Transformée de Fourier et fonctions holomorphes

François DE MARÇAY
Département de Mathématiques d'Orsay
Université Paris-Saclay, France

1. Introduction

Si $f\colon \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{C}$ est une fonction régulière qui décroît suffisamment à l'infini, *i.e.* lorsque $|x| \longrightarrow \infty$, alors dans le cours d'*Analyse de Fourier*, la *transformée de Fourier* de $f(x)$ est définie par :

$$\widehat{f}(\xi) := \int_{-\infty}^{\infty} f(x)\, e^{-2i\pi\xi x}\, dx \qquad\qquad (\xi \in \mathbb{R}),$$

et c'est une fonction $\widehat{f}\colon \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{C}$.

En contrepartie, si $\widehat{f}(\xi)$ décroît elle aussi suffisamment à l'infini, *i.e.* lorsque $|\xi| \longrightarrow \infty$, alors $f(x)$ est ré-obtenue comme *transformée de Fourier inverse* — noter le changement de signe dans l'exponentielle — de $\widehat{f}(\xi)$:

$$f(x) = \int_{-\infty}^{\infty} \widehat{f}(\xi)\, e^{2i\pi x\xi}\, d\xi \qquad\qquad (x \in \mathbb{R}).$$

La transformation de Fourier joue un rôle fondamental en Analyse réelle, mais aussi en Analyse complexe. Dans ce chapitre, nous allons en effet dévoiler des liens intimes et illustrer diverses connections fructueuses qui existent entre d'une part la théorie de Fourier réelle, et d'autre part les fonctions holomorphes d'une variable complexe. Le thème principal est le suivant.

Pour une fonction $f\colon \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{C}$ initialement définie sur la droite réelle $\mathbb{R} \times i\{0\} \subset \mathbb{C}$, la décroissance rapide (par exemple exponentielle) de sa transformée de Fourier $\widehat{f}$ est fortement liée à la possibilité de prolonger f holomorphiquement à certains *voisinages ouverts allongés* de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{C}$.

Plus précisément, si f est à décroissance modérée au sens où $|f(x)| \leqslant \frac{\mathrm{C}}{1+x^2}$ pour une constante $0 \leqslant \mathrm{C} < \infty$ de telle sorte que l'intégrale qui définit sa transformée de Fourier converge, *et si* f peut être prolongée holomorphiquement à une bande horizontale ouverte infinie centrée autour de l'axe réel, alors nous démontrerons que $\widehat{f}$ décroît exponentiellement à l'infini au sens où l'on a :

$$|\widehat{f}(\xi)| \leqslant \mathrm{B}\, e^{-c|\xi|},$$

pour deux constantes $0 \leqslant \mathrm{B}, c < \infty$. Dans ces circonstances, la transformée de Fourier *inverse* peut être appliquée à $\widehat{f}$, puisque l'intégrale correspondante converge alors aussi.

De plus, on peut déduire de ces considérations la *formule sommatoire de Poisson :*

$$\sum_{n\in\mathbb{Z}} f(n) = \sum_{n\in\mathbb{Z}} \widehat{f}(n),$$

déjà démontrée dans le cours d'*Analyse de Fourier*. De manière profonde, de nombreux théorèmes de la théorie de Fourier sont des conséquentes élégantes de la théorie de l'intégration sur des chemins complexes.

Dans un second temps, nous prendrons comme point de départ la validité de la formule d'inversion de Fourier lorsque f *et* $\widehat{f}$ sont suffisamment décroissantes à l'infini, mais sans faire l'hypothèse que f se prolonge holomorphiquement à un voisinage ouvert de $\mathbb{R} \subset \mathbb{C}$. Nous soulèverons alors une question simple et naturelle : *Quelles sont les conditions sur* f *pour que sa transformée de Fourier soit à support compact, disons dans un intervalle borné* $[-\mathrm{M}, \mathrm{M}]$ *?* Ce problème se formule en effet sans aucune référence aux concepts de l'Analyse complexe.

Cependant, cette question peut être résolue uniquement en termes des propriétés holomorphes « cachées » de f. La bonne condition nécessaire et suffisante sera exprimée par le *Théorème de Paley-Wiener*, d'après lequel :

$$\mathrm{supp}\,\widehat{f} \subset [-\mathrm{M}, \mathrm{M}] \qquad \Longleftrightarrow \qquad \begin{cases} f \in \mathscr{O}(\mathbb{C}) \text{ se prolonge holomorphiquement à } \mathbb{C} \\ \text{et satisfait } |f(z)| \leqslant \mathsf{constante} \cdot e^{2\pi \mathrm{M}|z|}. \end{cases}$$

Les fonctions holomorphes définies sur $\mathbb{C}$ tout entier qui satisfont ce contrôle de croissance sont dites *de type exponentiel*.

Intuitivement, la condition que $\widehat{f}$ s'annule identiquement en-dehors d'un intervalle compact $[-\mathrm{M}, \mathrm{M}] \subset \mathbb{R}$ peut être vue comme une forme ultime (et même extrême) de décroissance à l'infini, et ainsi, le théorème de Paley-Wiener s'avère être une illustration supplémentaire des connexions intimes entre l'Analyse réelle et l'Analyse complexe.

Pour établir ces beaux résultats, la technique-clé va consister à *décaler verticalement* le chemin d'intégration, c'est-à-dire la droite réelle $\mathbb{R} \subset \mathbb{C}$, pour produire des droites horizontales translatées vers le bas ou vers le haut, ce qui permettra de tirer avantage du comportement exponentiellement décroissant du facteur complexifié $e^{-2i\pi\xi z}$, dans lequel on remplace x par $z = x + i\,y$. En effet, lorsque $z = x \in \mathbb{R}$ est réel, on sait bien que ce facteur $e^{-2i\pi\xi x}$ oscille tout en restant borné en module (constant égale à 1), mais quand $z = x + i\,b$ est sur une droite horizontale de partie imaginaire $b \neq 0$ non nulle constante, ce facteur $e^{-2i\pi\xi x + 2\pi\xi b}$ devient de module $e^{2\pi\xi b}$ exponentiellement décroissant lorsque $\xi \longrightarrow \infty$ dès que signe $(b) < 0$.

Ce sont ces *déplacements* de la droite réelle vers le haut et vers le bas dans le plan complexe qui vont permettre de découvrir des propriétés nouvelles de la transformation de Fourier.

2. Fonctions holomorphes de module décroissant dans des bandes

Une condition de décroissance simple que l'on peut imposer aux fonctions $f\colon \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{C}$ afin que leur transformée de Fourier :

$$\widehat{f}(\xi) := \int_{-\infty}^{\infty} f(x)\, e^{-2i\pi\xi x}\, dx,$$

ait un sens, est celle qu'on appelle, dans un cours d'*Analyse de Fourier*, la *décroissance modérée* (à l'infini) :

$$\big|f(x)\big| \leqslant \frac{\mathrm{C}}{1+x^2},$$

où $0 \leqslant \mathrm{C} < \infty$ est une constante. Si de plus on a :

$$\big|\widehat{f}(\xi)\big| \leqslant \frac{\widehat{\mathrm{C}}}{1+\xi^2},$$

alors un théorème important montre qu'on retrouve la fonction de départ grâce à la *formule d'inversion de Fourier* — noter le changement de signe dans l'exponentielle :

$$f(x) = \int_{-\infty}^{\infty} \widehat{f}(\xi)\, e^{2i\pi x\xi}\, d\xi. \tag{2.1}$$

Ces résultats sont en particulier valables en supposant que $f \in \mathscr{S}(\mathbb{R})$ appartient à l'*espace de Schwartz*, c'est-à-dire que *toutes* ses dérivées sont à décroissance plus rapide que l'inverse de toute puissance de x à l'infini :

$$\big|f^{(n)}(x)\big| \leqslant \frac{\mathrm{C}_{n,k}}{1+|x|^k} \qquad (\forall\, n, \forall\, k,\, \exists\, \mathrm{C}_{n,k}),$$

car on démontre alors que $\widehat{f} \in \mathscr{S}(\mathbb{R})$ satisfait *aussi* de telles inégalités.

