delta^{',''}_{1,2}\,f_1''f_1''+\\
&+ 840\,\Delta^{',''}_{1,2,3}\,\Delta^{',''''}_{1,2,3}\,\Delta^{','''}_{1,2}\,f_1''f_1'' + 180\,\Delta^{',''',''''}_{1,2,3}\,\Delta^{',''}_{1,2,3}\,\Delta^{',''}_{1,2}\,f_1''f_1''+\\
&+ 144\,\Delta^{',''}_{1,2,3}\,\Delta^{','''}_{1,2,3}\,\Delta^{',''''}_{1,2}\,f_1''f_1'' + 144\,\Delta^{',''}_{1,2,3}\,\Delta^{','''}_{1,2,3}\,\Delta^{'','''}_{1,2}\,f_1''f_1''-\\
&- 1440\,\Delta^{',''}_{1,2,3}\,\Delta^{','''}_{1,2,3}\,\Delta^{','''}_{1,2}\,f_1''f_1''' + 480\,\Delta^{',''}_{1,2,3}\,\Delta^{','''}_{1,2,3}\,\Delta^{',''}_{1,2}\,f_1''f_1'''.
\end{aligned}
$$

- **41 syzygies complétées entre 16 bi-invariants :**

$$
\begin{aligned}
0 &\overset{1}{\equiv} -5\,\Lambda^5\Lambda^5 + 3\,\underline{\Lambda^3\Lambda^7}_{\mathsf{LT}} - f_1'f_1'M^8,\\
0 &\overset{2}{\equiv} -2\,\Lambda^5 D^6 + \underline{\Lambda^3 D^8}_{\mathsf{LT}} - \tfrac{1}{3}f_1'\,E^{10},\\
0 &\overset{3}{\equiv} -\Lambda^7 D^6 + 5\,\underline{\Lambda^3 N^{10}}_{\mathsf{LT}} - f_1'L^{12},\\
0 &\overset{4}{\equiv} -5\,\Lambda^5 E^{10} + 3\,\underline{\Lambda^3 L^{12}}_{\mathsf{LT}} + 6\,f_1'D^6M^8,\\
0 &\overset{5}{\equiv} 5\,\Lambda^7 E^{10} + 3\,\underline{\Lambda^3 Q^{14}}_{\mathsf{LT}} - 6\,f_1'D^8M^8,\\
0 &\overset{6}{\equiv} 4\,D^8E^{10} + 3\,\underline{\Lambda^3 R^{15}}_{\mathsf{LT}} - f_1'U^{17},
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
0 &\overset{7}{\equiv} -36\,D^6D^6M^8 - 5\,E^{10}E^{10} + 3\,\underline{\Lambda^3 U^{17}}_{\mathsf{LT}} + 0,\\
0 &\overset{8}{\equiv} -5\,E^{10}L^{12} - 6\,D^6D^8M^8 + 3\,\underline{\Lambda^3 V^{19}}_{\mathsf{LT}} + 0,\\
0 &\overset{9}{\equiv} 5\,L^{12}L^{12} + 3\,\underline{\Lambda^3 X^{21}}_{\mathsf{LT}} + M^8D^8D^8 + 0,\\
0 &\overset{10}{\equiv} -6\,\Lambda^7 D^6 + 5\,\underline{\Lambda^5 D^8}_{\mathsf{LT}} - f_1'L^{12},\\
0 &\overset{11}{\equiv} -\Lambda^7 D^8 + 10\,\underline{\Lambda^5 N^{10}}_{\mathsf{LT}} + f_1'Q^{14},\\
0 &\overset{12}{\equiv} \underline{\Lambda^5 L^{12}}_{\mathsf{LT}} - \Lambda^7 E^{10} + f_1'D^8M^8,
\end{aligned}
$$

$$0 \overset{13}{\equiv} \Lambda^7 L^{12} + \underline{\Lambda^5 Q^{14}}_{\mathsf{LT}} - 2\, f_1' M^8 N^{10},$$
$$0 \overset{14}{\equiv} 8\, N^{10} E^{10} + \underline{\Lambda^5 R^{15}}_{\mathsf{LT}} - f_1' V^{19},$$
$$0 \overset{15}{\equiv} \underline{\Lambda^5 U^{17}}_{\mathsf{LT}} - E^{10} L^{12} - 6\, D^6 D^8 M^8 + 0,$$
$$0 \overset{16}{\equiv} \underline{\Lambda^5 V^{19}}_{\mathsf{LT}} - M^8 D^8 D^8 - L^{12} L^{12} + f_1' M^8 R^{15},$$
$$0 \overset{17}{\equiv} \underline{\Lambda^5 X^{21}}_{\mathsf{LT}} - L^{12} Q^{14} + 2\, D^8 N^{10} M^8 + 0,$$
$$0 \overset{18}{\equiv} 8\, N^{10} L^{12} + \underline{\Lambda^7 R^{15}}_{\mathsf{LT}} + f_1' X^{21},$$

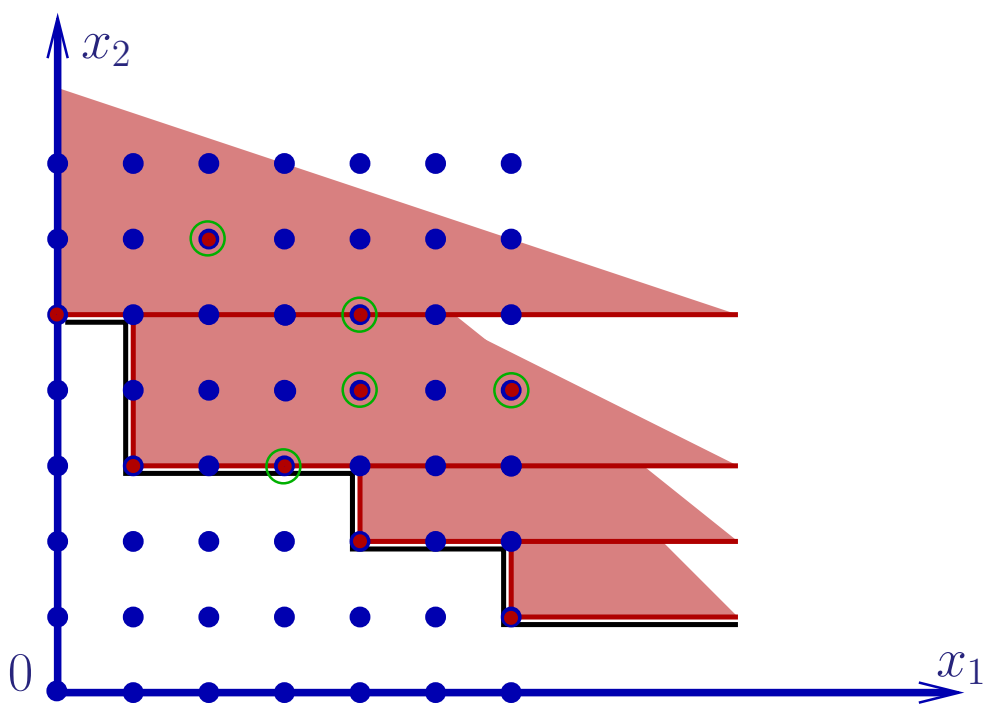
$$0 \overset{19}{\equiv} -L^{12} L^{12} + \underline{\Lambda^7 U^{17}}_{\mathsf{LT}} + f_1', -5\, M^8 D^8 D^8 + 0,$$
$$0 \overset{20}{\equiv} L^{12} Q^{14} + \underline{\Lambda^7 V^{19}}_{\mathsf{LT}} - 10\, D^8 M^8 N^{10} + 0,$$

$$0 \overset{21}{\equiv} 20\, N^{10} N^{10} M^8 + Q^{14} Q^{14} + \underline{\Lambda^7 X^{21}}_{\mathsf{LT}} + 0,$$
$$0 \overset{22}{\equiv} 6\, \underline{D^6 M^8 R^{15}}_{\mathsf{LT}} + L^{12} U^{17} - E^{10} V^{19} + 0,$$
$$0 \overset{23}{\equiv} 5\, \underline{D^8 M^8 R^{15}}_{\mathsf{LT}} - Q^{14} U^{17} - L^{12} V^{19} + 0,$$
$$0 \overset{24}{\equiv} 10\, \underline{N^{10} M^8 R^{15}}_{\mathsf{LT}} - Q^{14} V^{19} + L^{12} X^{21} + 0,$$

$$0 \overset{25}{\equiv} 5\, \underline{M^8 R^{15} R^{15}}_{\mathsf{LT}} + V^{19} V^{19} + U^{17} X^{21} + 0,$$
$$0 \overset{26}{\equiv} -D^8 D^8 + 12\, \underline{D^6 N^{10}}_{\mathsf{LT}} + f_1' R^{15},$$
$$0 \overset{27}{\equiv} -5\, D^8 E^{10} + 6\, \underline{D^6 L^{12}}_{\mathsf{LT}} + f_1' U^{17},$$
$$0 \overset{28}{\equiv} 3\, \underline{D^6 Q^{14}}_{\mathsf{LT}} + 25\, N^{10} E^{10} - 3\, f_1' V^{19},$$
$$0 \overset{29}{\equiv} 5\, E^{10} R^{15} - D^8 U^{17} + 6\, \underline{D^6 V^{19}}_{\mathsf{LT}} + 0,$$
$$0 \overset{30}{\equiv} -3\, L^{12} R^{15} + N^{10} U^{17} + 3\, \underline{D^6 X^{21}}_{\mathsf{LT}} + 0,$$

$$0 \overset{31}{\equiv} -10\,N^{10}E^{10} + \underline{D^8L^{12}}_{\mathsf{LT}} + f_1'V^{19},$$
$$0 \overset{32}{\equiv} \underline{D^8Q^{14}}_{\mathsf{LT}} + 10\,N^{10}L^{12} + f_1'X^{21},$$
$$0 \overset{33}{\equiv} -2\,N^{10}U^{17} + \underline{D^8V^{19}}_{\mathsf{LT}} + L^{12}R^{15} + 0,$$
$$0 \overset{34}{\equiv} Q^{14}R^{15} + 2\,N^{10}V^{19} + \underline{D^8X^{21}}_{\mathsf{LT}} + 0,$$
$$0 \overset{35}{\equiv} -2\,L^{12}N^{10}U^{17} + R^{15}L^{12}L^{12} + 10\,\underline{V^{19}N^{10}E^{10}}_{\mathsf{LT}} - f_1'V^{19}V^{19},$$
$$0 \overset{36}{\equiv} 2\,N^{10}U^{17}Q^{14} - R^{15}L^{12}Q^{14} + 10\,\underline{V^{19}N^{10}L^{12}}_{\mathsf{LT}} + f_1'V^{19}X^{21},$$
$$0 \overset{37}{\equiv} 10\,\underline{N^{10}L^{12}X^{21}}_{\mathsf{LT}} - R^{15}Q^{14}Q^{14} - 2\,Q^{14}N^{10}V^{19} + f_1'X^{21}X^{21},$$
$$0 \overset{38}{\equiv} 2\,\underline{N^{10}U^{17}X^{21}}_{\mathsf{LT}} - X^{21}L^{12}R^{15} + V^{19}Q^{14}R^{15} + 2\,N^{10}V^{19}V^{19} + 0,$$
$$0 \overset{39}{\equiv} \underline{E^{10}Q^{14}}_{\mathsf{LT}} + L^{12}L^{12} - f_1'M^8R^{15},$$
$$0 \overset{40}{\equiv} Q^{14}U^{17} + 6\,L^{12}V^{19} + 5\,\underline{E^{10}X^{21}}_{\mathsf{LT}} + 0,$$
$$0 \overset{41}{\equiv} -6\,Q^{14}L^{12}V^{19} - Q^{14}Q^{14}U^{17} + 5\,\underline{X^{21}L^{12}L^{12}}_{\mathsf{LT}} - 5\,f_1'M^8R^{15}X^{21}.$$

- **Dimension 16 avec 41 sommets.**



2835

THÉORÈME (M. 2008) *En dimension $n = 4$ pour les jets d'ordre $\kappa = 4$, l'algèbre UE_4^4 de polynômes de jets $\mathsf{P}\big(j^4 f_1, j^4 f_2, j^4 f_3, j^4 f_4\big)$ invariants par reparamétrisation et invariants sous l'action unipotente est engendrée par* **16** *bi-invariants mutuellement indépendants :*

$$\boxed{\begin{array}{cccccccc} W^{10}, & f_1', & \Lambda^3, & \Lambda^5, & \Lambda^7, & D^6, & D^8, & N^{10}, \\ M^8, & E^{10}, & L^{12}, & Q^{14}, & R^{15}, & U^{17}, & V^{19}, & X^{21}, \end{array}}$$

dont la restriction à $\{f_1' = 0\}$ possède un idéal de relations, pour l'ordre purement lexicographique, qui est constitué des **41** *syzygies écrites ci-dessus.*

