Thèse de mathématiques sous la direction de Joël Merker

Sur la conjecture de Green-Griffiths logarithmique

Lionel Darondeau

Université Paris-Sud

Jeudi 3 juillet 2014

X : variété complexe donnée.

Définition (Courbe entière)

Une *courbe entière* est une application holomorphe entière $f : \mathbb{C} \to X$ *non constante*.

Question

Quelle est la distribution des courbes entières dans X ?

Définition (Hyperbolicité au sens de Brody)

Une variété complexe X est *Brody-hyperbolique* s'il n'existe pas de courbe entière $f : \mathbb{C} \to X$.

Théorème (Liouville)

Si une fonction holomorphe entière $f : \mathbb{C} \longrightarrow \mathbb{C}$ a son image bornée, alors elle est constante.

En particulier, $\mathbb{D}$ est hyperbolique !

Théorème (Poincaré, Koebe 1907)

Une surface de Riemann simplement connexe est biholomorphe à l'une des trois surfaces canoniques : $\mathbb{P}^1$ ou $\mathbb{C}$ ou $\mathbb{D}$.

Corollaire

Les surfaces de Riemann compactes Brody-hyperboliques sont celles qui sont uniformisées par le disque $\mathbb{D}$.

Théorème (Picard)

Il n'y a pas de courbe entière $f\colon \mathbb{C} \to \mathbb{P}^1 \setminus \{0, 1, \infty\}$.

Théorème (Green 1972)

Le complémentaire $\mathbb{P}^n \setminus (H_1 \cup \cdots \cup H_p)$ *de la réunion de* $p \geqslant 2n+1$ *hyperplans* H_i *en position générale est Brody-hyperbolique.*

Dimension $n = 2$

Le complémentaire $\mathbb{P}^2 \setminus (C_1 \cup \cdots \cup C_c)$ d'une réunion générique de c courbes C_i de degré total :

$$d = d_1 + \cdots + d_c$$

est Brody-hyperbolique lorsque :

- $c \geqslant 4$ si $d \geqslant 5 = 2n + 1$ [Dethloff-Schumacher-Wong]
- $c = 3$ si $d \geqslant 5$ et $d_i \geqslant 2$ [Dethloff-Schumacher-Wong]
- $c = 2$ si $d \geqslant 12$ ou si $d_i \geqslant 4$ [Rousseau]
- $c = 1$ si $d \geqslant 14$ [El Goul, Rousseau]

Conjecture (Kobayashi 1970)

Le complémentaire dans $\mathbb{P}^n(\mathbb{C})$ d'une hypersurface lisse générique de degré au moins égal à $2n+1$ est hyperbolique.

Conjecture (Kobayashi 1970)

Une hypersurface lisse générique de $\mathbb{P}^{n+1}(\mathbb{C})$ de degré au moins égal à $2n+1$ est hyperbolique.

Paires logarithmiques, type général

Une *paire logarithmique* (X, D) est une variété complexe lisse X munie d'un diviseur qui est localement une réunion d'hyperplans de coordonnées :

$$D = (z_1 \cdots z_k \equiv 0) \subset X, \text{ pour } k \leqslant n.$$

On peut alors définir le *fibré cotangent logarithmique* :

$$\Omega(X, \log D) := \mathcal{O}_X\, d(\log z_1) \oplus \cdots \oplus \mathcal{O}_X\, d(\log z_k) \oplus \mathcal{O}_X\, dz_{k+1} \oplus \cdots \oplus \mathcal{O}_X\, dz_n,$$

et le *fibré canonique logarithmique* :

$$K_{X,D} := \wedge^n \Omega(X, \log D) = K_X \otimes \mathcal{O}(D).$$

Une paire logarithmique (X, D) est *de type général* si elle a le nombre “maximal” de sections pluricanoniques :

$$\dim H^0\left(X, K_{X,D}^{\otimes p}\right) \sim p^n.$$

Par exemple :

- les paires $\left(X_d, \emptyset\right)$, si $X_d \subset \mathbb{P}^{n+1}$ a un degré $d \geqslant n+3$.
- les paires $\left(\mathbb{P}^n, X_d\right)$, si $X_d \subset \mathbb{P}^n$ a un degré $d \geqslant n+2$.