Nous travaillerons plutôt avec l'hypothèse élémentaire de décroissance modérée. Plus généralement, le lecteur-étudiant vérifiera qu'on peut travailler avec des hypothèses du type :

$$\big|f(x)\big| \leqslant \frac{\mathrm{C}}{1+|x|^{1+\varepsilon}} \qquad \text{et} \qquad \big|\widehat{f}(\xi)\big| \leqslant \frac{\mathrm{C}}{1+|\xi|^{1+\varepsilon}},$$

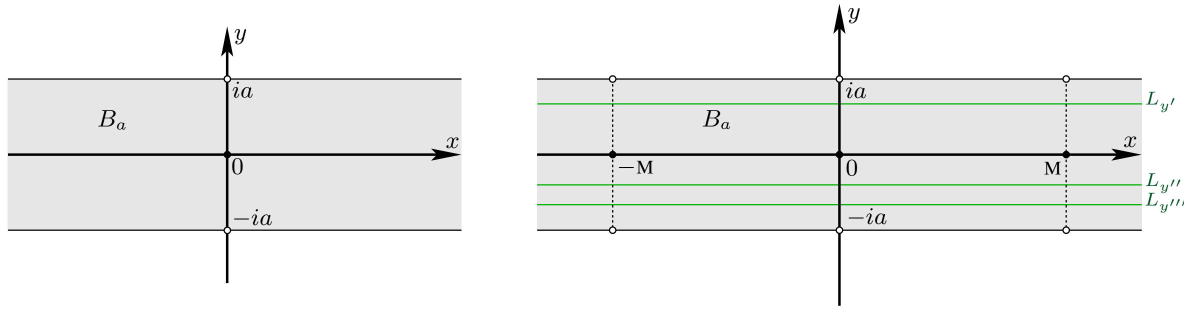
où $\epsilon > 0$ est fixe.

Dans le contexte de la décroissance modérée, introduisons maintenant une classe de fonctions *holomorphes* qui est particulièrement bien adaptée à l'objectif que nous nous sommes fixé : établir des théorèmes au sujet de la transformée de Fourier en exploitant la puissange (magique) de l'Analyse Complexe.

Définition-Notation 2.2. Pour $a > 0$ fixé, on note :

$$B_a := \big\{z \in \mathbb{C} \colon\ |\mathrm{Im}\, z| < a\big\},$$

la bande horizontale ouverte infinie d'épaisseur $2a$, dont l'âme centrale est l'axe réel.



On introduit la classe de fonctions holomorphes :

$$\mathfrak{F}_a := \Big\{f \in \mathscr{O}(B_a) \colon\ \big|f(x+iy)\big| \leqslant \tfrac{\mathrm{C}}{1+x^2} \text{ pour tout } x \in \mathbb{R} \text{ et tout } |y| < a\Big\}.$$

Les lettres C, $\widehat{\mathrm{C}}$, C_1, C_2, ..., désigneront des constantes de $\mathbb{R}_+$, modifiables, dont la valeur précise n'importe pas. En particulier, f est *bornée* dans les rectangles $B_a \cap \{|x| \leqslant \mathrm{M}\}$ où $\mathrm{M} \in \mathbb{R}_+$.

En d'autres termes, $\mathfrak{F}_a$ consiste en les fonctions holomorphes dans B_a qui sont à décroissance modérée *uniforme* sur *chaque* droite horizontale contenue dans B_a :

$$L_{y'} \;:=\; \big\{z \in \mathbb{C} \colon \ \mathsf{Im}\, z = y'\big\} \qquad\qquad (-a < y' < a).$$

Comme suggéré intuitivement par la figure, sur toutes les droites horizontales $L_{y'}, L_{y''}, L_{y'''}, \dots \subset B_a$, la décroissance modérée est *la même*.

Notons que pour toute « troncature rectangulaire horizontale », à savoir pour $\mathrm{M} \in \mathbb{R}_+$ quelconque, on a :

$$\left.\begin{aligned} |f(z)| &\leqslant \mathrm{C}_1 && \text{dans } B_a \cap \{|x| \leqslant \mathrm{M}\} \\ |f(z)| &\leqslant \tfrac{\mathrm{C}_2}{1+x^2} && \text{dans } B_a \cap \{|x| > \mathrm{M}\} \end{aligned}\right\} \quad \Longrightarrow \quad f \,\in\, \mathfrak{F}_a \text{ avec } \big|f(z)\big| \,\leqslant\, \frac{\mathsf{max}(\mathrm{C}_1, \mathrm{C}_2)}{1+x^2}.$$

Exemples 2.3. **(1)** La fonction $f(z) := e^{-\pi z^2}$ appartient à $\mathfrak{F}_a$ pour tout $a \in \mathbb{R}_+^*$, car en supposant $|y| < a$, il vient :

$$\Big|e^{-\pi(x+iy)^2}\Big| \;=\; e^{-\pi x^2 + \pi y^2} \;\leqslant\; \mathrm{C}\, e^{-\pi x^2} \qquad \text{avec } \mathrm{C} \;:=\; e^{\pi a^2},$$

et on sait depuis la classe de terminal maternelle que $x \longmapsto e^{-\pi x^2}$ décroît beaucoup plus vite à l'infini que $x \longmapsto \frac{1}{1+x^2}$.

(2) Avec $c > 0$ fixé, la fonction :

$$f(z) \;:=\; \frac{1}{\pi}\,\frac{c}{c^2+z^2},$$

qui a deux pôles simples en $z = \pm ic$, appartient à $\mathfrak{F}_a$ pour tout $0 < a < c$, car :

$$\begin{aligned} \big|f(z)\big| \;=\; \frac{c}{\pi}\left|\frac{1}{c^2+x^2+2ixy-y^2}\right| \;\leqslant\; \frac{c}{\pi}\,\frac{1}{c^2+x^2-y^2} &\;\leqslant\; \frac{c}{\pi}\,\frac{1}{x^2+c^2-a^2} \\ \text{[Exercice]} \qquad\qquad &\;\leqslant\; \frac{\mathrm{C}}{1+x^2}. \end{aligned}$$

(3) Un dernier exemple est fourni par la fonction :

$$f(z) \;:=\; \frac{1}{\mathsf{cosh}\,\pi z}.$$

Nous affirmons que $\frac{1}{\mathsf{cosh}\,\pi z}$ appartient à $\mathfrak{F}_a$ pour tout $0 < a < \frac{1}{2}$.