De plus, tout bi-invariant de poids m s'écrit de manière unique sous la forme polynomiale suivante :

$$\mathsf{P}\big(j^\kappa f\big) = \sum_{o,\,p} (f_1')^o \, \big(W^{10}\big)^p \sum_{\substack{(a,\ldots,n)\in\mathbb{N}^{14}\setminus(\square_1\cup\cdots\cup\square_{41}) \\ 3a+\cdots+21n=m-o-10p}} \mathsf{coeff}_{a,\ldots,n,o,p} \cdot$$
$$\cdot \big(\Lambda^3\big)^a \big(\Lambda^5\big)^b \big(\Lambda^7\big)^c \big(D^6\big)^d \big(D^8\big)^e \big(N^{10}\big)^f \big(M^8\big)^g \big(E^{10}\big)^h$$
$$\big(L^{12}\big)^i \big(Q^{14}\big)^j \big(R^{15}\big)^k \big(U^{17}\big)^l \big(V^{19}\big)^m \big(X^{21}\big)^n,$$

avec des coefficients $\mathsf{coeff}_{a,\ldots,n,o,p}$ quelconques, où $\square_1$, …, $\square_{41}$ désignent les quadrants de $\mathbb{N}^{14}$ ayant des sommets correspondant aux puissances des **41** *monômes de tête en question.*

Par conséquent, en dimension $n = 4$ pour les jets d'ordre $\kappa = 4$, l'algèbre $\mathscr{E}_4^4$ des polynômes de

jets $\mathsf{P}\big(j^4 f\big)$ *invariants par reparamétrisation est engendrée par les polarisations :*

$$\boxed{\begin{array}{c} W^{10}, \quad f'_i, \quad \Lambda^3_{[i,j]}, \quad \Lambda^5_{[i,j];\,\alpha}, \quad \Lambda^7_{[i,j];\,\alpha,\beta}, \quad D^6_{[i,j,k]}, \\ D^8_{[i,j,k];\,\alpha}, \quad N^{10}_{[i,j,k];\,\alpha,\beta}, \quad M^8_{[i,j],[k,l]}, \quad E^{10}_{[i,j,k],[p,q]}, \quad L^{12}_{[i,j,k],[p,q];\,\alpha}, \\ Q^{14}_{[i,j,k],[p,q];\,\alpha,\beta}, \quad R^{15}_{[i,j,k],[p,q,r];\,\alpha}, \quad U^{17}_{[i,j,k],[p,q,r],[s,t]}, \\ V^{19}_{[i,j,k],[p,q,r],[s,t];\,\alpha}, \quad X^{21}_{[i,j,k],[p,q,r],[s,t];\,\alpha,\beta}, \end{array}}$$

de ces 16 *bi-invariants* W^{10}, f'_1, Λ^3, Λ^5, Λ^7, D^6, D^8, N^{10}, M^8, E^{10}, L^{12}, Q^{14}, R^{15}, U^{17}, V^{19}, X^{21} *; ces invariants polarisés sont anti-symétriques par rapport à chaque collection d'indices entre crochets* $[i,j,k]$, $[p,q,r]$, $[s,t]$, *et ils sont* **explicitement** *représentés en termes de* Δ*-déterminants par les formules complètes suivantes :*

$$\begin{aligned} &W^{10}_{1,2,3,4}, \\ &\quad f'_i, \\ &\quad \Lambda^3_{[i,j]} := \Delta^{',''}_{i,j}, \end{aligned}$$

$$\Lambda^5_{[i,j];\,\alpha} := \Delta^{','''}_{i,j}\, f'_\alpha - 3\,\Delta^{',''}_{i,j}\, f''_\alpha,$$

$$\begin{aligned} \Lambda^7_{[i,j];\,\alpha,\beta} := \Delta^{',''''}_{i,j}\, f'_\alpha f'_\beta + 4\,\Delta^{'','''}_{i,j}\, f'_\alpha f'_\beta - 5\Delta^{','''}_{i,j}\, \big(f'_\alpha f''_\beta + f''_\alpha f'_\beta\big) + \\ + 15\,\Delta^{',''}_{i,j}\, f''_\alpha f''_\beta, \end{aligned}$$

$$D^6_{[i,j,k]} := \Delta^{','','''}_{i,j,k},$$

$$
\begin{aligned}
D^{8}_{[i,j,k];\,\alpha} &:= \Delta^{',\,'',\,''''}_{i,j,k}\, f'_\alpha - 6\,\Delta^{',\,'',\,'''}_{i,j,k}\, f''_\alpha,\\
N^{10}_{[i,j,k];\,\alpha,\beta} &:= \Delta^{',\,''',\,''''}_{i,j,k}\, f'_\alpha f'_\beta - \frac{3}{2}\,\Delta^{',\,'',\,''''}_{i,j,k}\,\left(f'_\alpha f''_\beta + f''_\alpha f'_\beta\right) +\\
&\quad + 2\,\Delta^{',\,'',\,'''}_{i,j,k}\,\left(f'_\alpha f'''_\beta + f'''_\alpha f'_\beta\right) + 3\,\Delta^{',\,'',\,'''}_{i,j,k}\, f''_\alpha f''_\beta,
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
M^{8}_{[i,j],[k,l]} &:= 3\,\Delta^{',\,''''}_{i,j}\,\Delta^{',\,''}_{k,l} + 12\,\Delta^{'',\,'''}_{i,j}\,\Delta^{',\,''}_{k,l} -\\
&\quad - 5\,\Delta^{',\,'''}_{i,j}\,\Delta^{',\,'''}_{k,l}\,,\\
E^{10}_{[i,j,k],[p,q]} &:= 3\,\Delta^{',\,'',\,''''}_{i,j,k}\,\Delta^{',\,''}_{l,m} - 6\,\Delta^{',\,'',\,'''}_{i,j,k}\,\Delta^{',\,'''}_{l,m},\\
L^{12}_{[i,j,k],[l,m];\,\alpha} &:= 5\,\Delta^{',\,'',\,''''}_{i,j,k}\,\Delta^{',\,'''}_{p,q}\, f'_\alpha - 15\,\Delta^{',\,'',\,''''}_{i,j,k}\,\Delta^{',\,''}_{p,q}\, f''_\alpha - 6\,\Delta^{',\,'',\,'''}_{i,j,k}\,\Delta^{',\,''''}_{p,q}\, f'_\alpha -\\
&\quad - 24\,\Delta^{',\,'',\,'''}_{i,j,k}\,\Delta^{'',\,'''}_{p,q}\, f'_\alpha + 30\,\Delta^{',\,'',\,'''}_{i,j,k}\,\Delta^{',\,'''}_{p,q}\, f'_\alpha,
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
Q^{14}_{[i,j,k],[p,q];\,\alpha,\beta} &:= -10\,\Delta^{',\,''',\,''''}_{i,j,k}\,\Delta^{',\,'''}_{p,q}\, f'_\alpha f'_\beta + \Delta^{',\,'',\,''''}_{i,j,k}\,\Delta^{',\,''''}_{p,q}\, f'_\alpha f'_\beta +\\
&\quad + 4\,\Delta^{',\,''',\,''''}_{i,j,k}\,\Delta^{'',\,'''}_{p,q}\, f'_\alpha f'_\beta + +20\,\Delta^{',\,'',\,''''}_{i,j,k}\,\Delta^{',\,'''}_{p,q}\, f'_\alpha f''_\beta +\\
&\quad + 30\,\Delta^{',\,''',\,''''}_{i,j,k}\,\Delta^{',\,''}_{p,q}\, f'_\alpha f''_\beta - 6\,\Delta^{',\,'',\,'''}_{i,j,k}\,\Delta^{',\,''''}_{p,q}\, f'_\alpha f''_\beta -\\
&\quad - 24\,\Delta^{',\,'',\,'''}_{i,j,k}\,\Delta^{'',\,'''}_{p,q}\, f'_\alpha f''_\beta - 40\,\Delta^{',\,'',\,'''}_{i,j,k}\,\Delta^{',\,'''}_{p,q}\, f'_\alpha f'''_\beta -\\
&\quad - 75\,\Delta^{',\,'',\,''''}_{i,j,k}\,\Delta^{',\,''}_{p,q}\, f''_\alpha f''_\beta + 30\,\Delta^{',\,'',\,'''}_{i,j,k}\,\Delta^{',\,'''}_{p,q}\, f''_\alpha f''_\beta +\\
&\quad + 120\,\Delta^{',\,'',\,'''}_{i,j,k}\,\Delta^{',\,''}_{p,q}\, f''_\alpha f'''_\beta\,,\\
R^{15}_{[i,j,k],[p,q,r];\,\alpha} &:= \Delta^{',\,'',\,''''}_{i,j,k}\,\Delta^{',\,'',\,''''}_{p,q,r}\, f'_\alpha - 12\,\Delta^{',\,''',\,''''}_{i,j,k}\,\Delta^{',\,'',\,'''}_{p,q,r}\, f'_\alpha +\\
&\quad + 24\,\Delta^{',\,'',\,''''}_{i,j,k}\,\Delta^{',\,'',\,'''}_{p,q,r}\, f''_\alpha - 48\,\Delta^{',\,'',\,'''}_{i,j,k}\,\Delta^{',\,'',\,'''}_{p,q,r}\, f'''_\alpha\,,\\
U^{17}_{[i,j,k],[p,q,r],[s,t]} &:= 15\,\Delta^{',\,'',\,''''}_{i,j,k}\,\Delta^{',\,'',\,''''}_{p,q,r}\,\Delta^{',\,''}_{s,t} - 36\,\Delta^{',\,''',\,''''}_{i,j,k}\,\Delta^{',\,'',\,'''}_{p,q,r}\,\Delta^{',\,''}_{s,t} -\\
&\quad - 24\,\Delta^{',\,'',\,''''}_{i,j,k}\,\Delta^{',\,'',\,'''}_{p,q,r}\,\Delta^{',\,'''}_{s,t} + 144\,\Delta^{',\,'',\,'''}_{i,j,k}\,\Delta^{',\,'',\,'''}_{p,q,r}\,\Delta^{'',\,'''}_{s,t}\,,\\
V^{19}_{[i,j,k],[p,q,r],[s,t];\,\alpha} &:= 24\,\Delta^{',\,''',\,''''}_{i,j,k}\,\Delta^{',\,'',\,''''}_{p,q,r}\,\Delta^{',\,''}_{s,t}\, f'_\alpha - 60\,\Delta^{',\,''',\,''''}_{i,j,k}\,\Delta^{',\,'',\,'''}_{p,q,r}\,\Delta^{',\,'''}_{s,t}\, f'_\alpha +\\
&\quad + \Delta^{',\,'',\,''''}_{i,j,k}\,\Delta^{',\,'',\,''''}_{p,q,r}\,\Delta^{',\,'''}_{s,t}\, f'_\alpha - 75\,\Delta^{',\,'',\,''''}_{i,j,k}\,\Delta^{',\,'',\,''''}_{p,q,r}\,\Delta^{',\,''}_{s,t}\, f''_\alpha +\\
&\quad + 36\,\Delta^{',\,''',\,''''}_{i,j,k}\,\Delta^{',\,'',\,'''}_{p,q,r}\,\Delta^{',\,''}_{s,t}\, f''_\alpha + 168\,\Delta^{',\,'',\,''''}_{i,j,k}\,\Delta^{',\,'',\,'''}_{p,q,r}\,\Delta^{',\,'''}_{s,t}\, f''_\alpha -
\end{aligned}
$$

$$- 144\,\Delta^{',''}_{i,j,k}\,\Delta^{',''}_{p,q,r}\,\Delta^{''}_{s,t}\,f''_\alpha + 96\,\Delta^{',''}_{i,j,k}\,\Delta^{',''}_{p,q,r}\,\Delta^{'}_{s,t}\,f'''_\alpha -$$
$$- 240\,\Delta^{',''}_{i,j,k}\,\Delta^{',''}_{p,q,r}\,\Delta^{'}_{s,t}\,f'''_\alpha,$$

$$X^{21}_{[i,j,k],[p,q,r],[s,t];\,\alpha,\beta} :=$$
$$:= -40\,\Delta^{',''}_{i,j,k}\,\Delta^{',''}_{p,q,r}\,\Delta^{'}_{s,t}\,f'_\alpha f'_\beta - 4\,\Delta^{',''}_{i,j,k}\,\Delta^{',''}_{p,q,r}\,\Delta^{'}_{s,t}\,f'_\alpha f'_\beta -$$
$$- 4\,\Delta^{',''}_{i,j,k}\,\Delta^{',''}_{p,q,r}\,\Delta^{''}_{s,t}\,f'_\alpha f'_\beta + 60\,\Delta^{',''}_{i,j,k}\,\Delta^{',''}_{p,q,r}\,\Delta^{'}_{s,t}\,f'_\alpha f'_\beta +$$
$$+ 240\,\Delta^{',''}_{i,j,k}\,\Delta^{',''}_{p,q,r}\,\Delta^{''}_{s,t}\,f'_\alpha f'_\beta + 130\,\Delta^{',''}_{i,j,k}\,\Delta^{',''}_{p,q,r}\,\Delta^{'}_{s,t}\,f'_\alpha f''_\beta +$$
$$+ 120\,\Delta^{',''}_{i,j,k}\,\Delta^{',''}_{p,q,r}\,\Delta^{'}_{s,t}\,f'_\alpha f''_\beta - 168\,\Delta^{',''}_{i,j,k}\,\Delta^{',''}_{p,q,r}\,\Delta^{'}_{s,t}\,f'_\alpha f''_\beta -$$
$$- 668\,\Delta^{',''}_{i,j,k}\,\Delta^{',''}_{p,q,r}\,\Delta^{''}_{s,t}\,f'_\alpha f''_\beta - 360\,\Delta^{',''}_{i,j,k}\,\Delta^{',''}_{p,q,r}\,\Delta^{'}_{s,t}\,f'_\alpha f''_\beta -$$
$$- 160\,\Delta^{',''}_{i,j,k}\,\Delta^{',''}_{p,q,r}\,\Delta^{'}_{s,t}\,f'_\alpha f'''_\beta + 240\,\Delta^{',''}_{i,j,k}\,\Delta^{',''}_{p,q,r}\,\Delta^{'}_{s,t}\,f'_\alpha f'''_\beta +$$
$$+ 960\,\Delta^{',''}_{i,j,k}\,\Delta^{',''}_{p,q,r}\,\Delta^{''}_{s,t}\,f'_\alpha f'''_\beta - 375\,\Delta^{',''}_{i,j,k}\,\Delta^{',''}_{p,q,r}\,\Delta^{'}_{s,t}\,f''_\alpha f''_\beta +$$
$$+ 840\,\Delta^{',''}_{i,j,k}\,\Delta^{',''}_{p,q,r}\,\Delta^{'}_{s,t}\,f''_\alpha f''_\beta + 180\,\Delta^{',''}_{i,j,k}\,\Delta^{',''}_{p,q,r}\,\Delta^{'}_{s,t}\,f''_\alpha f''_\beta +$$
$$+ 144\,\Delta^{',''}_{i,j,k}\,\Delta^{',''}_{p,q,r}\,\Delta^{'}_{s,t}\,f''_\alpha f''_\beta + 144\,\Delta^{',''}_{i,j,k}\,\Delta^{',''}_{p,q,r}\,\Delta^{''}_{s,t}\,f''_\alpha f''_\beta -$$
$$- 1440\,\Delta^{',''}_{i,j,k}\,\Delta^{',''}_{p,q,r}\,\Delta^{'}_{s,t}\,f''_\alpha f'''_\beta + 480\,\Delta^{',''}_{i,j,k}\,\Delta^{',''}_{p,q,r}\,\Delta^{'}_{s,t}\,f''_\alpha f'''_\beta,$$