Conjecture de Green-Griffiths-Lang

Conjecture (Green-Griffiths-Lang 1979)

Si (X, D) est une paire logarithmique de type général, alors il existe une sous-variété algébrique propre $Z \subsetneq X$ telle que toute courbe entière $f : \mathbb{C} \to X \setminus D$ ait son image contenue dans $Z \setminus D$.

Théorème (Green 1972)

Les courbes entières $f : \mathbb{C} \to \mathbb{P}^n \setminus (H_1 \cup \cdots \cup H_{n+k})$ ne rencontrant pas la réunion de $(n+k) \geqslant (n+1)$ hyperplans H_i en position générale ont leur image contenue dans un sous-espace linéaire de dimension $\lfloor \frac{n}{k} \rfloor$.

Il y a une version avec $n + 2$ hyperplans distincts sans hypothèse de position générale.

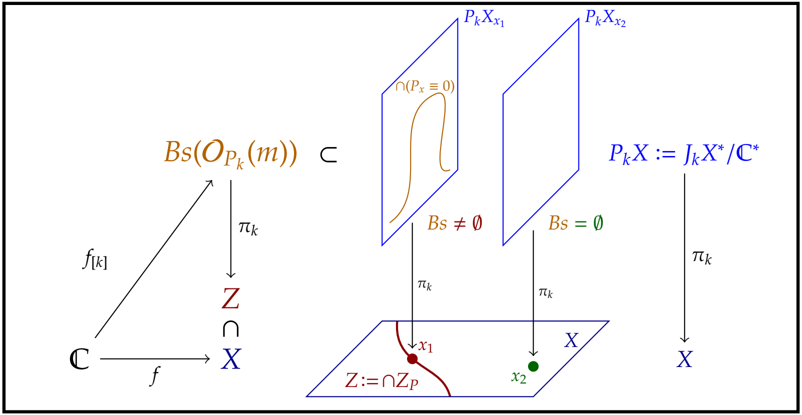
Fibrés de jets de Green-Griffiths

- $J_k X^*$: jets réguliers d'ordre k.
- Action de $\mathbb{C}^*$: $\lambda \cdot f = f \circ h_\lambda$, où h_λ : homothétie de rapport λ.
- $P_k X := J_k X^* / \mathbb{C}^* \xrightarrow{\pi_k} X$.
- Fibre : projectif à poids car $(f \circ h_\lambda)^{(j)} = \lambda^j f^{(j)} \circ h_\lambda$.
- $E_{k,m}^{GG} := (\pi_k)_\star \mathcal{O}_{P_k X}(m) \to X$: polynômes homogènes de poids total m sur les fibres de $P_k X$.

Théorème (Bloch, Green-Griffiths, Demailly, Siu)

Si $P \in H^0\big(X, E_{k,m}^{GG} \otimes \mathcal{O}(-A)\big)$ est une différentielle de jets globale qui s'annule sur un diviseur ample $A \subset X$, alors pour toute courbe entière $f : \mathbb{C} \to X \setminus D$:

$$P(f_{[k]}) \equiv 0.$$



Question

Quand peut on affirmer que $Z \neq X$?

Premier résultat optimal concernant les équations différentielles :

Théorème (Merker [$X_d \subset \mathbb{P}^n$], Demailly 2010)

Si X est une variété algébrique lisse de type général, alors il existe une équation différentielle algébrique P de degré $k \gg 1$ telle que le k-jet de toute courbe entière f vérifie $P(f_{[k]}) \equiv 0$.

Problème très difficile

Quand peut on affirmer que $Z \neq X$?