En effet, en utilisant $\frac{1}{|\alpha+\beta|} = \frac{|\overline{\alpha}+\overline{\beta}|}{(\alpha+\beta)(\overline{\alpha}+\overline{\beta})}$, estimons :

$$\begin{aligned} \frac{2}{e^{\pi z}+e^{-\pi z}} \;=\; \frac{2}{\big|e^{\pi x+i\pi y}+e^{-\pi x-i\pi y}\big|} &\;=\; \frac{2\,\big|e^{\pi x-i\pi y}+e^{-\pi x+i\pi y}\big|}{\big(e^{\pi x+i\pi y}+e^{-\pi x-i\pi y}\big)\big(e^{\pi x-i\pi y}+e^{-\pi x+i\pi y}\big)} \\ &\;=\; \frac{2\,\big|e^{\pi x-i\pi y}+e^{-\pi x+i\pi y}\big|}{e^{2\pi x}+e^{2i\pi y}+e^{-2i\pi y}+e^{-2\pi x}} \\ &\;\leqslant\; \frac{2\,e^{\pi x}+2\,e^{-\pi x}}{e^{2\pi x}+2\,\mathsf{cos}\,2\pi y+e^{-2\pi x}}. \end{aligned}$$

Or, puisque l'hypothèse $|y| < a < \frac{1}{2}$ implique :

$$0 \;<\; 2\,\mathsf{cos}\,2\pi a \;\leqslant\; 2\,\mathsf{cos}\,2\pi y,$$

nous obtenons :

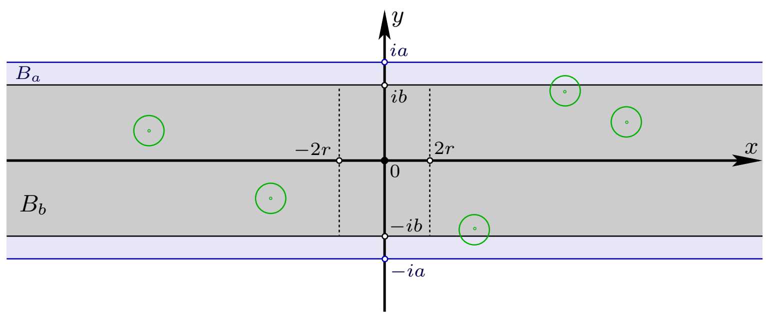
$$\left|\frac{1}{\cosh \pi z}\right| \leqslant 2\,\frac{e^{\pi x}+e^{-\pi x}}{e^{2\pi x}+2\cos 2\pi a+e^{-2\pi x}}.$$

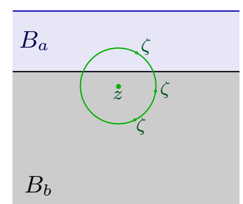
Ce majorant indépendant de $y = \mathrm{Im}\, z$ est borné, de classe $\mathscr{C}^\infty$ sur $\mathbb{R}$ comme fonction de x avec $-\infty < x < \infty$, de l'ordre $\sim \frac{2}{e^{\pi x}}$ quand $x \longrightarrow \infty$, de l'ordre $\sim \frac{2}{e^{-\pi x}}$ quand $-\infty \longleftarrow x$, donc certainement majoré par $\frac{\mathrm{C}}{1+x^2}$. Δ

Notation 2.4. On note $\mathfrak{F}$ la classe des fonctions qui appartiennent à une $\mathfrak{F}_a$ pour au moins un $a > 0$:

$$\mathfrak{F} := \bigcup_{a>0} \mathfrak{F}_a.$$

Une application naturelle des inégalités de Cauchy montre que si $f \in \mathscr{F}_a$ pour un $a > 0$, alors quitte à passer à une sous-bande, la collection de *toutes* les dérivées de f est aussi à décroissance modérée uniforme.





Proposition 2.5. *Si $f \in \mathfrak{F}_a$ pour un $a > 0$, alors pour tout $0 < b < a$ et pour tout $n \in \mathbb{N}$:*

$$f^{(n)} \in \mathfrak{F}_b.$$

Démonstration. Fixons un rayon $0 < r < a - b$, éventuellement très proche de $b - a$. Pour tout $z \in B_b$ dans la sous-bande, donc avec $|\mathrm{Im}\, z| < b$, le disque fermé $\overline{\mathbb{D}}_r \subset B_a$ est contenu dans la bande originale — de quel film ?

Tout d'abord, il est clair, puisque $f^{(n)} \in \mathscr{O}(B_a)$ est continue, que l'on a :

$$\big|f^{(n)}(z)\big| \leqslant \mathrm{C}_1 < \infty \qquad \text{sur le compact} \qquad \big\{|x| \leqslant 2r,\ |y| \leqslant b\big\}.$$

Enuite, une formule connue due à Cauchy exprime la dérivé n-ième par une intégrale :

$$f^{(n)}(z) = \frac{n!}{2i\pi} \int_{|\zeta - z| = r} \frac{f(\zeta)}{(\zeta - z)^{n+1}}\, d\zeta,$$

d'où découle une *inégalité de Cauchy :*

$$\big|f^{(n)}(z)\big| \leqslant \frac{n!}{2\pi} \max_{|\zeta - z| = r} \frac{|f(\zeta)|}{r^{n+1}}\, 2\pi r.$$

Mais par hypothèse, on a :

$$\big|f(\zeta)\big| \leqslant \frac{\mathrm{C}}{1 + (\mathrm{Re}\, \zeta)^2}.$$

Or $\zeta = z + r\, e^{i\theta}$ donne $\mathrm{Re}\, \zeta - r \leqslant \mathrm{Re}\, z \leqslant \mathrm{Re}\, \zeta + r$, pour tout $\theta \in \mathbb{R}$, d'où :

$$|\mathrm{Re}\, \zeta| \geqslant |\mathrm{Re}\, z| - r.$$

En supposant $|\mathrm{Re}\,z| > 2r$ en-dehors du compact ci-dessus, nous avons :

$$\big|f(\zeta)\big| \leqslant \frac{\mathrm{C}}{1+(|\mathrm{Re} z|-r)^2} \leqslant \frac{\mathrm{C}'}{1+(\mathrm{Re}\,z)^2},$$

avec une nouvelle constante $\mathrm{C}' < \infty$ (exercice), donc toujours pour $|x| = |\mathrm{Re}\,z| > 2r$:

$$\big|f^{(n)}(z)\big| \leqslant \frac{n!}{r^n}\,\frac{\mathrm{C}'}{1+x^2} =: \frac{\mathrm{C}_2}{1+x^2}.$$

En conclusion, nous obtenons bien l'inégalité de décroissance modérée uniforme pour $z \in B_b$:

$$\big|f^{(n)}(z)\big| \leqslant \frac{\max\left(\mathrm{C}_1, \mathrm{C}_2\right)}{1+x^2}. \qquad \square$$

3. Décroissance exponentielle de la transformée de Fourier, et inversion

Dans cette section, nous commençons à démontrer des théorèmes au sujet de fonctions holomorphes définies dans des bandes horizontales, qui sont à décroissance modérée uniforme.

L'idée-clé derrière toutes les démonstrations, y compris celles qui vont suivre dans des sections ultérieures, c'est de passer au champ complexe, et d'effectuer des intégrations sur des contours bordant des domaines de Jordan 2-dimensionnels appropriés. Ainsi, cette (nouvelle) approche de la transformation de Fourier va nous dévoiler des propriétés qui demeuraient insoupçonnables lorsqu'on se cantonnait à intégrer $\int_{-\infty}^{\infty}(\bullet)\,dx$ seulement sur la droite réelle.

La première manifestation de cette idée-clé est un phénomène de décroissance exponentielle de la transformée de Fourier :

$$\widehat{f}(\xi) = \int_{-\infty}^{\infty} f(x)\, e^{-2i\pi x\xi}\, dx \qquad\qquad (\xi \in \mathbb{R}).$$