où les indices romains satisfont $1 \leqslant i < j < k \leqslant 4$*, où* $1 \leqslant p < q < r \leqslant 4$*, où* $1 \leqslant s < r \leqslant 4$ *et où les indices grecs* α, β *satisfont sans restriction* $1 \leqslant \alpha, \beta \leqslant 4$*, d'où en définitive, le* **nombre total** *d'invariants qui engendrent l'algèbre de Demailly-Semple* E^4_4 *est égal à :*

$$1 + 4 + 6 + 24 + 96 + 4 + 16 + 64 +$$
$$+ 36 + 24 + 96 + 384 + 64 + 96 + 384 + 1536 = \boxed{\mathbf{2835}}.$$

Spéculation intermédiaire

• **Pour toute application effective aux courbes holomorphes entières, il est nécessaire de résoudre toutes les questions suivantes, et pas seulement la première :**

• **Question 1 :** L'algèbre des invariants de Demailly-Semple est-elle finiment engendrée **?**

• **Question 2 :** L'idéal des relations entre les invariants est-il engendré par un procédé régulier spécifique dont la combinatoire est dominable **?**

• **Question 3 :** L'algèbre est-elle de Cohen-Macaulay **?** Si tel est le cas, peut-on décrire de manière effective une base d'invariants primaires **?**

• **Question 4 :** Si l'algèbre des invariants n'est pas de Cohen-Macaulay, peut-on décrire une base de Gröbner effective pour l'idéal des relations entre tous les invariants **?**

• **Semblerait néanmoins accessible à un algébriste encore plus courageux :** $n = \mathbf{5}$, $\kappa = \mathbf{5}$.

Les jets de Green-Griffiths sont combinatoirement très réguliers

On peut (enfin !) faire monter les jets à l'infini

III – Retour aux jets de Green-Griffiths

• **Immédiatement :** Différentier par rapport à $\zeta \in \mathbb{C}$ la contrainte initiale $f : \mathbb{C} \to X$:

$$P\big(f_1(\zeta), \dots, f_n(\zeta), f_{n+1}(\zeta)\big) \equiv 0$$

où — on l'aura compris — :

$$P\big(z_1, \dots, z_n, z_{n+1}\big) = 0$$

désigne l'équation polynomiale de $X^n \subset \mathbb{C}^{n+1}$.

$\kappa =$ un tel ordre arbitraire de dérivation

• **Jet de Green-Griffiths :** Dans une carte locale centrée en un point $x \in X$, on considère les disques holomorphes passant par x :

$$f : (\mathbb{D}, 0) \to (X, x) \simeq (\mathbb{C}^n, 0)$$

qui possèdent bien sûr n composantes :

$$\big(f_1(\zeta), f_2(\zeta), \dots, f_n(\zeta)\big),$$

et au-dessus du point x, on considère les polynômes dans les variables de jets $f_i^{(\lambda)}$ qui sont du type suivant :

$$\sum_{m = |a_1| + 2|a_2| + \cdots + \kappa |a_\kappa|} \mathsf{coeff} \cdot (f')^{a_1} (f'')^{a_2} \dots (f^{(\kappa)})^{a_\kappa},$$

et qui sont homogènes d'un certain poids fixé m par rapport à la dilatation de jets :

$$\delta \cdot \big(f'_{i_1}, f''_{i_2}, \dots, f^{(\kappa)}_{i_\kappa}\big) := \big(\delta^1 f'_{i_1}, \delta^2 f''_{i_2}, \dots, \delta^\kappa f^{(\kappa)}_{i_\kappa}\big).$$

• **Pour mémoire :**

$$\boxed{m = \text{poids} = \text{nombre total (fixé) de « primes »}}$$

• **Structure vectorielle/non vectorielle :** Bien que le fibré des jets $J^\kappa(\mathbb{D},\, X)$ de courbes holomorphes ne soit pas un fibré vectoriel dès que $\kappa \geqslant 2$, le fibré des jets de Green-Griffiths $\mathscr{E}^{GG}_{\kappa,m} T^*_X$ **est un fibré vectoriel**, car l'espace *vectoriel* des polynômes de poids m en le jet $j^\kappa f$ est stable par tout changement de coordonnées $j^\kappa f \mapsto j^\kappa\big(\Psi \circ f\big)$ induit par un changement de carte Ψ sur X.

Lemme. (Green-Griffiths 1980) *Ces données ponctuelles s'organisent en un fibré vectoriel holomorphe :*

$$\mathscr{E}^{GG}_{\kappa,m} T^*_X$$

sur $X^n \subset \mathbb{P}^{n+1}(\mathbb{C})$. *Ce fibré possède une filtration naturelle, et le fibré gradué associé :*

$$\mathsf{Gr}^\bullet\big(\mathscr{E}^{GG}_{\kappa,m} T^*_X\big)$$

est un fibré vectoriel holomorphe qui est isomorphe à la somme directe :

$$\boxed{\bigoplus_{\ell_1+2\ell_2+\cdots+\kappa\ell_\kappa=m} \mathrm{Sym}^{\ell_1} T^*_X \otimes \mathrm{Sym}^{\ell_2} T^*_X \otimes \cdots \otimes \mathrm{Sym}^{\ell_\kappa} T^*_X}$$

• **Inégalités cohomologiques :** Pour tout $i = 1, 2, \ldots, n$, on a :

$$h^i\big(X,\, \mathscr{E}^{GG}_{\kappa,m} T^*_X\big) \leqslant h^i\big(X,\, \mathsf{Gr}^\bullet \mathscr{E}^{GG}_{\kappa,m} T^*_X\big).$$

Théorème. [BLOCH, AHLFORS, GREEN-GRIFFITHS, DEMAILLY, SIU] *Soit X une hypersurface projective algébrique complexe, soit A un fibré en droites ample sur X — prendre* e.g. $A = \mathscr{O}_X(1)$ — *et soit :*

$$\mathsf{P} \in H^0\big(X, \mathscr{E}_{\kappa,m}^{GG \text{ ou } \cancel{DS}} \otimes A^{-1}\big)$$

une section globale. Alors toute courbe holomorphe entière $f\colon \mathbb{C} \to X$ non constante satisfait l'équation différentielle correspondante :

$$\mathsf{P}\big(f', \dots, f^{(\kappa)}\big) \equiv 0.$$

• **But :** $\boxed{\text{Construire des sections de } \mathscr{E}_{\kappa,m}^{GG} T_X^* \otimes A^{-1}}$

• **Caractéristique d'Euler-Poincaré du fibré des jets de Green-Griffiths :**

$$\chi\big(X, \mathscr{E}_{\kappa,m}^{GG} T_X^*\big) = \frac{m^{(\kappa+1)n-1}}{(\kappa!)^n \big((\kappa+1)n-1\big)!\; n!} \rightsquigarrow \text{[facteur innocent]}$$
$$\Big\{(-\mathsf{c}_1)^n (\log \kappa)^n + \mathrm{O}\big((\log \kappa)^{n-1}\big)\Big\} + \mathrm{O}\big(m^{(\kappa+1)n-2}\big),$$

où $\mathsf{c}_1 = \mathsf{c}_1(T_X)$ est la première classe de Chern de T_X.

• **Ré-expression en fonction du degré :**

$$\chi_{\kappa,m} = \text{Constante}_{n,\kappa,m}\, (-\mathsf{c}_1)^n + \text{reste négligeable}$$
$$= \text{Constante}_{n,\kappa,m}\, d\,(d-n-2)^n + \cdots$$

• **Type général :** Ainsi, pourvu seulement que X soit de type général : $d \geqslant n+3$, on a $\chi_{\kappa,m} \to \infty$ avec κ et m.

• **Stratégie naturelle mais difficile :** On veut construire des sections globales de $\mathscr{E}^{GG}_{\kappa,m}T^*_X$, à savoir on veut que :

$$\begin{array}{c} h^0\big(X,\,\mathscr{E}^{GG}_{\kappa,m}T^*_X\big) = \dim H^0\big(X,\,\mathscr{E}^{GG}_{\kappa,m}T^*_X\big) \\ > 0 \end{array}.$$

• **Définition de la caractéristique :**

$$\chi = h^0 - h^1 + h^2 - h^3 + h^4 - \cdots + (-1)^n h^n.$$

• **Minoration triviale :**

$$\begin{array}{l} h^0 = \chi + h^1 - h^2 + h^3 - h^4 + \cdots - (-1)^n\, h^n \\ \quad\geqslant \chi \qquad\quad - h^2 \qquad\quad - h^4 \qquad\quad - \cdots \end{array}.$$

• **Il suffirait de majorer les cohomologies paires :** Si $X^n \subset \mathbb{P}^{n+1}(\mathbb{C})$ est de type général, *i.e.* de degré $d \geqslant n+3$, alors les quantités :

$$h^{2i}_{\kappa,m} := \dim H^{2i}\big(X,\,\mathscr{E}^{GG}_{\kappa,m}T^*_X\big)$$

croîtraient moins rapidement que la caractéristique :

$$\chi_{\kappa,m} \gg h^{2i}_{\kappa,m} \qquad \text{pour } \kappa \text{ et } m \text{ grands.}$$

• **Dimension 2 :** BOGOMOLOV : annulation du h^2.

Théorème. [GREEN-GRIFFITHS 1980] *Sur une surface $X^2 \subset \mathbb{P}^3(\mathbb{C})$, toutes les courbes holomorphes entières $f\colon \mathbb{C} \to X$ satisfont des équations différentielles en degré optimal :*

$$\deg X \geqslant \mathbf{5}\,.$$

• **Dimension 3 :** [ROUSSEAU 2006] Le h^2 ne s'annule en général pas.

• **Fait général (voir ci-dessous) :** Les fibrés de jets de Green-Griffiths et de Demailly-Semple peuvent être décomposés comme certaines sommes de fibrés de Schur.

Théorème. [ROUSSEAU 2006] *Sur une hypersurface projective algébrique* $X^3 \subset \mathbb{P}^4(\mathbb{C})$*, pour les jets de Demailly-Semple d'ordre* $\kappa = 3$ *:*

$$\mathsf{Gr}^\bullet \mathscr{E}_{3,m}^{DS} T_X^* = \bigoplus_{a+3b+5c+6d=m} \mathscr{S}^{(a+b+2c+d,\, b+c+d,\, d)}\, T_X^*.$$

on peut majorer :

$$h^2\big(X,\, \mathscr{S}^{(\ell_1,\ell_2,\ell_3)} T_X^*\big) \leqslant d(d+13)\, \frac{3(\ell_1+\ell_2+\ell_3)^3}{2}\, (\ell_1-\ell_2)(\ell_1-\ell_3)(\ell_2-\ell_3) + \mathrm{O}\big(|\ell|^5\big),$$

de telle sorte qu'il existe des différentielles de jets dans $\mathscr{E}_{3,m}^{DS} T_X^*$ *pour* m *grand lorsque* $\deg X \geqslant \mathbf{97}$*.*

Théorème. [M. avril 2008 / D.M.R. novembre 2008] *Analogue complet avec les jets de Demailly-Semple pour* $n = 4$ *et* $\kappa = 4$ *lorsque :*

$$\deg X \geqslant \mathbf{259}\,.$$

Théorème. [M. 10 Juin 2009] *Dimension* **3** *avec les jets de Green-Griffiths d'ordre* $\kappa \sim \infty$ *lorsque :*

$$\deg X \geqslant \mathbf{34}\,.$$

IV – Décomposition en fibrés de Schur

• **Fibrés de Schur :** Soit $X^n \subset \mathbb{P}^{n+1}(\mathbb{C})$ une hypersurface projective algébrique lisse. Classiquement, on a les fibrés vectoriels holomorphes suivants sur X :

- T^*_X ;
- $\Lambda^k T^*_X$ (théorie de Hodge) ;
- $K_X := \Lambda^n T^*_X$ le fibré canonique ;
- $K_X^{\otimes m}$ ses puissances tensorielles (plurigenres) ;
- $\mathsf{Sym}^k T^*_X$ (k-genre cotangentiel) ;

Ce sont tous des cas particuliers des **fibrés de Schur** :

$$\mathscr{S}^{(\ell_1,\ell_2,\dots,\ell_n)} T^*_X,$$

qui sont paramétrés par n entiers décroissants :

$$\ell_1 \geqslant \ell_2 \geqslant \cdots \geqslant \ell_n \geqslant 0,$$

et l'on retrouve notamment :

$$\Lambda^k T^*_X = \mathscr{S}^{(1,\dots,1,0,\dots,0)} T^*_X \qquad \text{avec } k \text{ fois } 1;$$

$$\mathrm{Sym}^k T^*_X = \mathscr{S}^{(k,0,\dots,0)} T^*_X.$$

• **Brève définition :** En fait, les fibrés de Schur apparaissent quand on décompose en représentations irréductibles de $\mathsf{GL}_n(\mathbb{C})$ les puissances tensorielles :

$$\underbrace{T^*_X \otimes \cdots \otimes T^*_X}_{r \text{ fois}} = \bigoplus_{(\ell)} \left[\mathscr{S}^{(\ell_1,\dots,\ell_n)} T^*_X\right]^{\oplus N_{(\ell)}},$$

avec $\ell_1 \geqslant \cdots \geqslant \ell_n$ où $N(\ell)$ est une certaine multiplicité.