Cas où on sait montrer $Z \neq X$

- les paires $\left(X_d, \emptyset\right)$, si $X_d \subset \mathbb{P}^{n+1}$ a un degré $d \gg 1$.
- les paires $\left(\mathbb{P}^n, X_d\right)$, si $X_d \subset \mathbb{P}^n$ a un degré $d \gg 1$.

1. Montrer qu'il existe une différentielle de jet globale d'ordre $k = n$ qui s'annule sur un diviseur ample.
2. Utiliser une technique de déformation pour produire beaucoup d'autres équations différentielles à partir de la première.

Fibrés de jets projectivisés [Demailly, Dethloff-Lu]

Foncteur dans la catégorie des *variétés dirigées logarithmiques* :
Au triplet (X, D, V) : paire logarithmique (X, D), munie d'un sous-fibré holomorphe $V \subset T(X, -\log D)$, on associe :

1. la paire logarithmique : $X' := P(V) \xrightarrow{\pi} X$, $D' := \pi^{-1}(D)$.
   Différentielle de π :
$$0 \to T_\pi \longrightarrow T(X', -\log D') \xrightarrow{\pi_\star} \pi^\star T(X, -\log D) \to 0$$

2. Puisque $\mathcal{O}_{X'}(-1) \subset \pi^\star V \subset \pi^\star T(X, -\log D)$, on a un sous-fibré :
$$V' := (\pi_\star)^{-1}\mathcal{O}_{X'}(-1) \subset T(X', -\log D'),$$
   qui complète la suite exacte courte :
$$0 \to T_\pi \longrightarrow V' \xrightarrow{\pi_\star} \mathcal{O}_{X'}(-1) \to 0$$

On observe : $\begin{cases} \mathrm{rg}(V) = \mathrm{rg}(V') = \mathrm{rg}(P(V)) + \mathrm{rg}(\mathcal{O}_{X'}(-1)) = r + 1, \\ \dim(X') = \dim(X) + r. \end{cases}$

Dans la suite on considère le cas *absolu* où $V_0 = T(X, -\log D)$.
Itération pour $k \geqslant 1$:

$$\pi_k \colon (X_k, D_k, V_k) \to \cdots \to (X_1, D_1, V_1) \to (X_0, D_0, V_0),$$

avec :

$$\mathrm{rg}(V_k) = r \quad \text{et} \quad \dim(X_k) = n + kr.$$

<u>Relèvements</u> :

$$\begin{tikzcd}
 & (X_k, D_k, V_k) \\
 & \vdots \\
 & (X_1, D_1, V_1) \\
\mathbb{C} \arrow[ruuu, "f_{[k]}"] \arrow[ru, "f_{[1]}"] \arrow[r, "f"'] & (X_0, D_0, V_0)
\end{tikzcd}$$

Théorème (Demailly, Dethloff-Lu)

L'image directe de $\mathcal{O}_{X_k}(m)$ *est le sous-fibré :*

$$(\pi_k)_\star \mathcal{O}_{X_k}(m) = E_{k,m}^{DS} \subset E_{k,m}^{GG}$$

des différentielles de jets invariantes par reparamétrisation à la source.

Théorème (Demailly, Dethloff-Lu)

Si $P \in H^0\big(X, E_{k,m}^{DS} \otimes \mathcal{O}(-A)\big)$ *est une différentielle de jets globale qui s'annule sur un diviseur ample* $A \subset X$*, alors le k-jet de toute courbe entière* $f : \mathbb{C} \to X \setminus D$ *satisfait l'équation différentielle :*

$$P(f_{[k]}) \equiv 0.$$

- Montrer l'existence de sections de $\mathcal{O}_{X_k}(m) \to X_k$.
- Chaque étage est muni d'un fibré tautologique $\mathcal{O}_{X_i}(-1)$.