Théorème 3.1. *Si une fonction f appartient à la classe $\mathfrak{F}_a$ pour un certain $a > 0$, alors pour tout $0 \leqslant b < a$, il existe une constante $\mathrm{C}' < \infty$ telle que :*

$$\big|\widehat{f}(\xi)\big| \leqslant \mathrm{C}'\, e^{-2\pi b|\xi|}.$$

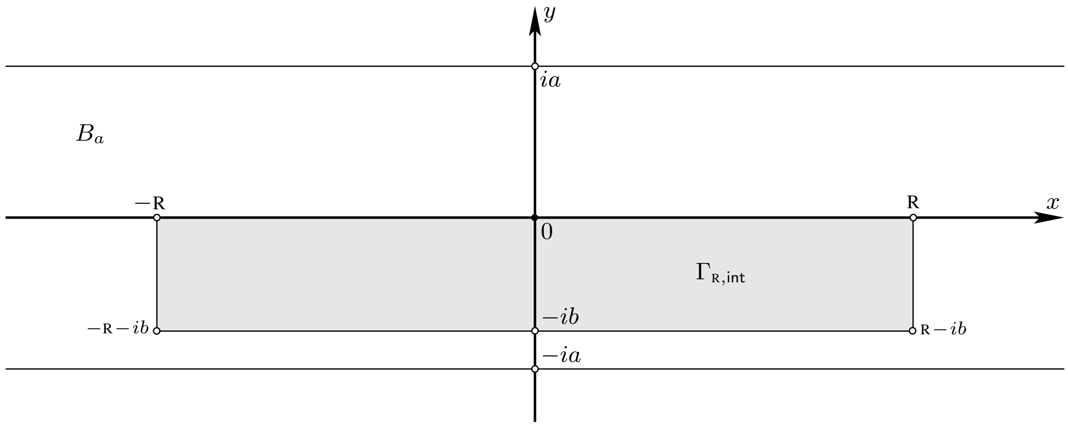
En partant de $|f(z)| \leqslant \frac{\mathrm{C}}{1+x^2}$ dans B_a, on trouvera $\mathrm{C}' = \mathrm{C}\,\pi$.

Démonstration. Le cas $b = 0$ dit seulement que $\widehat{f}$ est bornée, ce que le cours d'*Analyse de Fourier* avait déjà montré, comme suit :

$$\big|\widehat{f}(\xi)\big| \leqslant \int_{-\infty}^{\infty} \big|f(x)\,e^{-2i\pi\xi x}\big|\,dx = \int_{-\infty}^{\infty} |f(x)|\,dx \leqslant \int_{-\infty}^{\infty} \frac{\mathrm{C}}{1+x^2}\,dx = \mathrm{C}\,\pi < \infty.$$

Supposons donc $0 < b < a$. Montrons d'abord l'estimée dans le cas $\xi \geqslant 0$.

L'idée principale consiste à descendre/abaisser le contour d'intégration, c'est-à-dire la droite réelle $]-\infty, \infty[$, d'une hauteur $-b < 0$.



Plus précisément, avec $\mathrm{R} \gg 1$ qui tendra vers ∞, considérons le contour rectangulaire Γ_{R}, de sommets $-\mathrm{R} - ib$, $\mathrm{R} - ib$, R, $-\mathrm{R}$, orienté positivement, et introduisons la fonction :

$$g(z) \,:=\, f(z)\, e^{-2i\pi z\xi}.$$

Estimons son intégrale sur le segment vertical droit :

$$\begin{aligned}
\bigg| - \int_{-\mathrm{R}-ib}^{\mathrm{R}} g(z)\, dz \bigg| \,&=\, \bigg| \int_{-b}^{0} f(\mathrm{R}+it)\, e^{-2i\pi(\mathrm{R}+it)\xi}\, i\, dt \bigg| \\
&\leqslant\, \max_{-b\leqslant t\leqslant 0} \big| f(\mathrm{R}+it) \big| \int_{-b}^{0} e^{-2\pi t\xi}\, dt \\
&\leqslant\, \frac{\mathrm{C}}{1+\mathrm{R}^2} \left[\frac{e^{-2\pi t\xi}}{-\,2\pi\xi} \right]_{-b}^{0} \\
&=\, \frac{\mathrm{C}}{1+\mathrm{R}^2}\, \frac{1}{2\pi\xi} \big(e^{2\pi b\xi} - 1 \big) \quad \xrightarrow[]{\ \mathrm{R}\to\infty\ } \quad 0.
\end{aligned}$$

Une estimation similaire montre (exercice) que l'intégrale de $g(z)$ sur le segment vertical gauche est aussi un $\mathrm{O}\big(\frac{1}{\mathrm{R}^2}\big)$.

La fonction $g \in \mathscr{O}(B_a)$ étant holomorphe dans un voisinage ouvert de ces contours Γ_{R} qui dépendent de R, un théorème connu de Cauchy donne :

$$0 \,=\, \int_{\Gamma_{\mathrm{R}}} g(z)\, dz.$$

En faisant $\mathrm{R} \longrightarrow \infty$, nous obtenons :

$$\widehat{f}(\xi) \,=\, \int_{-\infty}^{\infty} f(x-ib)\, e^{-2i\pi(x-ib)\xi}\, dx. \tag{3.2}$$

Cette formule alternative pour $\widehat{f}(\xi)$ permet d'atteindre la décroissance exponentielle dans le cas $\xi \geqslant 0$:

$$\begin{aligned}
\big| \widehat{f}(\xi) \big| \,&\leqslant\, \int_{-\infty}^{\infty} \big| f(x-ib) \big|\, e^{-2\pi b\xi}\, dx \\
&\leqslant\, \int_{-\infty}^{\infty} \frac{\mathrm{C}}{1+x^2}\, dx \cdot e^{-2\pi b\xi} \\
&=\, \mathrm{C}\, \pi\, e^{-2\pi b\xi}.
\end{aligned}$$

Une argumentation similaire existe lorsque $\xi \geqslant 0$, cette fois-ci en décalant la droite réelle vers le haut d'une hauteur $b > 0$. Ceci termine la démonstration. □

Ce résultat exprime que toute $f \in \mathfrak{F}$ a une transformée de Fourier $\widehat{f}$ qui décroît très rapidement à l'infini. Faisons remarquer que, plus on peut prolonger holomorphiquement f dans de bandes grandes, c'est-à-dire plus on peut augmenter $a > 0$, donc aussi $b < a$, plus la rapidité de décroissance du majorant $e^{-2\pi b|\xi|}$ augmente. Nous reviendrons sur cet ordre d'idées dans la Section **5**, où nous décrirons toutes les fonctions $f \colon \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{C}$ dont la transformée de Fourier $\widehat{f}$ jouit de la décroissance rapide maximale et ultime, à savoir, $\widehat{f}$ est à support compact.

Puisque nous savons maintenant que $\widehat{f}$ décroît exponentiellement rapidement, l'intégrale $\int_{-\infty}^{\infty} \widehat{f}(\xi)\, e^{2i\pi x\xi}\, d\xi$ qui définit la transformée de Fourier inverse a du sens. Nous pouvons établir la formule d'inversion de Fourier, déjà vue dans un cours d'*Analyse de Fourier* avec des méthodes purement réelles.

Théorème 3.3. [Inversion de Fourier] *Si $f \in \mathfrak{F} = \bigcup_{a>0} \mathfrak{F}_a$, alors :*

$$f(x) \,=\, \int_{-\infty}^{\infty} \widehat{f}(\xi)\, e^{2i\pi x\xi}\, d\xi.$$

Démonstration. Outre une intégration le long d'un contour dans le champ complexe, la preuve requiert la valeur d'une intégrale définie élémentaire.