• **Théorie des représentations :** Toute représentation (action) de $\mathsf{GL}_n(\mathbb{C})$ peut s'écrire comme une certaine somme directe de représentations de Schur, lesquelles constituent la liste de **toutes** les représentations **irréductibles** possibles de $\mathsf{GL}_n(\mathbb{C})$.

• **Fait général offert à la géométrie complexe : Tout fibré vectoriel holomorphe** E sur X, sur les fibres duquel on peut faire agir $\mathsf{GL}_n(\mathbb{C})$, doit en principe se **décomposer comme une certaine somme directe de fibrés de Schur**, qui s'avèrent ainsi être les briques élémentaires avec lesquelles on peut reconstituer tout fibré dans l'anneau de Grothendieck, notamment : $\mathsf{Gr}\mathscr{E}^{GG}_{\kappa,m}T^*_X$.

Théorème. [M., 10 Juin 2009] *Supposons que pour tout* $i = 1, 2, \ldots, n$, *on peut majorer les dimensions cohomologiques :*

$$h^i = \dim H^i\big(X,\, \mathscr{S}^{(\ell_1,\ell_2,\ldots,\ell_{n-1},\ell_n)}T^*_X\big)$$

par une formule du type général :

$$h^i \leqslant \mathrm{const}_n \cdot \big[1 + d + d^2 + \cdots + d^{n+1}\big] \cdot \sum_{\substack{\alpha_1+\cdots+\alpha_{n-1}+\alpha_n=\frac{n(n+1)}{2} \\ \alpha_n \leqslant n-1}} (\ell_1-\ell_2)^{\alpha_1}\cdots(\ell_{n-1}-\ell_n)^{\alpha_{n-1}}(\ell_n)^{\alpha_n}.$$

Alors toutes les courbes holomorphes entières non constantes $f\colon \mathbb{C} \to X$ *satisfont des équations différentielles algébriques globales en degré optimal :*

$$\deg X \geqslant \mathbf{n+3}\,.$$

Résumé / Interlude explicatif

□ **But principal :** Constuire des équations différentielles sur les hypersurfaces projectives X de type général en degré optimal $\deg X \geqslant \mathbf{n+3}$.

□ **Décomposer** le fibré des jets de Green-Griffiths comme une certaine somme directe de **fibrés de Schur**, au moins de manière asymptotique en un sens à préciser ultérieurement :

$$\mathscr{E}^{GG}_{\kappa,m} T^*_X = \bigoplus_{\text{certains}} \mathscr{S}^{(\ell_1,\dots,\ell_n)} T^*_X .$$

□ **Admettre** temporairement l'hypothèse qui s'avérera naturelle — **Conjecture** ou **problème ouvert** — que pour $i = 1, 2, \dots, n$, on a :

$(*)$

$$\left[\begin{array}{l} h^i\big(X, \mathscr{S}^{(\ell_1,\dots,\ell_n)} T^*_X\big) \leqslant \text{const.}\big[1 + d + d^2 + \cdots + d^{n+1}\big] \cdot \\ \qquad \cdot \displaystyle\sum_{\substack{\alpha_1+\cdots+\alpha_{n-1}+\alpha_n = \frac{n(n+1)}{2} \\ \alpha_n \leqslant n-1}} (\ell_1 - \ell_2)^{\alpha_1} \cdots (\ell_{n-1} - \ell_n)^{\alpha_{n-1}} (\ell_n)^{\alpha_n} . \end{array}\right.$$

□ **Déduire** par sommation de ces inégalités des majorants pour les $h^{2i}\big(X,\, \mathscr{E}^{GG}_{\kappa,m} T^*_X\big)$.

□ **Gagner** par les asymptotiques la positivité :

$$h^0\big(X,\, \mathscr{E}^{GG}_{\kappa,m} T^*_X \otimes A^{-1}\big) > 0 ,$$

pour des ordre de jets κ très grands, pourvu que $m \gg 1$.

Suite sur la décomposition en fibrés de Schur

• **Gradué du fibré de Green-Griffiths :**

$$\mathsf{Gr}^\bullet \mathsf{E}^{GG}_{\kappa,m} T^*_X = \bigoplus_{\ell_1+2\ell_2+\cdots+\kappa\ell_\kappa=m} \mathrm{Sym}^{\ell_1} T^*_X \otimes \mathrm{Sym}^{\ell_2} T^*_X \otimes \cdots \otimes \mathrm{Sym}^{\ell_\kappa} T^*_X .$$

• **Question :** Comment, donc, obtenir la décomposition de ce fibré vectoriel en somme directe de fibrés de Schur, pour $\kappa \to \infty$ **?**

• **Rappel :**

$$\mathrm{Sym}^\ell T^*_X = \mathscr{S}^{(\ell,0,\ldots,0)} T^*_X .$$

• **Deux moyens d'obtenir une telle décomposition :**

- ☐ formule de Pieri ;
- ☐ vecteurs de plus haut poids.

• **Itérer une infinité de fois la formule :**

$$\mathscr{S}^{(t_1,\ldots,t_n)} T^*_X \otimes \mathscr{S}^{(\ell,0,\ldots,0)} T^*_X = \\ = \sum_{\substack{s_1+\cdots+s_n=\ell+t_1+\cdots+t_n \\ s_1\geqslant t_1\geqslant s_2\geqslant t_2\geqslant\cdots\geqslant s_n\geqslant t_n\geqslant 0}} \mathscr{S}^{(s_1,\ldots,s_n)} T^*_X .$$

• **Fait connu en combinatoire :** Nombres de Kostka ; formules non closes ; aspects asymptotiques connus **?**

• **Approche théorie des invariants :** accessible sur le plan asymptotique.

• **Matrice unipotente générale :**

$$\mathsf{u} := \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & \cdots & 0 \\ u_{21} & 1 & 0 & \cdots & 0 \\ u_{31} & u_{32} & 1 & \cdots & 0 \\ .. & .. & .. & \cdots & .. \\ u_{n1} & u_{n2} & u_{n3} & \cdots & 1 \end{pmatrix}.$$

• **Action sur les variables de jets :** Pour tout niveau de jets λ avec $1 \leqslant \lambda \leqslant \kappa$, définir :

$$g^{(\lambda)} := \mathsf{u} \cdot f^{(\lambda)},$$

c'est-à-dire avec tous les indices :

$$\begin{aligned} g_1^{(\lambda)} &:= f_1^{(\lambda)} \\ g_2^{(\lambda)} &:= f_2^{(\lambda)} + u_{21}\, f_1^{(\lambda)} \\ g_3^{(\lambda)} &:= f_3^{(\lambda)} + u_{32}\, f_2^{(\lambda)} + u_{31}\, f_1^{(\lambda)} \\ &\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots \\ g_n^{(\lambda)} &= f_n^{(\lambda)} + u_{n,n-1}\, f_{n-1}^{(\lambda)} + \cdots + u_{n1}\, f_1^{(\lambda)}. \end{aligned}$$

• **Fait général de la théorie des représentations de** $\mathsf{GL}_n(\mathbb{C})$ **:** Les 'Vecteurs' de 'plus haut poids' sont ceux qui sont invariants par cette action unipotente, c'est-à-dire, ce sont les polynômes de jets $\mathsf{P}\big(j^\kappa f\big)$ qui satisfont :

$$\mathsf{P}\big(j^\kappa g\big) = \mathsf{P}\big(\mathsf{u} \cdot j^\kappa f\big) \equiv \mathsf{P}\big(j^\kappa f\big),$$

pour toute matrice unipotente $\mathsf{u} \in \mathsf{U}_n(\mathbb{C})$.

Théorème. [19ÈME SIÈCLE] *L'algèbre des polynômes de jets invariants par cette action unipotente est engendrée par la collection de tous les invariants fondamentaux que sont les déterminants :*

$$\left|f_1^{(\lambda_1)}\right|, \qquad \begin{vmatrix} f_1^{(\lambda_1)} & f_2^{(\lambda_1)} \\ f_1^{(\lambda_2)} & f_2^{(\lambda_2)} \end{vmatrix}, \qquad \begin{vmatrix} f_1^{(\lambda_1)} & f_2^{(\lambda_1)} & f_3^{(\lambda_1)} \\ f_1^{(\lambda_2)} & f_2^{(\lambda_2)} & f_3^{(\lambda_2)} \\ f_1^{(\lambda_3)} & f_2^{(\lambda_3)} & f_3^{(\lambda_3)} \end{vmatrix},$$

$$\cdots\cdots \begin{vmatrix} f_1^{(\lambda_1)} & f_2^{(\lambda_1)} & \cdots & f_n^{(\lambda_1)} \\ f_1^{(\lambda_2)} & f_2^{(\lambda_2)} & \cdots & f_n^{(\lambda_2)} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ f_1^{(\lambda_n)} & f_2^{(\lambda_n)} & \cdots & f_n^{(\lambda_n)} \end{vmatrix} =: \Delta_{1,2,\ldots,n}^{\lambda_1,\lambda_2,\ldots,\lambda_n}.$$

où $1 \leqslant \lambda_1 < \lambda_2 < \cdots < \lambda_n \leqslant \kappa$ *sont arbitraires.*

• **Lien avec fibrés de Schur :** (voir ci-dessous)

Unique Δ – monôme $\Longleftrightarrow$ Unique fibré de Schur.

• **Syzygies (ou relations) :** Toutefois, il y a des relations quadratiques **plückériennes** entre tous ces déterminants, par exemple les suivantes, connues au 16ème siècle :

$$0 \equiv \Delta_1^{\lambda_1} \cdot \Delta_{1,2}^{\lambda_2,\lambda_3} + \Delta_1^{\lambda_3} \cdot \Delta_{1,2}^{\lambda_1,\lambda_2} + \Delta_1^{\lambda_2} \cdot \Delta_{1,2}^{\lambda_3,\lambda_1}$$

$$0 \equiv \Delta_{1,2}^{\lambda_1,\lambda_2}\, \Delta_{1,2}^{\lambda_3,\lambda_4} + \Delta_{1,2}^{\lambda_1,\lambda_4}\, \Delta_{1,2}^{\lambda_2,\lambda_3} + \Delta_{1,2}^{\lambda_1,\lambda_3}\, \Delta_{1,2}^{\lambda_4,\lambda_2}$$

• **Syzygies générales :** Connues, on peut les écrires, et elles forment d'emblée une base de Gröbner.

• **Rappel :** Avec les invariants de Demailly-Semple, on ne voit rien et on ne comprend rien à la combinatoire.