$$u_i := \mathsf{c}_1(\mathcal{O}_{X_i}(1)).$$

- Les combinaisons linéaires de ces fibrés tautologiques donnent des sous-faisceau "positif" de $\mathcal{O}_{X_k}(m)$ [Demailly] :

$$\mathcal{O}_{X_k}(a_k, \ldots, a_1) := \mathcal{O}_{X_k}(a_k) \otimes \cdots \otimes \pi_{k,1}^{\star} \mathcal{O}_{X_1}(a_1) \subset \mathcal{O}_{X_k}(a_1 + \cdots + a_k).$$

- Appliquer les inégalités de Morse [Demailly-Trapani] : le problème se réduit à montrer la positivité d'un certain produit d'intersection de la forme :

$$\int_{X_n} f(u_1, \ldots, u_n) =: I(a_1, \ldots, a_n, d).$$

[Demailly, Diverio 2007]

Problème **difficile**

Exprimer cette intégrale en fonction de quantités définies sur X_0, c'est à dire *intégrer le long des fibres* de la tour $X_n \to \cdots \to X_0$.

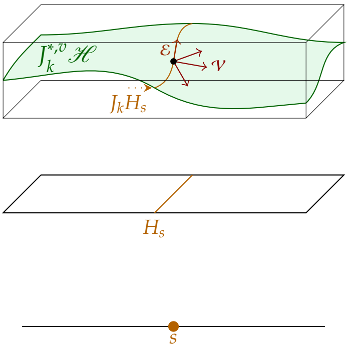
Supposons qu'on sache démontrer l'existence d'équations différentielles. Comment montrer que $Z \neq X$?

- **La méthode de déformation de Voisin-Siu** : considérer les hypersurfaces en famille, et déformer les équations différentielles par dérivée de Lie le long de champs de vecteurs "obliques".
- Les hypersurfaces $X_d \subset \mathbb{P}^{n+1}$ sont paramétrées par les polynômes homogènes de degré d en $n+2$ variables.
- L'espace projectif des paramètres de ces polynômes :

$$S := \mathbb{P}\Gamma\left(\mathbb{P}^{n+1}, \mathcal{O}_{\mathbb{P}^{n+1}}(d)\right) = \mathbb{P}^{\binom{d+n+1}{d}-1}.$$

- L'*hypersurface universelle* de degré d de $\mathbb{P}^{n+1}$ est le lieu d'annulation $\mathscr{H}$ dans $\mathbb{P}^{n+1} \times S$ du polynôme général de degré $(1, d)$:

$$\sum_{|\alpha|=d} A_\alpha \, {Z_0}^{\alpha_0} {Z_1}^{\alpha_1} \cdots {Z_{n+1}}^{\alpha_{n+1}}.$$



$$J_k^{*,v}\mathscr{H} := \ker\big((\mathrm{pr}_2)_{[k]}\big)$$

$$\cap \quad \text{codim} = k+1$$

$$\begin{array}{ll} J_k^{*}\mathscr{H} & \\ \downarrow \pi_k & \\ \mathscr{H} & \subset \mathbb{P}^{n+1}\times S \\ \downarrow pr_2 & \\ S & = \mathbb{P}\Gamma\left(\mathbb{P}^{n+1}, \mathcal{O}_{\mathbb{P}^{n+1}}(d)\right) \end{array}$$

Observation : “Champs d’Euler”

L’espace $\langle\mathcal{E}\rangle$ est de dimension k mais il correspond aux *reparamétrisations de la source*. Les dérivations associées ne donnent aucune information supplémentaire sur l’image de f.