Lemme 3.4. *Si $\mathrm{A} > 0$ et si $\mathrm{B} \in \mathbb{R}$, alors :*

$$\int_0^{\infty} e^{-(\mathrm{A}+i\mathrm{B})\,\xi}\, d\xi \,=\, \frac{1}{\mathrm{A}+i\mathrm{B}}.$$

Preuve. Puisque $\left|e^{-(\mathrm{A}+i\mathrm{B})\,\xi}\right| = e^{-\mathrm{A}\,\xi}$, l'intégrale converge. Elle vaut effectivement :

$$\begin{aligned}
\int_0^{\infty} e^{-(\mathrm{A}+i\mathrm{B})\,\xi}\, d\xi &= \lim_{\mathrm{R}\to\infty} \int_0^{\mathrm{R}} e^{-(\mathrm{A}+i\mathrm{B})\,\xi}\, d\xi \\
&= \lim_{\mathrm{R}\to\infty} \left[\frac{e^{-(\mathrm{A}+i\mathrm{B})\,\xi}}{-\mathrm{A}-i\mathrm{B}}\right]_0^{\mathrm{R}} \\
&= \lim_{\mathrm{R}\to\infty} \left(-\,\frac{e^{-(\mathrm{A}+i\mathrm{B})\,\mathrm{R}}}{\mathrm{A}+i\mathrm{B}} + \frac{1}{\mathrm{A}+i\mathrm{B}}\right) \,=\, -0 + \frac{1}{\mathrm{A}+i\mathrm{B}}.
\end{aligned}$$ □

Nous pouvons commencer la preuve de la formule d'inversion de Fourier. À nouveau, le signe de ξ va intervenir, donc décomposons :

$$\int_{-\infty}^{\infty} \widehat{f}(\xi)\, e^{2i\pi x\xi}\, d\xi \,=\, \int_{-\infty}^{0} \widehat{f}(\xi)\, e^{2i\pi x\xi}\, d\xi + \int_0^{\infty} \widehat{f}(\xi)\, e^{2i\pi x\xi}\, d\xi.$$

Pour la seconde intégrale, argumentons comme suit. Soit $f \in \mathfrak{F}_a$, avec $a > 0$, et soit $0 < b < a$. En raisonnant comme dans la démonstration du Théorème 3.1, *voir* notamment (3.2), nous obtenons :

$$\widehat{f}(\xi) \,=\, \int_{-\infty}^{\infty} f(u - ib)\, e^{-2i\pi(u-ib)\xi}\, du.$$

Grâce à la convergence de l'intégration par rapport à ξ qui garantit l'applicabilité du théorème de Fubini, calculons :

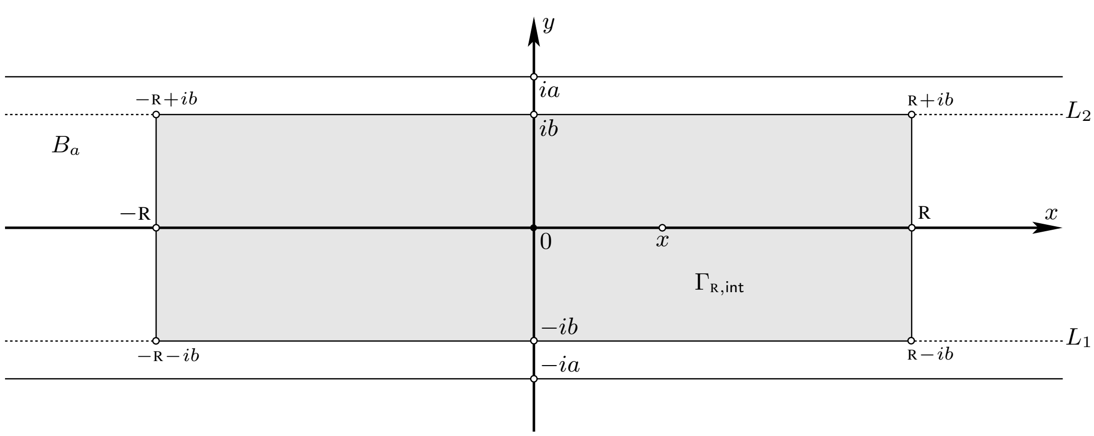
$$\begin{aligned}
\int_0^{\infty} \widehat{f}(\xi)\, e^{2i\pi x\xi}\, d\xi &= \int_0^{\infty}\int_{-\infty}^{\infty} f(u-ib)\, e^{-2i\pi(u-ib)\xi}\, e^{2i\pi x\xi}\, du\, d\xi \\
&= \int_{-\infty}^{\infty} f(u-ib) \int_0^{\infty} e^{-2\pi b-2i\pi(u-x)}\, d\xi\, du \\
\text{[Lemme 3.4]} \qquad &= \int_{-\infty}^{\infty} f(u-ib)\, \frac{1}{2\pi b+2i\pi(u-x)}\, du \\
&= \frac{1}{2i\pi}\int_{-\infty}^{\infty} \frac{f(u-ib)}{u-ib-x}\, du \\
&=: \frac{1}{2i\pi}\int_{L_1} \frac{f(\zeta)}{\zeta-x}\, d\zeta,
\end{aligned}$$

où L_1 désigne la droite $\{u-ib\colon\ u\in\mathbb{R}\}$, parcourue de la gauche vers la droite, c'est-à-dire que L_1 est l'axe réel $\mathbb{R}\times\{0\}\subset\mathbb{C}$ descendu de la hauteur $-b<0$.

Pour ce qui est de l'intégrale portant sur $\xi<0$, un calcul similaire conduit (exercice) à :

$$\int_{-\infty}^{0} \widehat{f}(\xi)\, e^{2i\pi x\xi}\, d\xi = -\frac{1}{2i\pi}\int_{L_2} \frac{f(\zeta)}{\zeta-x}\, d\zeta,$$

où L_2 est l'axe réel surelevé de la hauteur $b>0$, et orienté lui aussi de la gauche vers la droite.



Ensuite, soit $x\in\mathbb{R}$ quelconque, et pour $\text{R}>|x|$ avec $\text{R}\gg 1$ qui tendra vers l'infini, considérons le contour représenté sur la figure.

Puisque la fonction $\frac{f(\zeta)}{\zeta-x}$ a un unique pôle simple de résidu $f(x)$ en le point $\zeta=x$, le théorème des résidus donne :

$$f(x) = \frac{1}{2i\pi}\int_{\Gamma_{\text{R}}} \frac{f(\zeta)}{\zeta-x}\, d\zeta.$$

Si nous laissons s'évader $\text{R}\longrightarrow\infty$, le lecteur scrupuleux pourra vérifier (exercice) que les intégrales sur les deux segments verticaux du rectangle tendent toutes deux vers 0.

À la limite, il ne reste plus que deux intégrales horizontales, et nous pouvons conclure que :

$$\begin{aligned} f(x) &= \frac{1}{2i\pi}\int_{L_1}\frac{f(\zeta)}{\zeta-x}\,d\zeta-\frac{1}{2i\pi}\int_{L_2}\frac{f(\zeta)}{\zeta-x}\,d\zeta \\ &= \int_0^\infty \widehat{f}(\xi)\,e^{2i\pi x\xi}\,d\xi+\int_{-\infty}^0 \widehat{f}(\xi)\,e^{2i\pi x\xi}\,d\xi \\ &= \int_{-\infty}^\infty \widehat{f}(\xi)\,e^{2i\pi x\xi}\,d\xi. \end{aligned}$$

□

4. Formule sommatoire de Poisson : Approche holomorphe

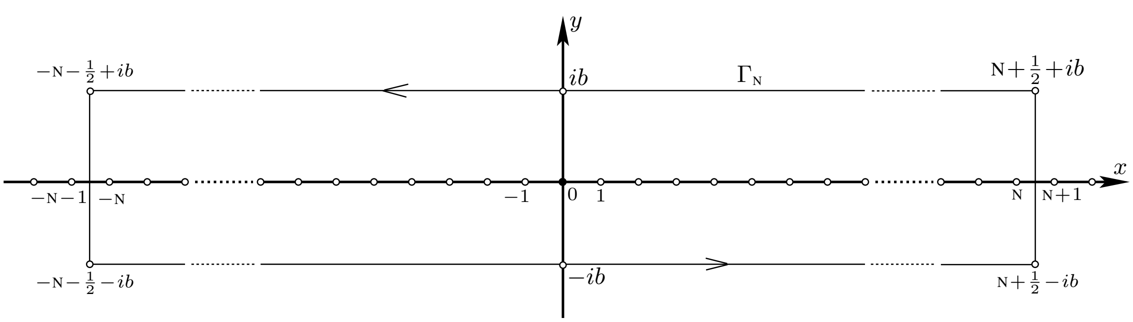
Le prochain résultat est une formule sommatoire due à Poisson, que l'on peut aussi démontrer dans un cours d'*Analyse de Fourier* avec des méthodes purement réelles.