Théorème. [19ÈME SIÈCLE] *Pour tous déterminants* $\Delta^{\lambda_1,\ldots,\lambda_i}_{1,\ldots,i}$ *et* $\Delta^{\mu_1,\ldots,\mu_j}_{1,\ldots,j}$ *avec* $i \geqslant j$ *satisfaisant :*

- *lorsque* $i > j$*, il existe un indice* $t \in \{1,\ldots,j\}$ *tel que :*

$$\lambda_1 \leqslant \mu_1, \quad \ldots\ldots, \quad \lambda_{t-1} \leqslant \mu_{t-1}, \quad \textit{mais :} \quad \lambda_t > \mu_t;$$

- *lorsque* $i = j$*, il existe deux indices* $s \in \{1,\ldots,j\}$ *et* $t \in \{1,\ldots,j\}$ *avec* $t \geqslant s+1$ *tels que :*

$$\lambda_1 = \mu_1, \ \ldots, \ \lambda_{s-1} = \mu_{s-1}, \ \lambda_s < \mu_s,$$
$$\lambda_{s+1} \leqslant \mu_{s+1}, \ \ldots, \ \lambda_{t-1} \leqslant \mu_{t-1}, \ \textit{mais :} \ \lambda_t > \mu_t;$$

la relation quadratique générale est satisfaite identiquement dans l'anneau de base $\mathbb{C}[f'_{i_1}, f''_{i_2}, \ldots, f^{(\kappa)}_{i_\kappa}]$ *:*

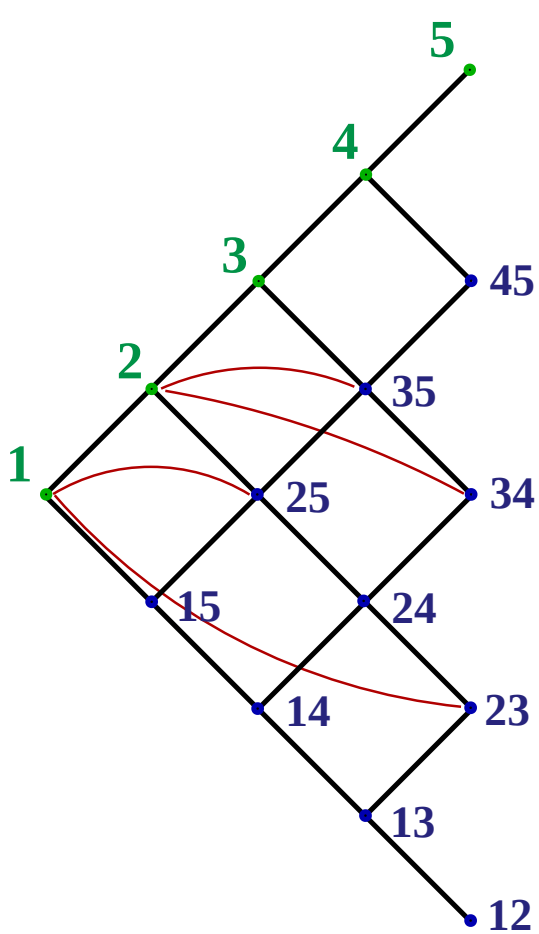
$$\boxed{0 \equiv \sum_{\pi \in \mathfrak{S}_{i+1}} \sum_{\substack{\pi(\lambda_t)<\cdots<\pi(\lambda_i) \\ \pi(\mu_1)<\cdots<\pi(\mu_t)}} \mathrm{sgn}(\pi) \cdot \Delta^{\lambda_1,\ldots,\lambda_{t-1},\pi(\lambda_t),\pi(\lambda_{t+1}),\ldots,\pi(\lambda_{j-1}),\pi(\lambda_j),\ldots,\pi(\lambda_i)}_{1,\ldots,t-1,t,t+1,\ldots,j-1,j,\ldots,i} \cdot \Delta^{\pi(\mu_1),\pi(\mu_2),\ldots,\pi(\mu_t),\mu_{t+1},\mu_{t+2},\ldots,\mu_j}_{1,2,\ldots,t,t+1,t+2,\ldots,j}}.$$

Théorème. [19ÈME SIÈCLE] *L'idéal des relations* Id-rel(Δ) *entre tous les* Δ*-déterminants est engendré par ces relations Plückériennes. De plus, elles constituent une base de Gröbner pour un ordre monomial naturel. Enfin, l'idéal monomial des* termes de tête *est constitué des paires incomparables dans un diagramme de Hasse.*

- **Exemple :** $n = 2$, $\kappa = 5$:

$$\Delta_1^{\mathbf{1}},\ \Delta_1^{\mathbf{2}},\ \Delta_1^{\mathbf{3}},\ \Delta_1^{\mathbf{4}},\ \Delta_1^{\mathbf{5}},$$

$$\begin{array}{llll}
\Delta_{1,2}^{\mathbf{1,2}}, & \Delta_{1,2}^{\mathbf{1,3}}, & \Delta_{1,2}^{\mathbf{1,4}}, & \Delta_{1,2}^{\mathbf{1,5}}, \\
 & \Delta_{1,2}^{\mathbf{2,3}}, & \Delta_{1,2}^{\mathbf{2,4}}, & \Delta_{1,2}^{\mathbf{2,5}}, \\
 & & \Delta_{1,2}^{\mathbf{3,4}}, & \Delta_{1,2}^{\mathbf{3,5}}, \\
 & & & \Delta_{1,2}^{\mathbf{4,5}}.
\end{array}$$



Paires incomparables

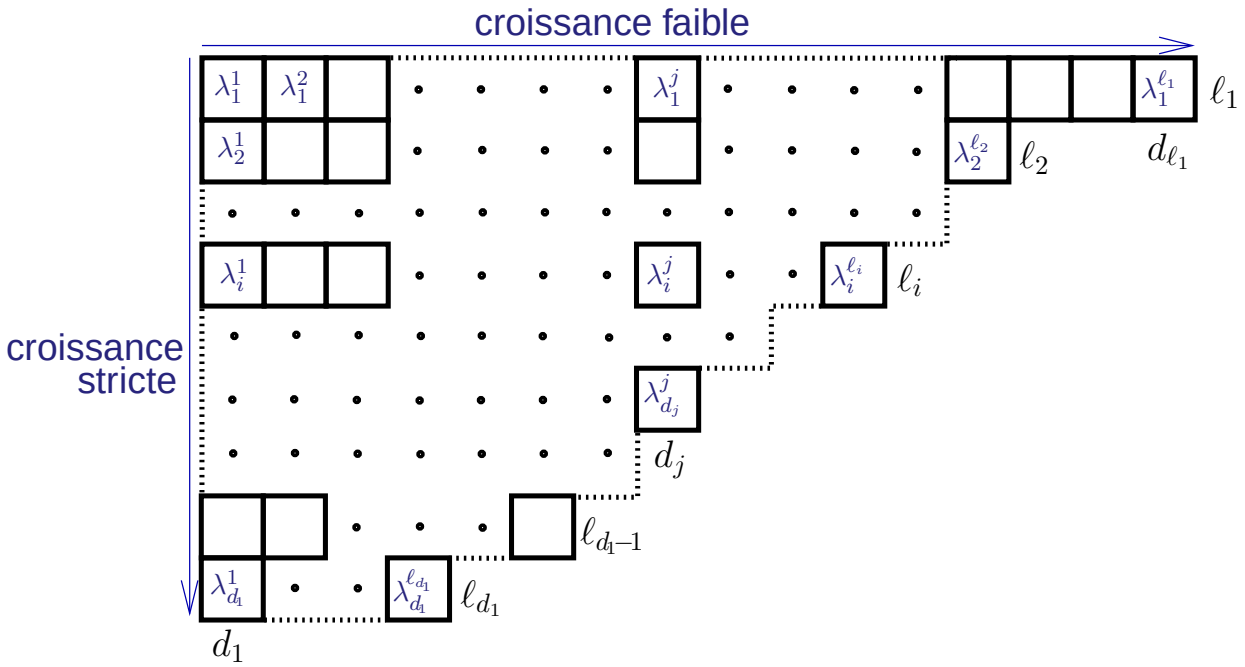
Théorème. [19ÈME SIÈCLE] *L'espace vectoriel quotient :*

tous les Δ-polynômes $\big/$ modulo leurs relations

possède une base sur $\mathbb{C}$ qui est constituée de tous les Δ-monômes :

$$\prod_{1\leqslant j\leqslant \ell_{d_1}} \Delta_{1,\dots,d_1}^{\lambda_1^j,\dots,\lambda_{d_1}^j} \prod_{\ell_{d_1}+1\leqslant j\leqslant \ell_{d_1-1}} \Delta_{1,\dots,d_1-1}^{\lambda_1^j,\dots,\lambda_{d_1-1}^j} \cdots \prod_{\ell_2+1\leqslant j\leqslant \ell_1} \Delta_1^{\lambda_1^j}$$

tels que la collection des indices supérieurs (λ_i^j) forme un tableau de Young semi-standard :



• **Décomposition exacte de $\mathsf{Gr}^\bullet \mathscr{E}_{\kappa,m}^{GG} T_X^*$ en fibrés de Schur.** Afin d'appliquer cette information combinatoire à notre problème, nous pouvons aussi représenter un Δ-monôme général sous la forme plus concise :

$$\prod_{d_1\geqslant i\geqslant 1} \prod_{1+\ell_{i+1}\leqslant j\leqslant \ell_i} \Delta_{1,\dots,i}^{\lambda_1^j,\dots,\lambda_i^j}.$$

• **Vecteur propre pour l'action diagonale :** Pour toute matrice $\mathsf{e} = \mathrm{diag}\big(\mathsf{e}_1, \ldots, \mathsf{e}_n\big)$, on a :

$$\mathsf{e} \cdot \Delta_{1,2,\ldots,i}^{\lambda_1^j, \lambda_2^j, \ldots, \lambda_i^j} = \mathsf{e}_1\, \mathsf{e}_2 \cdots \mathsf{e}_i\, \Delta_{1,2,\ldots,i}^{\lambda_1^j, \lambda_2^j, \ldots, \lambda_i^j},$$

• **En effet :** Multiplication uniforme des colonnes :

$$\mathsf{e} \cdot \Delta_{1,2,\ldots,i}^{\lambda_1^j, \lambda_2^j, \ldots, \lambda_i^j} = \begin{vmatrix} \mathsf{e}_1 f_1^{\lambda_1^j} & \mathsf{e}_2 f_2^{\lambda_1^j} & \cdots & \mathsf{e}_i f_i^{\lambda_1^j} \\ \mathsf{e}_1 f_1^{\lambda_2^j} & \mathsf{e}_2 f_2^{\lambda_2^j} & \cdots & \mathsf{e}_i f_i^{\lambda_2^j} \\ \cdot\cdot & \cdot\cdot & \cdots & \cdot\cdot \\ \mathsf{e}_1 f_1^{\lambda_i^j} & \mathsf{e}_2 f_2^{\lambda_i^j} & \cdots & \mathsf{e}_i f_i^{\lambda_i^j} \end{vmatrix}.$$

• **Action sur un Δ-monôme général :**

$$\begin{aligned} \mathsf{e} \cdot \Bigg(\prod_{d_1 \geqslant i \geqslant 1} \; \prod_{1+\ell_{i+1} \leqslant j \leqslant \ell_i} \Delta_{1,\ldots,i}^{\lambda_1^j, \ldots, \lambda_i^j} \Bigg) &= \mathsf{e} \cdot \big(\Delta\text{-monôme général}\big) \\ &= \prod_{d_1 \geqslant i \geqslant 1} \; \prod_{1+\ell_{i+1} \leqslant j \leqslant \ell_i} \mathsf{e}_1 \cdots \mathsf{e}_i \cdot \big(\text{mêm } \Delta\text{-monôme}\big) \\ &= \prod_{d_1 \geqslant i \geqslant 1} \big(\mathsf{e}_1 \cdots \mathsf{e}_i\big)^{\ell_i - \ell_{i+1}} \cdot \big(\text{même } \Delta\text{-monôme}\big) \\ &= (\mathsf{e}_1)^{\ell_1} (\mathsf{e}_2)^{\ell_2} \cdots (\mathsf{e}_n)^{\ell_n} \cdot \big(\text{même } \Delta\text{-monôme}\big). \end{aligned}$$

• **Conséquence intéressante :**

$$\boxed{\text{Unique } \Delta\text{-monôme semi-standard} \longleftrightarrow \text{Unique fibré de Schur}}.$$

Théorème. (M.) *Le fibré gradué* $\mathsf{Gr}^\bullet \mathscr{E}^{GG}_{\kappa,m} T^*_X$ *associé au fibré* $\mathscr{E}^{GG}_{\kappa,m} T^*_X$ *des* κ*-jets de poids* m *de Green-Griffiths s'identifie à la somme directe suivante de fibrés de Schur :*

$$\mathsf{Gr}^\bullet \mathscr{E}^{GG}_{\kappa,m} T^*_X = \bigoplus_{\ell_1 \geqslant \ell_2 \geqslant \cdots \geqslant \ell_n \geqslant 0} \left(\mathscr{S}^{(\ell_1,\ell_2,\ldots,\ell_n)} T^*_X \right)^{M^{\kappa,m}_{\ell_1,\ell_2,\ldots,\ell_n}},$$

avec des multiplicités $M^{\kappa,m}_{\ell_1,\ell_2,\ldots,\ell_n} \in \mathbb{N}$ *égales au nombre de fois qu'un diagramme de Young* $\mathsf{YD}_{(\ell_1,\ldots,\ell_n)}$ *dont les lignes ont les longueurs* $\ell_1 \geqslant \ell_2 \geqslant \cdots \geqslant \ell_n \geqslant 0$ *peut être rempli par des entiers strictement positifs* $\lambda^j_i \leqslant \kappa$ *placés à la* i*-ème ligne et à la* j*-ème colonne de manière à constituer un tableau semi-standard, avec la contrainte supplémentaire que la somme de tous ces entiers :*

$$\begin{aligned} m = {} & \lambda^1_1 + \cdots + \lambda^{\ell_n}_1 + \cdots + \lambda^{\ell_2}_1 + \cdots + \lambda^{\ell_1}_1 \\ & + \lambda^1_2 + \cdots + \lambda^{\ell_n}_2 + \cdots + \lambda^{\ell_2}_2 \\ & + \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots + \\ & + \lambda^1_n + \cdots + \lambda^{\ell_n}_n \end{aligned}$$

soit égale au degré d'homogénéité prescrit m.