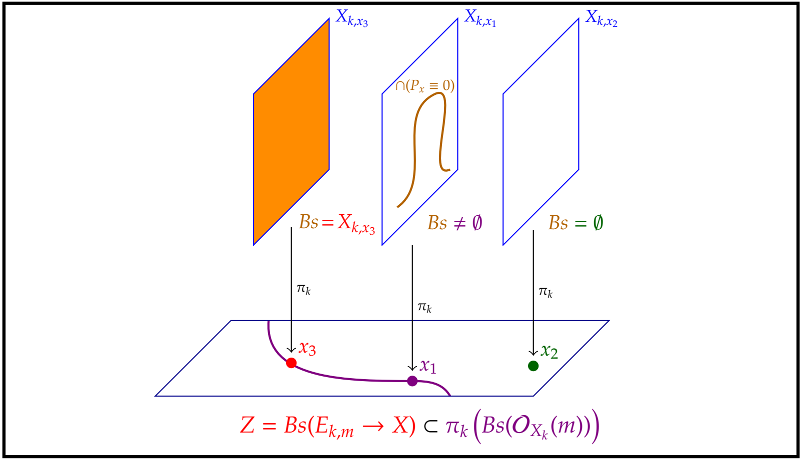
Engendrement global

Soit P une différentielle de jets d'ordre k et de degré m.

- On peut dériver P dans toutes les directions suivant un champ de vecteur oblique V (*engendrement global*).
- La nouvelle équation différentielle $V \cdot P$ continue à s'annuler sur un diviseur ample (*pôles contrôlés* d'ordre $\leqslant k(k+2)$).
- Toutes les dérivées partielles d'ordre $\leqslant m$ vérifient donc les hypothèses du théorème d'annulation.

[Voisin, Siu, Paŭn, Rousseau, Merker, Mourougane, –]

Alors : $Z = Bs(E_{k,m} \to X)$ au lieu de $\pi_k\left(Bs(\mathcal{O}_{X_k}(m) \to X_k)\right)$.



Théorème (Diverio-Merker-Rousseau 2008)

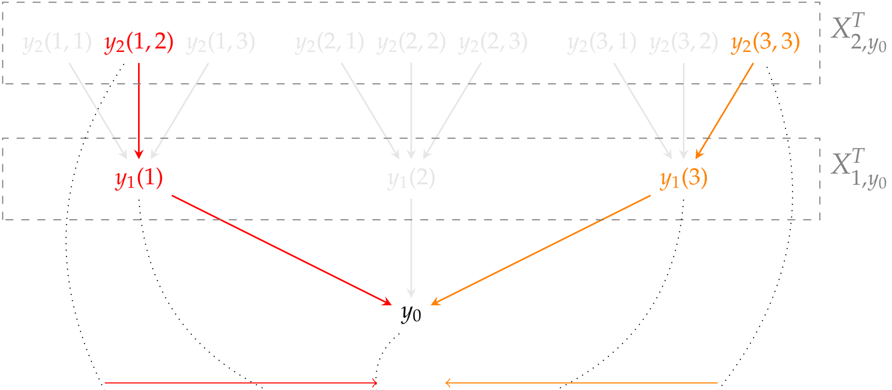
La conjecture de Green-Griffiths est vérifiée par les hypersurfaces génériques X_d de $\mathbb{P}^n$ de degré $d \geqslant 2^{n^5}$.

- [Bérczi 2010] On peut remplacer la borne par $d \geqslant n^{8n}$ (formule de localisation transformée en formule de résidu).
- [Demailly 2012] On peut remplacer la borne par $d \geqslant \frac{n^4}{3}\,(n\log(n\log(24n)))^n$ (estimées probabilistes).

Existence d'une section de $\mathcal{O}_{X_k}(m)$: 2 simplifications techniques proposées pour intégrer le long des fibres :

- Formule de résidus itérés (Bérczi)
- Classes de Segre (Mourougane)

Arbre des poids et des points fixes



$2\lambda_1 - \lambda_2$	$\lambda_1 = \mathrm{w}_1$	λ_1	$\lambda_1 - \lambda_3$	$\lambda_1 - 2\lambda_3$
$\lambda_2 - \lambda_1 = \mathrm{w}_2$	$\lambda_2 - \lambda_1$	λ_2	$\lambda_2 - \lambda_3$	$\lambda_2 - 2\lambda_3$
$\lambda_3 - \lambda_2$	$\lambda_3 - \lambda_1$	λ_3	$\lambda_3 = \mathrm{w}_1$	$\lambda_3 = \mathrm{w}_2$