Théorème 4.1. *Si $f \in \mathfrak{F}$ est holomorphe dans une bande autour de l'axe réel et est à décroissance modérée uniforme, alors :*

$$\sum_{n=-\infty}^{\infty} f(n) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} \widehat{f}(n).$$

Notons que la première série converge grâce à la décroissance modérée, et que la seconde converge aussi grâce au Théorème 3.1.

Démonstration. Soit donc $f \in \mathfrak{F}_a$ avec $a > 0$, et choisissons un réel b avec $0 < b < a$. La fonction 1-périodique $1\big/(e^{2i\pi z}-1)$ a des pôles simples en tous les entiers $n \in \mathbb{Z}$, avec des résidus tous égaux au résidu en $z = n = 0$, qui vaut $1\big/2i\pi$. Donc la fonction $f(z)\big/(e^{2i\pi z}-1)$ a des pôles simples aux entiers $n \in \mathbb{Z}$, avec des résidus égaux à $f(n)\big/2i\pi$.



Nous pouvons donc appliquer le théorème des résidus au contour rectangulaire Γ_{N} de sommets $-\mathrm{N}-\frac{1}{2}-ib$, $\mathrm{N}+\frac{1}{2}-ib$, $\mathrm{N}+\frac{1}{2}+ib$, $-\mathrm{N}-\frac{1}{2}+ib$, où $\mathrm{N} \geqslant 0$ est un entier quelconque. Ceci nous donne :

$$\sum_{-\mathrm{N}\leqslant n\leqslant \mathrm{N}} f(n) = \int_{\Gamma_{\mathrm{N}}} \frac{f(z)}{e^{2i\pi z}-1}\,dz.$$

En laissant tendre $\mathrm{N} \longrightarrow \infty$, et en nous souvenant que f est à décroissante modérée, la somme à gauche converge vers $\sum_{n\in\mathbb{Z}} f(n)$.

De plus, à nouveau grâce à la décroissance modérée (uniforme), on peut se convaincre (exercice) que les deux intégrales sur les deux segments verticaux tendent vers 0 lorsque

$\mathrm{N} \longrightarrow \infty$. Par conséquent, à la limite, il reste :

$$\sum_{n\in\mathbb{Z}} f(n) \,=\, \int_{L_1} \frac{f(z)}{e^{2i\pi z}-1}\,dz - \int_{L_2} \frac{f(z)}{e^{2i\pi z}-1}\,dz, \tag{4.2}$$

où $L_1 = \mathbb{R} - i\,b$ et $L_2 = \mathbb{R} + i\,b$ sont deux droites horizontales obtenues en décalant $\mathbb{R} \subset \mathbb{C}$ d'une hauteur $-b$ vers le bas, et $+b$ vers le haut, respectivement.

Maintenant, utilisons le fait que pour $|w| > 1$, on a :

$$\frac{1}{w-1} \,=\, w^{-1}\sum_{n=0}^{\infty} w^{-n},$$

pour développer sur L_1, où $|e^{2i\pi z}| = e^{2\pi b} > 1$, en série entière normalement convergente :

$$\frac{1}{e^{2i\pi z}-1} \,=\, e^{-2i\pi z}\sum_{n=0}^{\infty} e^{-2i\pi n z}.$$

De même, puisque pour $|w| < 1$, on a :

$$\frac{1}{w-1} \,=\, -\sum_{n=0}^{\infty} w^{n},$$

nous pouvons développer sur L_2 où $|e^{2i\pi z}| = e^{-2\pi b} < 1$:

$$\frac{1}{e^{2i\pi z}-1} \,=\, -\sum_{n=0}^{\infty} e^{2i\pi n z}.$$

Maintenant, en substituant ces développements dans (4.2), nous trouvons :

$$\begin{aligned}
\sum_{n\in\mathbb{Z}} f(n) \,&=\, \int_{L_1} f(z)\left(e^{-2i\pi z}\sum_{n=0}^{\infty} e^{-2i\pi n z}\right)dz + \int_{L_2} f(z)\left(\sum_{n=0}^{\infty} e^{2i\pi n z}\right)dz \\
&= \sum_{n=0}^{\infty}\int_{L_1} f(z)\,e^{-2i\pi(n+1)z}\,dz + \sum_{n=0}^{\infty}\int_{L_2} f(z)\,e^{2i\pi n z}\,dz.
\end{aligned}$$

Enfin, en re-déplaçant les droites L_1 et L_2 vers la droite réelle centrale $\mathbb{R} \subset \mathbb{C}$ grâce à (3.2), nous atteignons la conclusion :

$$\begin{aligned}
\sum_{n\in\mathbb{Z}} f(n) \,&=\, \sum_{n=0}^{\infty}\int_{-\infty}^{\infty} f(x)\,e^{-2i\pi(n+1)x}\,dx + \sum_{n=0}^{\infty}\int_{-\infty}^{\infty} f(x)\,e^{2i\pi n x}\,dx \\
&= \sum_{n=0}^{\infty}\widehat{f}(n+1) + \sum_{n=0}^{\infty}\widehat{f}(-n) \\
&= \sum_{n\in\mathbb{Z}}\widehat{f}(n).
\end{aligned}$$

□

La formule sommatoire de Poisson possède de nombreuses conséquences intéressantes, et nous allons maintenant en dériver quelques unes avant de terminer cette section.

Tout d'abord, souvenons-nous que la fonctions $e^{-\pi x^2}$ est un point fixe pour la transformation de Fourier :

$$\int_{-\infty}^{\infty} e^{-\pi x^2}\,e^{-2i\pi\xi x}\,dx \,=\, e^{-\pi\xi^2}.$$

Pour des paramètres réels fixés t et $a > 0$, le changement de variable $x \longmapsto t^{1/2}(x+a)$ dans cette intégrale montre que :

$$f(x) = e^{-\pi t(x+a)^2} \qquad \text{a pour transformée} \qquad \widehat{f}(\xi) = \tfrac{1}{\sqrt{t}}\, e^{-\frac{\pi}{t}\xi^2}\, e^{2i\pi a\xi}.$$

Alors une application de la formule sommatoire de Poisson à ce couple $(f, \widehat{f})$ — deux fonctions qui appartiennent à $\mathfrak{F}$ — donne :

$$\sum_{n=-\infty}^{\infty} e^{-\pi t(n+a)^2} = \sum_{n=-\infty}^{\infty} \tfrac{1}{\sqrt{t}}\, e^{-\frac{\pi}{t}n^2}\, e^{2i\pi na}. \tag{4.3}$$

Cette identité possède des conséquences remarquables. Par exemple, le cas spécial $a = 0$ est une relation fonctionnelle satisfaite par la *fonction thêta* :

$$\vartheta(t) := \sum_{n=-\infty}^{\infty} e^{-\pi tn^2},$$

à savoir :

$$\vartheta(t) = \tfrac{1}{\sqrt{t}}\, \vartheta\big(\tfrac{1}{t}\big) \qquad\qquad (t>0).$$

Cette équation sera utilisée lorsque, dans un prochain chapitre, nous démontrerons une équation fonctionnelle célèbre satisfaite par la fonction $\zeta(s)$ de Riemann.