Inaccessible avec les jets de Demailly-Semple :
Le plus haut niveau de jets plafonne à : $n = \kappa = 4$

V – Caractéristique d'Euler-Poincaré

$$\boxed{\chi\big(X,\, \mathscr{E}^{GG}_{\kappa,m} T^*_X\big) = \sum_{\ell_1 \geqslant \cdots \geqslant \ell_n \geqslant 0} M^{\kappa,m}_{\ell_1,\ldots,\ell_n} \cdot \chi\big(X,\, \mathscr{S}^{(\ell_1,\ldots,\ell_n)} T^*_X\big)}$$

- **Classes de Chern :** $\mathsf{c}_k := \mathsf{c}_k(T_X) = (-1)^k \mathsf{c}_k$.
- $X^2 \subset \mathbb{P}^3(\mathbb{C})$ **de dimension 2 :**

$$\chi\big(X,\, \mathscr{S}^{(\ell_1,\ell_2)} T^*_X\big) = \frac{\mathsf{c}_1^2 - \mathsf{c}_2}{0!\; 3!} \begin{vmatrix} \ell_1^3 & \ell_2^3 \\ 1 & 1 \end{vmatrix} + \frac{\mathsf{c}_2}{1!\, 2!} \begin{vmatrix} \ell_1^2 & \ell_2^2 \\ \ell_1 & \ell_2 \end{vmatrix} + \\ + \mathsf{O}\big(|\ell|^2\big);$$

- **Partitions de 2 :**

$$\begin{aligned} 2 &= 2 + 0 \\ &= 1 + 1. \end{aligned}$$

- $X^3 \subset \mathbb{P}^4(\mathbb{C})$ **de dimension 3 :**

$$\chi\big(X,\, \mathscr{S}^{(\ell_1,\ell_2,\ell_3)} T^*_X\big) = \\ = \frac{\mathsf{c}_1^3 - 2\,\mathsf{c}_1\mathsf{c}_2 + \mathsf{c}_3}{0!\; 1!\; 5!} \begin{vmatrix} \ell_1^5 & \ell_2^5 & \ell_3^5 \\ \ell_1 & \ell_2 & \ell_3 \\ 1 & 1 & 1 \end{vmatrix} + \frac{\mathsf{c}_1\mathsf{c}_2 - \mathsf{c}_3}{0!\; 2!\; 4!} \begin{vmatrix} \ell_1^4 & \ell_2^4 & \ell_3^4 \\ \ell_1^2 & \ell_2^2 & \ell_3^2 \\ 1 & 1 & 1 \end{vmatrix} + \\ + \frac{\mathsf{c}_3}{1!\; 2!\; 3!} \begin{vmatrix} \ell_1^3 & \ell_2^3 & \ell_3^3 \\ \ell_1^2 & \ell_2^2 & \ell_3^2 \\ \ell_1 & \ell_2 & \ell_3 \end{vmatrix} + \mathsf{O}\big(|\ell|^5\big).$$

- **Partitions de 3 :**

$$\begin{aligned} 3 &= 3 + 0 + 0 \\ &= 2 + 1 + 0 \\ &= 1 + 1 + 1. \end{aligned}$$

- $X^4 \subset \mathbb{P}^5(\mathbb{C})$ **de dimension 4 :**

$$\chi\big(X, \mathscr{S}^{(\ell_1,\ell_2,\ell_3,\ell_4)} T_X^*\big) =$$

$$= \frac{\mathsf{c}_1^4 - 3\,\mathsf{c}_1^2\mathsf{c}_2 + \mathsf{c}_2^2 + 2\,\mathsf{c}_1\mathsf{c}_3 - \mathsf{c}_4}{0!\ 1!\ 2!\ 7!} \begin{vmatrix} \ell_1^7 & \ell_2^7 & \ell_3^7 & \ell_4^7 \\ \ell_1^2 & \ell_2^2 & \ell_3^2 & \ell_4^2 \\ \ell_1^1 & \ell_2^1 & \ell_3^1 & \ell_4^1 \\ 1 & 1 & 1 & 1 \end{vmatrix} +$$

$$+ \frac{\mathsf{c}_1^2\mathsf{c}_2 - \mathsf{c}_2^2 - \mathsf{c}_1\mathsf{c}_3 + \mathsf{c}_4}{0!\ 1!\ 3!\ 6!} \begin{vmatrix} \ell_1^6 & \ell_2^6 & \ell_3^6 & \ell_4^6 \\ \ell_1^3 & \ell_2^3 & \ell_3^3 & \ell_4^3 \\ \ell_1 & \ell_2 & \ell_3 & \ell_4 \\ 1 & 1 & 1 & 1 \end{vmatrix} + \frac{-\mathsf{c}_1\mathsf{c}_3 + \mathsf{c}_2^2}{0!\ 1!\ 4!\ 5!} \begin{vmatrix} \ell_1^5 & \ell_2^5 & \ell_3^5 & \ell_4^5 \\ \ell_1^4 & \ell_2^4 & \ell_3^4 & \ell_4^4 \\ \ell_1 & \ell_2 & \ell_3 & \ell_4 \\ 1 & 1 & 1 & 1 \end{vmatrix} +$$

$$+ \frac{\mathsf{c}_1\mathsf{c}_3 - \mathsf{c}_4}{0!\ 2!\ 3!\ 5!} \begin{vmatrix} \ell_1^5 & \ell_2^5 & \ell_3^5 & \ell_4^5 \\ \ell_1^3 & \ell_2^3 & \ell_3^3 & \ell_4^3 \\ \ell_1^2 & \ell_2^2 & \ell_3^2 & \ell_4^2 \\ 1 & 1 & 1 & 1 \end{vmatrix} + \frac{\mathsf{c}_4}{1!\ 2!\ 3!\ 4!} \begin{vmatrix} \ell_1^4 & \ell_2^4 & \ell_3^4 & \ell_4^4 \\ \ell_1^3 & \ell_2^3 & \ell_3^3 & \ell_4^3 \\ \ell_1^2 & \ell_2^2 & \ell_3^2 & \ell_4^2 \\ \ell_1 & \ell_2 & \ell_3 & \ell_4 \end{vmatrix} + \mathsf{O}\big(|\ell|^9\big).$$

- **Partitions de 4 :**

$$\begin{aligned} 4 &= 4 + 0 + 0 + 0 \\ &= 3 + 1 + 0 + 0 \\ &= 2 + 2 + 0 + 0 \\ &= 2 + 1 + 1 + 0 \\ &= 1 + 1 + 1 + 1. \end{aligned}$$

Théorème. *Les termes de plus haut degré par rapport à* $|\ell| = \max_{1\leqslant i\leqslant n} \ell_i$ *dans la caractéristique d'Euler-Poincaré du fibré de Schur* $\mathscr{S}^{(\ell_1,\ell_2,\ldots,\ell_n)}\, T^*_X$ *sont homogènes d'ordre* $\mathsf{O}\big(|\ell|^{\frac{n(n+1)}{2}}\big)$ *et ils sont donnés par une somme de déterminants indexée par toutes les partitions* $(\nu_1,\ldots,\nu_n)$ *de* n *:*

$$(-1)^n\,\chi\Big(X,\ \mathscr{S}^{(\ell_1,\ell_2,\ldots,\ell_n)}\, T^*_X\Big) =$$

$$= \sum_{\nu \text{ partition de } n} \frac{\mathsf{C}_{\nu^c}}{(\nu_1+n-1)!\cdots\nu_n!} \begin{vmatrix} {\ell'_1}^{\nu_1+n-1} & {\ell'_2}^{\nu_1+n-1} & \cdots & {\ell'_n}^{\nu_1+n-1} \\ {\ell'_1}^{\nu_2+n-2} & {\ell'_2}^{\nu_2+n-2} & \cdots & {\ell'_n}^{\nu_2+n-2} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ {\ell'_1}^{\nu_n} & {\ell'_2}^{\nu_n} & \cdots & {\ell'_n}^{\nu_n} \end{vmatrix} +$$

$$+\mathsf{O}\Big(|\ell|^{\frac{n(n+1)}{2}-1}\Big),$$

où $\ell'_i := \ell_i + n - i$*, avec des coefficients* C_{ν^c} *qui sont exprimés en termes des classes de Chern* $\mathsf{c}_k = \mathsf{c}_k\big(T_X\big)$ *de* T_X *au moyen des expressions déterminantales de Giambelli, qui dépendent de la partition* conjuguée ν^c *:*

$$\mathsf{C}_{\nu^c} = \mathsf{C}_{(\nu^c_1,\ldots,\nu^c_n)} = \begin{vmatrix} \mathsf{c}_{\nu^c_1} & \mathsf{c}_{\nu^c_1+1} & \mathsf{c}_{\nu^c_1+2} & \cdots & \mathsf{c}_{\nu^c_1+n-1} \\ \mathsf{c}_{\nu^c_2-1} & \mathsf{c}_{\nu^c_2} & \mathsf{c}_{\nu^c_2+1} & \cdots & \mathsf{c}_{\nu^c_2+n-2} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \mathsf{c}_{\nu^c_n-n+1} & \mathsf{c}_{\nu^c_n-n+2} & \mathsf{c}_{\nu^c_n-n+3} & \cdots & \mathsf{c}_{\nu^c_n} \end{vmatrix},$$

avec la convention que $\mathsf{c}_k := 0$ *pour* $k<0$ *ou* $k>n$*, et que* $\mathsf{c}_0 := 1$*.*

- **Remplacer les** ℓ'_i **par les** ℓ_i **:** Ne change rien, la différences est en $\mathsf{O}\big(|\ell|^{\frac{n(n+1)}{2}-1}\big)$.

VI – Comportements asymptotiques

• **Objectif :** Étudier la cohomologie de :

$$\mathsf{Gr}^\bullet \mathscr{E}^{GG}_{\kappa,m} T^*_X = \bigoplus_{\ell_1 \geqslant \cdots \geqslant \ell_n \geqslant 0} \Big(\mathscr{S}^{(\ell_1,\ldots,\ell_n)} T^*_X \Big)^{M^{\kappa,m}_{\ell_1,\ldots,\ell_n}},$$

au moins asymptotiquement lorsque $m \to \infty$ et $\kappa \to \infty$.

• **Rappel :** on en déduit immédiatement :

$$\chi\big(X,\, \mathscr{E}^{GG}_{\kappa,m} T^*_X\big) = \sum_{\ell_1 \geqslant \cdots \geqslant \ell_n \geqslant 0} M^{\kappa,m}_{\ell_1,\ldots,\ell_n} \cdot \chi\big(X,\, \mathscr{S}^{(\ell_1,\ldots,\ell_n)} T^*_X\big).$$

• **Cohérence des formules :** Retrouver d'abord la formule de caractéristique :

$$\chi\left(X,\, \mathscr{E}^{GG}_{\kappa,m} T^*_X\right) = \frac{m^{(\kappa+1)n-1}}{(\kappa!)^n \big((\kappa+1)n-1\big)!\; n!} \cdot \Big\{ (-\mathsf{c}_1)^n (\log \kappa)^n + \mathrm{O}\big((\log \kappa)^{n-1}\big) \Big\} + \mathrm{O}\big(m^{(\kappa+1)n-2}\big),$$

qui avait été calculée en 1979 par Green-Griffiths, **sans** décomposer $\mathsf{Gr}^\bullet \mathscr{E}^{GG}_{\kappa,m} T^*_X$ en fibrés de Schur.

• **Se débarasser tout d'abord des restes :**

Théorème.

$$\sum_{\ell_1 \geqslant \cdots \geqslant \ell_n \geqslant 0} M^{\kappa,m}_{\ell_1,\ldots,\ell_n} \cdot \mathsf{O}\Big(|\ell|^{\frac{n(n+1)}{2}-1}\Big) = \mathsf{O}\big(m^{(\kappa+1)n-2}\big).$$

• **Commentaire :** La démonstration de cet énoncé auxiliaire est non triviale, car les multiplicités $M^{\kappa,m}_{\ell_1,\ldots,\ell_n}$ ne sont pas réellement calculables explicitement.

- **Convention :** Ne plus écrire les restes en $\mathsf{O}\big(|\ell|^{\frac{n(n+1)}{2}-1}\big)$.

- **Développement des déterminants de Giambelli :**

$$\chi\big(X,\, \mathscr{S}^{\ell_1,\dots,\ell_n}T_X^*\big) \equiv$$
$$\equiv \sum \mathsf{Poly}_{\mathbb{Q}}\big(\mathsf{c}_1,\dots,\mathsf{c}_n\big)\cdot$$
$$\cdot \sum_{\beta_1+\beta_2+\cdots+\beta_{n-1}+\beta_n=\frac{n(n+1)}{2}} \ell_1^{\beta_1}\ell_2^{\beta_2}\cdots\ell_{n-1}^{\beta_{n-1}}\ell_n^{\beta_n}.$$

- **Réécrire artificiellement**

$$\ell_1^{\beta_1}\ell_2^{\beta_2}\cdots\ell_{n-1}^{\beta_{n-1}}\ell_n^{\beta_n} = \big(\ell_1-\ell_2+\ell_2-\ell_3+\cdots+\ell_{n-1}-\ell_n+\ell_n\big)^{\beta_1}\cdot$$
$$\cdot\big(\ell_2-\ell_3+\cdots+\ell_{n-1}-\ell_n+\ell_n\big)^{\beta_2}\cdot$$
$$\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots$$
$$\cdot\big(\ell_{n-1}-\ell_n+\ell_n\big)^{\beta_{n-1}}\cdot$$
$$\cdot\big(\ell_n\big)^{\beta_n}.$$

- **Ré-exprimer :**

$$\chi\big(X,\, \mathscr{S}^{(\ell_1,\dots,\ell_{n-1},\ell_n)}T_X^*\big) \equiv \sum \widetilde{\mathsf{Poly}}_{\mathbb{Q}}\big(\mathsf{c}_1,\dots,\mathsf{c}_n\big)\cdot$$
$$\cdot \sum_{\substack{\alpha_1+\cdots+\alpha_{n-1}+\alpha_n=\frac{n(n+1)}{2}\\ \alpha_n\leqslant n}} \big(\ell_1-\ell_2\big)^{\alpha_1}\cdots\cdots\big(\ell_{n-1}-\ell_n\big)^{\alpha_{n-1}}\big(\ell_n\big)^{\alpha_n}.$$

- **Traiter séparément chaque ℓ-monôme :** Calculer :

$$\boxed{\sum_{\ell_1\geqslant\cdots\geqslant\ell_n\geqslant 0} M^{\kappa,m}_{\ell_1,\dots,\ell_n}\cdot\big(\ell_1-\ell_2\big)^{\alpha_1}\cdots\cdots\big(\ell_{n-1}-\ell_n\big)^{\alpha_{n-1}}\big(\ell_n\big)^{\alpha_n}}.$$

- **Observation :** Toutes ces sommes sont maintenant purement numériques !