Si $V \to X$ est un fibré vectoriel de rang $r+1$, la *classe de Segre totale* $s(V)$ de V est définie par :

$$s(V) = 1/c(V).$$

ou, de façon équivalente, les *classes de Segre individuelles* $s_i(V)$ de V sont définies par :

$$\int_{P(V)} u^j\, \pi^\star \alpha = \int_X s_{j-r}(V)\, \alpha \qquad [u = c_1(\mathcal{O}_{P(V)}(1))].$$

Théorème (Mourougane 2009)

Pour une famille suffisament mobile d'hypersurfaces projectives de degré suffisament grand, il existe une sous-variété algébrique propre de l'espace total qui contient l'image de toutes les sections.

Brotbek 2011 : intersections complètes de $\mathbb{P}^n$

Théorème

Pour tout polynôme $f \in H^\bullet\big(\bar{X}_0\big)[t_1, \ldots, t_k]$, en k variables $t_1, \ldots, t_k$, à coefficients dans l'anneau de cohomologie de la base $\bar{X}_0$, la classe de cohomologie :

$$f\big(\underline{v}\big) = f\big(v_1, \ldots, v_k\big) \in H^\bullet\big(\bar{X}_k\big),$$

peut être intégrée le long des fibres du fibré projectif $\bar{X}_k \to \bar{X}_0$ en utilisant la formule :

$$\int_{\bar{X}_k} f\big(\underline{v}\big) = \underset{t_1^r \cdots t_k^r}{\mathrm{Coefficient}}\Big(I(t_1, \ldots, t_k)\, \Phi_k(t_1, \ldots, t_k)\Big),$$

où $I(\underline{t})$ est le produit d'intersection sur la base :

$$I(t_1, \ldots, t_k) := \int_{\bar{X}_0} f(t_1, \ldots, t_k)\, s_{1/t_1}(V_0) \cdots s_{1/t_k}(V_0),$$

et où $\Phi_k(\underline{t})$ est la fonction rationnelle universelle :

$$\Phi_k(t_1, \ldots, t_k) := \prod_{1 \leqslant i < j \leqslant k} \frac{t_j - t_i}{t_j - 2\,t_i} \prod_{2 \leqslant i < j \leqslant k} \frac{t_j - 2\,t_i}{t_j - 2\,t_i + t_{i-1}}.$$

Théorème

Si $X_d \subset \mathbb{P}^n$ est une hypersurface projective lisse générique de degré :

$$d \geqslant (5n)^2 \, n^n,$$

alors il existe une sous-variété propre $Z \subset \mathbb{P}^n$, de codimension au moins deux, telle que l'image de toute courbe entière non constante $f \colon \mathbb{C} \to \left(\mathbb{P}^n \setminus X_d\right)$ à valeurs dans le complémentaire de X_d, est en fait contenue dans $\left(Z \setminus X_d\right)$.

Après "changement de variables" :

$$v_i = u_i + \cdots + u_1 \qquad {\scriptstyle (i=1,\ldots,n)},$$

dans le produit d'intersection de Diverio :

$$(\mathcal{F}^{n^2} - n^2\mathcal{F}^{n^2-1}\mathcal{G})(\delta, u_1, \ldots, u_n),$$

et remplacement des classes de Segre de la base :

$$s_{1/t}(V_0) = \frac{(t + dh)}{(t + h)^{n+1}},$$

il suffit de montrer la positivité du coefficient :

$$I(d) = [h^n t_1^n \cdots t_n^n]\,(\mathsf{A}(d, h, t)\mathsf{B}(h, t)\mathsf{C}(t))$$

où :

- $\mathsf{A} = (\mathcal{F}^{n^2} - n^2\mathcal{F}^{n^2-1}\mathcal{G})(\delta, t) \times \prod(t + dh)$.
- $\mathsf{B} = \prod \frac{1}{(t+h)^{n+1}}$.
- $\mathsf{C} = \Phi_n(t)$.