Souvenons-nous que dans le chapitre consacré au théorème des résidus, nous avons démontré que la fonction $\frac{1}{\cosh \pi x}$ est *aussi* un point fixe pour la transformation de Fourier :

$$\int_{-\infty}^{\infty} \frac{1}{\cosh \pi x}\, e^{-2i\pi\xi x}\, dx = \frac{1}{\cosh \pi\xi}.$$

Toujours avec deux paramètres $t \in \mathbb{R}$ et $a \in \mathbb{R}_+^*$, un changement de variable approprié (exercice) montre que :

$$f(x) = \frac{e^{-2i\pi ax}}{\cosh \frac{\pi}{t}x} \qquad \text{a pour transformée} \qquad \widehat{f}(\xi) = \frac{t}{\cosh \pi(\xi+a)t}.$$

Alors la formule sommatoire de Poisson donne ici :

$$\sum_{n=-\infty}^{\infty} \frac{e^{-2i\pi an}}{\cosh \frac{\pi}{t}n} = \sum_{n=-\infty}^{\infty} \frac{t}{\cosh \pi(n+a)t}.$$

5. Théorème de Paley-Wiener

Dans cette section, nous prenons un autre point de départ. Nous ne supposons pas que $f\colon \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{C}$ se prolonge holomorphiquement à une bande horizontale centrée sur l'axe réel, mais nous supposons la validité de la formule d'inversion de Fourier :

$$f(x) = \int_{-\infty}^{\infty} \widehat{f}(\xi)\, e^{2i\pi x\xi}\, d\xi \qquad \text{si} \qquad \widehat{f}(\xi) = \int_{-\infty}^{\infty} f(x)\, e^{-2i\pi\xi x}\, dx,$$

sous les *deux* hypothèses élémentaires de croissance modérée :

$$\big|f(x)\big| \leqslant \frac{\mathrm{C}}{1+x^2} \qquad \text{et} \qquad \big|\widehat{f}(\xi)\big| \leqslant \frac{\widehat{\mathrm{C}}}{1+\xi^2}.$$

Une démonstration de cette formule d'inversion sous ces hypothèses apparaît dans le cours d'*Analyse de Fourier*.

Commençons par présenter une réciproque partielle du Théorème 3.1, qui obtenait :

$$\big|\widehat{f}(\xi)\big| \leqslant \mathrm{C}'\, e^{-2\pi b|\xi|}.$$

Théorème 5.1. *Si la transformée de Fourier* $\widehat{f}$ *satisfait* $\big|\widehat{f}(\xi)\big| \leqslant \mathrm{A}\, e^{-2\pi a|\xi|}$*, pour deux constantes* $0 < a, \mathrm{A} < \infty$*, alors* $f(x)$ *est la restriction à* $\mathbb{R}$ *d'une fonction* $f(z)$ *holomorphe, pour tout* $0 < b < a$ *arbitrairement proche de* a*, dans la bande :*

$$\big\{z \in \mathbb{C} : \ |\mathsf{Im}\, z| < b\big\}.$$

Démonstration. Nous affirmons que notre fonction $f(x) = \int_{-\infty}^{\infty} \widehat{f}(\xi)\, e^{2i\pi x\xi}\, d\xi$ se prolonge holomorphiquement à la bande $\{|\mathsf{Im}\, z| < b\}$ *via* la formule :

$$f(z) := \int_{-\infty}^{\infty} \widehat{f}(\xi)\, e^{2i\pi z\xi}\, d\xi.$$

En effet, pour $z = x \in \mathbb{R}$, on retrouve $f(x)$. Ensuite, grâce à l'hypothèse principale du théorème, cette intégrale converge normalement dans la bande, car en majorant :

$$\big|e^{2i\pi z\xi}\big| = \big|e^{2i\pi(x+iy)\xi}\big| = \big|e^{-2\pi y\xi}\big| \leqslant e^{2\pi b|\xi|},$$

il vient :

$$\bigg|\int_{-\infty}^{\infty} \widehat{f}(\xi)\, e^{2i\pi z\xi}\, d\xi\bigg| \leqslant \mathrm{A} \int_{-\infty}^{\infty} e^{-2\pi(a-b)|\xi|}\, d\xi < \infty.$$

Enfin, le fait que l'intégrande $z \longmapsto \widehat{f}(\xi)\, e^{2i\pi z\xi}$ de cette formule soit holomorphe par rapport à z garantit intuitivement que $f(z)$ est holomorphe — mais nous n'intégrons pas sur un compact, donc il faut encore travailler un peu.

Pour $n \in \mathbb{N}_{\geqslant 1}$ introduisons donc la suite d'intégrales « tronquées » :

$$f_n(z) := \int_{-n}^{n} \widehat{f}(\xi)\, e^{2i\pi z\xi}\, d\xi.$$

D'après le théorème des intégrales à paramètre vu dans un chapitre qui précède, ces fonctions $f_n(z)$ sont holomorphes pour $z \in \mathbb{C}$, dans *tout* le plan complexe.

De plus, en prenant z avec $|\mathsf{Im}\, z| < b$, il vient :

$$\big|f(z) - f_n(z)\big| \leqslant \int_{|\xi|\geqslant n} \Big|\widehat{f}(\xi)\, e^{2i\pi z\xi}\Big|\, d\xi \leqslant \mathrm{A} \int_{|\xi|\geqslant n} e^{-2\pi(a-b)|\xi|}\, d\xi \xrightarrow[]{\ n\to\infty\ } 0.$$

Donc la suite $\{f_n\}_{n=1}^{\infty}$ converge uniformément dans la bande, et un théorème connu dû à Cauchy assure que la limite f est bien holomorphe dans cette bande. □

Observons qu'en faisant tendre $b \stackrel{<}{\longrightarrow} a$, la fonction $f(z)$ est holomorphe dans la bande $\{|\mathsf{Im}\, z| < a\}$.

Une conséquence immédiate du principe des zéros isolés est le

Corollaire 5.2. *Si* $\widehat{f}(\xi) = \mathrm{O}\big(e^{-2\pi a|\xi|}\big)$ *pour un réel* $a > 0$ *et si* f *s'annule sur un sous-intervalle ouvert non vide* $I \subset \mathbb{R} \subset \mathbb{C}$*, alors* $f \equiv 0$ *dans la bande* $\{|\mathsf{Im}\, z| < a\}$. □

Le théorème de Paley-Wiener va plus loin que le Théorème 5.1 qui précède, car il décrit précisément les fonctions dont la transformée de Fourier est à support dans un intervalle compact (symétrique) $[-\mathrm{M}, \mathrm{M}]$. Les fonctions $\widehat{f}(\xi)$ qui deviennent identiquement nulles lorsque $|\xi| \gg 1$ est grand sont certainement à décroissance modérée, et d'ailleurs à décroissance maximale possible.

Théorème 5.3. [Paley-Wiener] *Soit* $f\colon \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{C}$ *une fonction continue à décroissance modérée,* i.e. $|f(x)| \leqslant \frac{\mathrm{C}}{1+x^2}$, *et soit* $\widehat{f}(\xi) = \int_{-\infty}^{\infty} f(x)\, e^{-2i\pi\xi x}\, dx$ *sa transformée de Fourier. Alors on a équivalence entre :*

$$\mathsf{supp}\, \widehat{f} \subset [-\mathrm{M}, \mathrm{M}] \qquad\Longleftrightarrow\qquad \begin{cases} f \in \mathscr{O}(\mathbb{C}) \text{ se prolonge holomorphiquement à } \mathbb{C} \\ \text{et satisfait } |f(z)| \leqslant \mathsf{constante} \cdot e^{2\pi \mathrm{M}|z|}. \end{cases}$$

Démonstration. L'implication $\Longrightarrow$ est simple. Supposons en effet que $\widehat{f}$ est à support dans $[-\mathrm{M}, \mathrm{M}]$, donc trivialement à décroissance modérée. Ainsi, la formule d'inversion de Fourier s'applique et donne :

$$f(x) = \int_{-\mathrm{M}}^{\mathrm{M}} \widehat{f}(\xi)\, e^{2i\pi x\xi}\, d\xi.$$

Mais comme on intègre sur un compact, nous pouvons remplacer x par la variable complexe $z \in \mathbb{C}$ pour introduire la fonction :

$$f(z) := \int_{-\mathrm{M}}^{\mathrm{M}} \widehat{f}(\xi)\, e^{2i\pi z\xi}\, d\xi.$$

Grâce au théorème des intégrales à paramètre holomorphe que nous avons utilisé il y a un instant, cette fonction est holomorphe entière, *i.e.* holomorphe dans l'ouvert maximal $\Omega = \mathbb{C}$. Évidemment, on a $f(z)|_{z=x} = f(x)$ pour $x \in \mathbb{R} \subset \mathbb{C}$.