Théorème. *Supposons que l'ordre des jets* $\kappa \geqslant n$ *est au moins égal à la dimension, et soient* $\alpha_1, \dots, \alpha_{n-1}, \alpha_n$ *des entiers positifs ou nuls satisfaisant :*

$$\alpha_1 + \cdots + \alpha_{n-1} + \alpha_n = \frac{n(n+1)}{2} \qquad \textit{et :} \quad \alpha_n \leqslant n-1.$$

Alors on a l'estimation logarithmique :

$$\sum_{\substack{\mathsf{YT\,semi-standard} \\ \mathsf{poids}(\mathsf{YT})=m}} \big(\ell_1(\mathsf{YT}) - \ell_2(\mathsf{YT})\big)^{\alpha_1} \cdots \big(\ell_{n-1}(\mathsf{YT}) - \ell_n(\mathsf{YT})\big)^{\alpha_{n-1}} \big(\ell_n(\mathsf{YT})\big)^{\alpha_n} =$$

$$= \sum_{\ell_1 \geqslant \cdots \geqslant \ell_n \geqslant 0} M^{\kappa,m}_{\ell_1,\dots,\ell_n} \cdot \big(\ell_1 - \ell_2\big)^{\alpha_1} \cdots \big(\ell_{n-1} - \ell_n\big)^{\alpha_{n-1}} \big(\ell_n\big)^{\alpha_n}$$

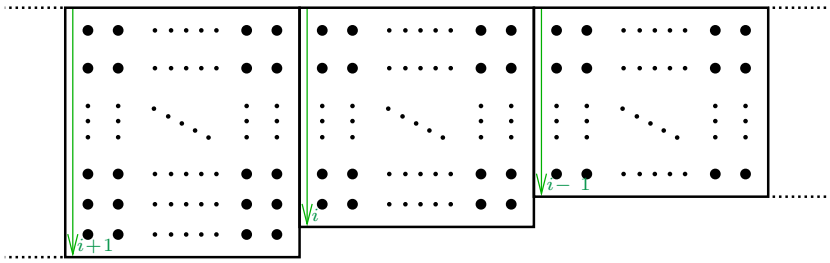
$$\leqslant \frac{m^{(\kappa+1)n-1}}{(\kappa!)^n\,((\kappa+1)n-1)!} \Big\{ \mathsf{const}_n \big(\log \kappa\big)^{\alpha_n} + \mathsf{O}_n \big(\log \kappa\big)^{\alpha_n - 1} \Big\} + \mathsf{O}_{n,\kappa}\big(m^{(\kappa+1)n-2}\big).$$

- **Difficulté principale :** Les multiplicités $M^{\kappa,m}_{\ell_1,\dots,\ell_n}$!

$$(*) \qquad \begin{aligned} &\sum_{\substack{\mathsf{YT\,semi-standard} \\ \mathsf{poids}(\mathsf{YT})=m}} \big(\ell_1(\mathsf{YT}) - \ell_2(\mathsf{YT})\big)^{\alpha_1} \cdots \big(\ell_{n-1}(\mathsf{YT}) - \ell_n(\mathsf{YT})\big)^{\alpha_{n-1}} \big(\ell_n(\mathsf{YT})\big)^{\alpha_n} \\ &= \mathsf{O}_{n,\kappa}\big(m^{(\kappa+1)n-2}\big) + \\ &+ \frac{m^{(\kappa+1)n-1}}{((\kappa+1)n-1)!} \sum_{\mu^i_l \in \nabla_{n,\kappa}} \frac{N^{\kappa}_{\mu^1_1}}{\kappa \cdots \mu^1_1} \frac{N^{\mu^1_1,\kappa}_{\mu^2_1,\mu^2_2}}{(\kappa+\mu^1_1)\cdots(\mu^2_2+\mu^2_1)} \cdots \\ &\qquad \cdots \frac{N^{\mu^{n-1}_1,\dots,\mu^{n-1}_{n-1},\kappa}_{\mu^n_1,\dots,\mu^n_{n-1},\mu^n_n}}{(\kappa+\mu^{n-1}_{n-1}+\cdots+\mu^{n-1}_1)\cdots(\mu^n_n+\mu^n_{n-1}+\cdots+\mu^n_1)} \cdot \\ &\alpha_1! \cdots \alpha_n! \cdot \sum_{q^1_0+\cdots+q^1_{\tau^1}=\alpha_1} \cdots \sum_{q^n_0+\cdots+q^n_{\tau^n}=\alpha_n} \\ &\Big(\prod_{0 \leqslant s^1 \leqslant \tau^1} \frac{1}{\big(s^1+\mu^1_1\big)^{q^1_{s^1}}} \cdots \prod_{0 \leqslant s^n \leqslant \tau^n} \frac{1}{\big(s^n+\mu^n_1+\cdots+\mu^n_n\big)^{q^n_{s^n}}} \Big) \end{aligned} .$$

- **Sous-multiplicités :** $N^{\mu^{i-1}_1,\dots,\mu^{i-1}_{i-1},\kappa}_{\mu^i_1,\dots,\mu^{i-1}_i,\mu^i_i}$.

- **Visionnement des blocs de Young décroissants :**



- **Colonnes-extrémités d'un bloc semi-standard :**

$$\boxed{\begin{matrix} \lambda_1^{1+\ell_{i+1}} & \cdots & \lambda_1^{\ell_i} \\ \lambda_2^{1+\ell_{i+1}} & \cdots & \lambda_2^{\ell_i} \\ .. & .. & .. \\ \lambda_i^{1+\ell_{i+1}} & \cdots & \lambda_i^{\ell_i} \end{matrix}} = \boxed{\begin{bmatrix} \mu_1^j \\ \mu_2^j \\ .. \\ \mu_i^j \end{bmatrix}^{a_{\mu_1^j,\mu_2^j,\ldots,\mu_i^j}} \cdots \begin{bmatrix} \lambda_1^j \\ \lambda_2^j \\ .. \\ \lambda_i^j \end{bmatrix}^{a_{\lambda_1^j,\lambda_2^j,\ldots,\lambda_i^j}} \cdots \begin{bmatrix} \nu_1^j \\ \nu_2^j \\ .. \\ \nu_i^j \end{bmatrix}^{a_{\nu_1^j,\nu_2^j,\ldots,\nu_i^j}}}.$$

- **Colonnes distinctes :**

$$\begin{bmatrix} \mu_1^j \\ \mu_2^j \\ .. \\ \mu_i^j \end{bmatrix} < \cdots < \begin{bmatrix} \lambda_1^j \\ \lambda_2^j \\ .. \\ \lambda_i^j \end{bmatrix} < \cdots < \begin{bmatrix} \nu_1^j \\ \nu_2^j \\ .. \\ \nu_i^j \end{bmatrix},$$

- **Synthèse diagrammatique :**

$$\boxed{\begin{bmatrix} \mu_1^{d_1} \\ \mu_2^{d_1} \\ \mu_3^{d_1} \\ . \\ . \\ \mu_{d_1-1}^{d_1} \\ \mu_{d_1}^{d_1} \end{bmatrix}^* \cdots \begin{bmatrix} \nu_1^{d_1} \\ \nu_2^{d_1} \\ \nu_3^{d_1} \\ . \\ . \\ \nu_{d_1-1}^{d_1} \\ \nu_{d_1}^{d_1} \end{bmatrix}^*} \boxed{\begin{bmatrix} \mu_1^{d_1-1} \\ \mu_2^{d_1-1} \\ \mu_3^{d_1-1} \\ . \\ . \\ \mu_{d_1-1}^{d_1-1} \end{bmatrix}^* \cdots \begin{bmatrix} \nu_1^{d_1-1} \\ \nu_2^{d_1-1} \\ \nu_3^{d_1-1} \\ . \\ . \\ \nu_{d_1-1}^{d_1-1} \end{bmatrix}^*} \cdots \boxed{\begin{bmatrix} \mu_1^3 \\ \mu_2^3 \\ \mu_3^3 \end{bmatrix}^* \cdots \begin{bmatrix} \nu_1^3 \\ \nu_2^3 \\ \nu_3^3 \end{bmatrix}^*} \boxed{\begin{bmatrix} \mu_1^2 \\ \mu_2^2 \end{bmatrix}^* \cdots \begin{bmatrix} \nu_1^2 \\ \nu_2^2 \end{bmatrix}^*} \boxed{\begin{bmatrix} \mu_1^1 \end{bmatrix}^* \cdots \begin{bmatrix} \nu_1^1 \end{bmatrix}^*}.$$

- **Visionner le voisinage entre blocs généraux :**

$$\cdots \boxed{\begin{bmatrix} \mu_1^{i+1} \\ \mu_2^{i+1} \\ \cdot \\ \cdot \\ \mu_i^{i+1} \\ \mu_{i+1}^{i+1} \end{bmatrix}^* \cdots \begin{bmatrix} \nu_1^{i+1} \\ \nu_2^{i+1} \\ \cdot \\ \cdot \\ \nu_i^{i+1} \\ \nu_{i+1}^{i+1} \end{bmatrix}^*} \boxed{\begin{bmatrix} \mu_1^{i} \\ \mu_2^{i} \\ \cdot \\ \cdot \\ \mu_i^{i} \end{bmatrix}^* \cdots \begin{bmatrix} \nu_1^{i} \\ \nu_2^{i} \\ \cdot \\ \cdot \\ \nu_i^{i} \end{bmatrix}^*} \cdots ,$$

- **Chemins de longueur maximale :**

$$\underbrace{\boxed{\begin{bmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \\ \cdot \\ \cdot \\ n-1 \\ n \end{bmatrix}^* \cdots \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \\ \cdot \\ \cdot \\ n-1 \\ \kappa \end{bmatrix}^*}}_{\kappa-n+1} \underbrace{\boxed{\begin{bmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \\ \cdot \\ \cdot \\ n-1 \end{bmatrix}^* \cdots \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \\ \cdot \\ \cdot \\ \kappa \end{bmatrix}^*}}_{\kappa-n+2} \cdots \underbrace{\boxed{\begin{bmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{bmatrix}^* \cdots \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \\ \kappa \end{bmatrix}^*}}_{\kappa-2} \underbrace{\boxed{\begin{bmatrix} 1 \\ 2 \end{bmatrix}^* \cdots \begin{bmatrix} 1 \\ \kappa \end{bmatrix}^*}}_{\kappa-1} \underbrace{\boxed{\begin{bmatrix} 1 \end{bmatrix}^* \cdots \begin{bmatrix} \kappa \end{bmatrix}^*}}_{\kappa} .$$

- **Wronskien n-dimensionnel :**

$$\Delta_{1,2,3,\ldots,n-1,n}^{1,2,3,\ldots,n-1,n} = \begin{vmatrix} f_1' & f_2' & f_3' & \cdots & f_{n-1}' & f_n' \\ f_1'' & f_2'' & f_3'' & \cdots & f_{n-1}'' & f_n'' \\ f_1''' & f_2''' & f_3''' & \cdots & f_{n-1}''' & f_n''' \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdots & \cdot & \cdot \\ f_1^{(n-1)} & f_2^{(n-1)} & f_3^{(n-1)} & \cdots & f_{n-1}^{(n-1)} & f_n^{(n-1)} \\ f_1^{(n)} & f_2^{(n)} & f_3^{(n)} & \cdots & f_{n-1}^{(n)} & f_n^{(n)} \end{vmatrix}$$

- **Multiplicités et longueurs :**

$$
\left\{
\begin{array}{rcl}
\ell_n &=& a_{1,2,3,\ldots,n-1,n} + \cdots + a_{1,2,3,\ldots,n-1,\kappa} \\
\ell_{n-1} - \ell_n &=& a_{1,2,3,\ldots,n-1} + \cdots + a_{1,2,3,\ldots,\kappa} \\
\cdot\cdot \qquad \cdot\cdot &=& \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots \\
\ell_3 - \ell_4 &=& a_{1,2,3} + \cdots + a_{1,2,\kappa} \\
\ell_2 - \ell_3 &=& a_{1,2} + \cdots + a_{1,\kappa} \\
\ell_1 - \ell_2 &=& a_1 + \cdots + a_\kappa.
\end{array}
\right.
$$