Calcul approché pour $\underline{\delta = 0, \mathsf{B} = \mathsf{C} = 1}$: cas facile

Coefficient de d^n

$$
\boxed{
\begin{aligned}
I_0 = & \underbrace{\Big[h^n t_1^n \cdots t_\kappa^n\Big]\Big(\mathsf{A}_0(\underline{t})|_{\delta=0}\Big)}_{=\widetilde{I_0}} + \\
& \underbrace{\Big[h^n t_1^n \cdots t_\kappa^n\Big]\Big(\mathsf{A}_0(\underline{t})|_{\delta=0}\left(\mathsf{C}(\underline{t}) - 1\right)\Big)}_{\text{negligeable pour } a_1 \gg \cdots \gg a_\kappa} + \underbrace{\delta\, I_0'}_{\text{negligeable pour } \delta \ll 1} .
\end{aligned}
}
$$

$$
I_0 \geqslant \frac{2}{3}\widetilde{I_0} > 0.
$$

$$I_p = \underbrace{\left[h^n t_1^n \cdots t_\kappa^n\right]\Big(\mathsf{A}_p(\underline{t})|_{\delta=0}\,\mathsf{B}(\underline{t})\Big)}_{\sim\text{multiple de } \widetilde{I_p}} + \underbrace{\left[h^n t_1^n \cdots t_\kappa^n\right]\Big(\mathsf{A}_p(\underline{t})|_{\delta=0}\,\mathsf{B}(\underline{t})\,\big(\mathsf{C}(\underline{t}) - 1\big)\Big)}_{\text{negligeable pour } a_1 \gg \cdots \gg a_\kappa} + \underbrace{\delta\, I'_p}_{\text{negligeable pour } \delta \ll 1}.$$

$$|I|_p \leqslant 5^p\, |\widetilde{I_p}|$$

Utilisation d'une série majorante

- On choisit : $a_i = r^{n-i}$.
- Les coefficients de A ont un comportement "géométrique" en $1/r^\ell$ où ℓ est la distance à un certain terme "central".
- Les coefficients de :

$$\Phi_n(t_1, \ldots, t_n) := \prod_{1 \leqslant i < j \leqslant n} \frac{t_j - t_i}{t_j - 2\,t_i} \prod_{2 \leqslant i < j \leqslant n} \frac{t_j - 2\,t_i}{t_j - 2\,t_i + t_{i-1}}.$$

sont majorés en valeur absolue par les coefficients (positifs) de :

$$\Phi_n^+(t_1, \ldots, t_n) := \prod_{1 \leqslant i < j \leqslant n} \frac{t_j - t_i}{t_j - 2\,t_i} \prod_{2 \leqslant i < j \leqslant n} \frac{t_j - 2\,t_i}{t_j - 2\,t_i - t_{i-1}}.$$

- Il suffit d'estimer, l'expression convergente :

$$\Phi_n^+(1/r, \ldots, 1/r^n).$$

Espoir : borne exponentielle

- Si $I_0 > 0$ alors I est positif pour $d \geqslant (a_1 + \cdots + a_n)^n$.
- Positivité du coefficient dominant : trouver plus de termes de signe positif dans C.
- Les paramètres "optimaux" $a_i = 3^{n-i}$ donneraient $d \geqslant 3^n \ldots$

Théorème

Si l'ordre des jets k est plus petit que le degré d, alors le 'twist' du fibré tangent aux k-jets verticaux de la variété logarithmique $\left(\mathbb{P}^n \times S, \mathcal{H}\right)$ *:*

$$T_{J_k^{vert}(\mathbb{P}^n\times S)(-\log\mathcal{H})} \otimes \left(\mathcal{O}_{\mathbb{P}^n}\left(k^2+2k\right)\otimes\mathcal{O}_S\left(1\right)\right)$$

est engendré par ses sections holomorphes globales en tout point du sous-espace des k-jets logarithmiques verticaux réguliers de courbes holomorphes évitant $\mathcal{H}$.

Coordonnées invariantes sur l'espace des jets réguliers