• Contrainte de poids :

$$
\begin{aligned}
m = {} & \big[1+2+3+\cdots+n-1+n\big]a_{1,2,3,\ldots,n-1,n} + \cdots + \big[1+2+3+\cdots+n-1+\kappa\big]a_{1,2,3,\ldots,n-1,\kappa} + \\
& + \big[1+2+3+\cdots+n-1\big]a_{1,2,3,\ldots,n-1} + \cdots + \big[1+2+3+\cdots+\kappa\big]a_{1,2,3,\ldots,\kappa} + \\
& + \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots + \\
& + \big[1+2+3\big]a_{1,2,3} + \cdots + \big[1+2+\kappa\big]a_{1,2,\kappa} + \\
& + \big[1+2\big]a_{1,2} + \cdots + \big[1+\kappa\big]a_{1,\kappa} + \\
& + \big[1\big]a_1 + \cdots + \big[\kappa\big]a_\kappa;
\end{aligned}
$$

• Nombre maximal de colonnes distinctes :

$$
(*) \qquad
\underbrace{\boxed{\begin{bmatrix} \mu_1^{d_1} \\ \mu_2^{d_1} \\ \mu_3^{d_1} \\ \cdot \\ \cdot \\ \mu_{d_1-1}^{d_1} \\ \mu_{d_1}^{d_1} \end{bmatrix}^* \cdots \begin{bmatrix} \nu_1^{d_1} \\ \nu_2^{d_1} \\ \nu_3^{d_1} \\ \cdot \\ \cdot \\ \nu_{d_1-1}^{d_1} \\ \nu_{d_1}^{d_1} \end{bmatrix}^*}}_{\#\leqslant D_{d_1}}
\underbrace{\boxed{\begin{bmatrix} \mu_1^{d_1-1} \\ \mu_2^{d_1-1} \\ \mu_3^{d_1-1} \\ \cdot \\ \cdot \\ \mu_{d_1-1}^{d_1-1} \end{bmatrix}^* \cdots \begin{bmatrix} \nu_1^{d_1-1} \\ \nu_2^{d_1-1} \\ \nu_3^{d_1-1} \\ \cdot \\ \cdot \\ \nu_{d_1-1}^{d_1-1} \end{bmatrix}^*}}_{\#\leqslant D_{d_1-1}}
\cdots
\underbrace{\boxed{\begin{bmatrix} \mu_1^3 \\ \mu_2^3 \\ \mu_3^3 \end{bmatrix}^* \cdots \begin{bmatrix} \nu_1^3 \\ \nu_2^3 \\ \nu_3^3 \end{bmatrix}^*}}_{\#\leqslant D_3}
\underbrace{\boxed{\begin{bmatrix} \mu_1^2 \\ \mu_2^2 \end{bmatrix}^* \cdots \begin{bmatrix} \nu_1^2 \\ \nu_2^2 \end{bmatrix}^*}}_{\#\leqslant D_2}
\underbrace{\boxed{\begin{bmatrix} \mu_1^1 \end{bmatrix}^* \cdots \begin{bmatrix} \nu_1^1 \end{bmatrix}^*}}_{\#\leqslant D_1}
\quad .
$$

Lemme. *Le nombre total de colonnes distinctes deux à deux dans un tableau semi-standard de profondeur $\leqslant n$ rempli par des entiers $\lambda_i^j \leqslant \kappa$ est toujours $\leqslant n\kappa - \frac{n(n+1)}{2}$.*

• **Chemins entre colonnes :**

$$\gamma^i\colon\ \{0,1,2,\dots,\tau^i\} \longrightarrow \text{colonnes décroissantes} \in \{1,\dots,\kappa\}^i$$

• **Inégalités strictes :**

$$\begin{bmatrix}\mu_1^i=\gamma_1^i(0)\\ \mu_2^i=\gamma_2^i(0)\\ ..\\ \mu_i^i=\gamma_i^i(0)\end{bmatrix}^* < \begin{bmatrix}\gamma_1^i(1)\\ \gamma_2^i(1)\\ .\\ \gamma_i^i(1)\end{bmatrix}^* < \cdots < \begin{bmatrix}\gamma_1^i(s^i)\\ \gamma_2^i(s^i)\\ .\\ \gamma_i^i(s^i)\end{bmatrix}^* < \cdots < \begin{bmatrix}\gamma_1^i(\tau^i)=\nu_1^i\\ \gamma_2^i(\tau^i)=\nu_2^i\\ ..\\ \gamma_i^i(\tau^i)=\nu_i^i\end{bmatrix}^* .$$

• **Bloc associé :**

$$\mathsf{block}^i\big(\gamma^i\big) := \boxed{\begin{bmatrix}\gamma_1^i(0)\\ \gamma_2^i(0)\\ .\\ \gamma_i^i(0)\end{bmatrix}^* \begin{bmatrix}\gamma_1^i(1)\\ \gamma_2^i(1)\\ .\\ \gamma_i^i(1)\end{bmatrix}^* \cdots \begin{bmatrix}\gamma_1^i(s^i)\\ \gamma_2^i(s^i)\\ .\\ \gamma_i^i(s^i)\end{bmatrix}^* \cdots \begin{bmatrix}\gamma_1^i(\tau^i)\\ \gamma_2^i(\tau^i)\\ .\\ \gamma_i^i(\tau^i)\end{bmatrix}^*}$$

• **Familles asymptotiquement négligeables de Δ-monômes :**

Proposition. *Pour tous entiers $\alpha_1,\dots,\alpha_{n-1},\alpha_n$ dont la somme est égale à $\frac{n(n+1)}{2}$, la contribution de :*

$$\sum_{\mathsf{YT}\in\mathscr{NG}_{\kappa,m}} \big(\ell_1(\mathsf{YT})-\ell_2(\mathsf{YT})\big)^{\alpha_1}\cdots\big(\ell_{n-1}(\mathsf{YT})-\ell_n(\mathsf{YT})\big)^{\alpha_{n-1}}\big(\ell_n(\mathsf{YT})\big)^{\alpha_n} \leqslant$$
$$\leqslant \mathsf{Constant}_{n,\kappa}\cdot m^{(\kappa+1)n-2}$$

est asymptotiquement négligeable en comparaison à $m^{(\kappa+1)n-1}$.

• **Familles significatives de Δ-monômes.** Ainsi, il reste à étudier la collection de toutes les familles de tableaux

semi-standard :

$$\mathscr{YT}^{\max}_{\kappa,m} := \bigcup_{\substack{\mu^i_l,\nu^i_l,\tau^i,\gamma^i(s^i) \\ \sum_{i=1}^n (1+\tau^i) = n\kappa - \frac{n(n-1)}{2}}} \mathscr{YT}_{\kappa,m}\big(\mu^i_l,\nu^i_l,\tau^i,\gamma^i(s^i)\big)$$

dont le nombre de colonnes distinctes deux à deux est maximal, égal à $n\kappa - \frac{n(n-1)}{2}$. En voici une description :

Proposition. *Le nombre D de colonnes deux à deux distinctes dans un tableau semi-standard tel que représenté dans la « synthèse diagrammatique » ci-dessus est toujours $\leqslant n\kappa - \frac{n(n-1)}{2}$. De plus, un tableau semi-standard donné atteint le nombre maximal :*

$$D = n\kappa - \frac{n(n-1)}{2}$$

de colonnes distinctes deux à deux si et seulement si les conditions suivantes sont toutes satisfaites :

- *la profondeur du tableau est maximale : $d_1 = n$;*
- *des blocks non vides de toute profondeur $i = 1, 2, 3, \ldots, n-1, n$ existent, de telle sorte que le nombre de ces block est maximal, égal à n ;*
- *la $*$-colonne extrême-gauche du tableau correspond au Wronskien $\Delta^{1,2,3,\ldots,n-1,n}_{1,2,3,\ldots,n-1,n}$ reproduit un certain nombre $* \geqslant 1$ de fois ;*
- *la composante inférieure droite de chaque block est maximale :*

$$\nu^1_1 = \nu^2_2 = \nu^3_3 = \cdots = \nu^{n-1}_{n-1} = \nu^n_n = \kappa;$$

$$\underbrace{\boxed{\begin{bmatrix}1\\2\\3\\\cdot\\\cdot\\n-1\\n\end{bmatrix}^* \cdots \begin{bmatrix}\mu_1^{n-1}\\\mu_2^{n-1}\\\mu_3^{n-1}\\\cdot\\\cdot\\\mu_{n-1}^{n-1}\\\kappa\end{bmatrix}^*}}_{1+\tau^n}\ \underbrace{\boxed{\begin{bmatrix}\mu_1^{n-1}\\\mu_2^{n-1}\\\mu_3^{n-1}\\\cdot\\\cdot\\\mu_{n-1}^{n-1}\end{bmatrix}^* \cdots \begin{bmatrix}\mu_1^{n-2}\\\mu_2^{n-2}\\\mu_3^{n-2}\\\cdot\\\cdot\\\kappa\end{bmatrix}^*}}_{1+\tau^{n-1}} \cdots \underbrace{\boxed{\begin{bmatrix}\mu_1^3\\\mu_2^3\\\mu_3^3\end{bmatrix}^* \cdots \begin{bmatrix}\mu_1^2\\\mu_2^2\\\kappa\end{bmatrix}^*}}_{1+\tau^3}\ \underbrace{\boxed{\begin{bmatrix}\mu_1^2\\\mu_2^2\end{bmatrix}^* \cdots \begin{bmatrix}\mu_1^1\\\kappa\end{bmatrix}^*}}_{1+\tau^2}\ \underbrace{\boxed{\begin{bmatrix}\mu_1^1\end{bmatrix}^* \cdots \begin{bmatrix}\kappa\end{bmatrix}^*}}_{1+\tau^1}.$$

- *les entrées de toute paire de colonnes bordantes (sauf la dernière de la plus longue des deux colonnes, égale à κ) sont égales :*

$$\cdots \boxed{\begin{bmatrix}\mu_1^{i+1}\\\mu_2^{i+1}\\\cdot\\\cdot\\\mu_{i-1}^{i+1}\\\mu_i^{i+1}\\\mu_{i+1}^{i+1}\end{bmatrix}^* \cdots \begin{bmatrix}\nu_1^{i+1}=\mu_1^i\\\nu_2^{i+1}=\mu_2^i\\\cdot\\\cdot\\\nu_{i-1}^{i+1}=\mu_{i-1}^i\\\nu_i^{i+1}=\mu_i^i\\\kappa\end{bmatrix}^*} \boxed{\begin{bmatrix}\mu_1^i\\\mu_2^i\\\cdot\\\cdot\\\mu_{i-1}^i\\\mu_i^i\end{bmatrix}^* \cdots \begin{bmatrix}\nu_1^i=\mu_1^{i-1}\\\nu_2^i=\mu_2^{i-1}\\\cdot\\\cdot\\\nu_{i-1}^i=\mu_{i-1}^{i-1}\\\kappa\end{bmatrix}^*} \boxed{\begin{bmatrix}\mu_1^{i-1}\\\mu_2^{i-1}\\\cdot\\\cdot\\\mu_{i-1}^{i-1}\end{bmatrix}^* \cdots \begin{bmatrix}\nu_1^{i-1}=\mu_1^{i-2}\\\nu_2^{i-1}=\mu_2^{i-2}\\\cdot\\\cdot\\\kappa\end{bmatrix}^*} \cdots,$$

- *le nombre de colonnes distinctes dans chaque bloc de profondeur i, pour $i = 1, 2, 3, \ldots, n-1, n$, est maximale, égal à :*

$$\begin{aligned}1+\tau^i :=& 1+(\mu_1^{i-1}-\mu_1^i)+(\mu_2^{i-1}-\mu_2^i)+\cdots+(\mu_{i-1}^{i-1}-\mu_{i-1}^i)+(\kappa-\mu_i^i)\\ =& 1+\kappa+\sum_{l=1}^{i-1}\mu_l^{i-1}-\sum_{l=1}^{i}\mu_l^i,\end{aligned}$$

de telle sorte que le nombre total de colonne distinctes deux à deux est donc effectivement égal à :

$$\begin{aligned}(1+\tau^1)+(1+\tau^2)+(1+\tau^3)+\cdots+(1+\tau^{n-1})+(1+\tau^n) &= n+n\kappa-\sum_{l=1}^{n}\mu_l^n\\ &= n\kappa-\tfrac{n(n-1)}{2}.\end{aligned}$$

Grande endurance requise dans les démonstrations

VII – Spéculations prospectives

• **Apparition de poly-logarithmes et de constantes d'Euler généralisées.**

« **Mer intérieur** » de calculs fins possibles.

• **Décider d'une « charnière critique » entre l'Algèbre et l'Analyse :** En quel endroit remplacer les calculs algébriques explicites complets par des majorations d'analyste ?

• **Grande liberté de choix pour l'« effort en calcul » !**

• **Décroissance conjecturale des dimensions cohomologiques :** En fait, puisque la dualité de Serre et un théorème d'annulation connu assurent que la contribution à la caractéristique de la dernière dimension cohomologique :

$$h^n\big(X,\, \mathscr{E}^{GG}_{\kappa,m} T^*_X\big) = \dim H^n\big(X,\, \mathscr{E}^{GG}_{\kappa,m} T^*_X\big)$$

s'annule, on pourrait même s'attendre à ce que les h^i satisfassent de **meilleures inégalités**, lorsque i augmente de 1 à n, que celles qui sont conjecturées.

Fin des méditations métaphysiques pour aujourd'hui