Enfin, une majoration « simple et brutale » conclut :

$$\begin{aligned} \big|f(z)\big| &\leqslant \int_{-\mathrm{M}}^{\mathrm{M}} \big|\widehat{f}(\xi)\big|\, \big|e^{2i\pi(x+iy)\xi}\big|\, d\xi \\ &\leqslant \max_{|\xi|\leqslant \mathrm{M}} \big|\widehat{f}(\xi)\big| \cdot \int_{-\mathrm{M}}^{\mathrm{M}} e^{-2\pi y\xi}\, d\xi \\ &\leqslant \max_{|\xi|\leqslant \mathrm{M}} \big|\widehat{f}(\xi)\big| \cdot 2\,\mathrm{M} \cdot e^{2\pi\mathrm{M}|y|} \\ &\leqslant \mathsf{constante} \cdot e^{2\pi\mathrm{M}|z|}. \end{aligned}$$

La réciproque $\Longleftarrow$ requiert beaucoup plus de travail. Supposons donc que f se prolonge comme $f \in \mathscr{O}(\mathbb{C})$ et satisfait $|f(z)| \leqslant \mathrm{C}\, e^{2\pi\mathrm{M}|z|}$. D'après la troisième ligne des inégalités que nous venons de détailler ci-dessus, si $\widehat{f}$ était à support dans $[-\mathrm{M}, \mathrm{M}]$, la borne plus forte $|f(z)| \leqslant \mathrm{C}\, e^{2\pi\mathrm{M}|y|}$ serait satisfaite. Comme précédemment, la lettre C désigne une constante modifiable.

Pour établir la réciproque $\Longleftarrow$, l'idée va être d'essayer de se ramener à une meilleure situation où cette borne plus forte serait satisfaite. Toutefois, cela n'est vraiment pas suffisant, car nous aurons besoin aussi d'une décroissance modérée lorsque $|x| \longrightarrow \infty$, afin d'assurer la convergence des intégrales considérées.

C'est pour cette raison que nous allons commencer par faire des hypothèses supplémentaires, pour ensuite les supprimer pas à pas.

Étape 1. Supposons que $f \in \mathscr{O}(\mathbb{C})$ satisfait la condition suivante concernant la décroissance modérée en x et la croissance en y :

$$\big|f(x+iy)\big| \leqslant \frac{\mathrm{C}}{1+x^2}\, e^{2\pi\mathrm{M}|y|}. \tag{5.4}$$

L'objectif est de montrer que $\widehat{f}(\xi) = 0$ lorsque $|\xi| > \mathrm{M}$. En fait, l'argument se décompose en deux parties :

$$\Big(\big|f(x+iy)\big| \leqslant \tfrac{\mathrm{C}}{1+x^2}\, e^{-2\pi \mathrm{M} y} \quad {\scriptstyle \forall\, y \leqslant 0}\Big) \qquad \Longrightarrow \qquad \Big(\widehat{f}(\xi) \,=\, 0 \quad \text{pour } \xi \,>\, \mathrm{M}\Big),$$

$$\Big(\big|f(x+iy)\big| \leqslant \tfrac{\mathrm{C}}{1+x^2}\, e^{2\pi \mathrm{M} y} \quad {\scriptstyle \forall\, y \geqslant 0}\Big) \qquad \Longrightarrow \qquad \Big(\widehat{f}(\xi) \,=\, 0 \quad \text{pour } \xi \,<\, -\mathrm{M}\Big).$$

Traitons la première implication. Supposons donc que $\xi > \mathrm{M}$ et pour $y \leqslant 0$, écrivons :

$$\begin{aligned} \widehat{f}(\xi) \;&=\; \int_{-\infty}^{\infty} f(x)\, e^{-2i\pi\xi x}\, dx \\ &=\; \int_{-\infty}^{\infty} f(x+iy)\, e^{-2i\pi\xi(x+iy)}\, dx, \end{aligned}$$

où nous avons déplacé la droite réelle $]-\infty, \infty[$ vers le bas d'une hauteur $y \leqslant 0$, en appliquant un argument déjà utilisé, *voir* (3.2). Il en découle la majoration :

$$\begin{aligned} \big|\widehat{f}(\xi)\big| \;&\leqslant\; \int_{-\infty}^{\infty} \big|f(x+iy)\big|\, e^{2\pi\xi y}\, dx \\ &\leqslant\; \mathrm{C} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{dx}{1+x^2}\; e^{-2\pi \mathrm{M} y}\, e^{2\pi\xi y} \\ &=\; \mathrm{C}\, \pi\, e^{2\pi y(\xi - \mathrm{M})}. \end{aligned}$$

Comme $\xi - \mathrm{M} > 0$, en laissant s'échapper $y \longrightarrow -\infty$, il vient sans effort $\widehat{f}(\xi) = 0$.

Évidemment, lorsque $\xi < -\mathrm{M}$, la deuxième implication se démontre en déplaçant la droite réelle vers le haut d'une hauteur $y \geqslant 0$.

Étape 2. Maintenant, relaxons la condition (5.4) en supposant seulement que f satisfasse :

$$\big|f(x+iy)\big| \;\leqslant\; \mathrm{C}\, e^{2\pi \mathrm{M} |y|}. \tag{5.5}$$

Cette condition est toujours plus forte que celle du Théorème 5.3, mais elle est plus faible que celle que nous venons d'utiliser. L'objectif est également de démontrer que $\widehat{f}(\xi) = 0$ lorsque $|\xi| > \mathrm{M}$. À nouveau, l'argument se décompose en deux parties :

$$\Big(\big|f(x+iy)\big| \leqslant \mathrm{C}\, e^{-2\pi \mathrm{M} y} \quad {\scriptstyle \forall\, y \leqslant 0}\Big) \qquad \Longrightarrow \qquad \Big(\widehat{f}(\xi) \,=\, 0 \quad \text{pour } \xi \,>\, \mathrm{M}\Big),$$

$$\Big(\big|f(x+iy)\big| \leqslant \mathrm{C}\, e^{2\pi \mathrm{M} y} \quad {\scriptstyle \forall\, y \geqslant 0}\Big) \qquad \Longrightarrow \qquad \Big(\widehat{f}(\xi) \,=\, 0 \quad \text{pour } \xi \,<\, -\mathrm{M}\Big).$$

Traitons la première implication. Pour $\varepsilon > 0$, introduisons à cette fin les fonctions auxiliaires :

$$f_\varepsilon(z) \;:=\; \frac{f(z)}{(1+i\varepsilon z)^2}.$$

Cette collection de fonctions nous permet de nous ramener à l'Étape 1. En effet, dans le demi-plan fermé *inférieur* $\{\mathsf{Im}\, z \leqslant 0\}$, comme $y \leqslant 0$ implique $1-\varepsilon y \geqslant 1$, on a :

$$\begin{aligned}\big|f_\varepsilon(x+iy)\big| \,=\, \frac{1}{|1-\varepsilon y+i\varepsilon x|^2}\,\big|f(z)\big| \,&=\, \frac{1}{(1-\varepsilon y)^2+(\varepsilon x)^2}\,\big|f(z)\big| \\ &\leqslant\, \frac{1}{1+\varepsilon^2x^2}\,\mathrm{C}\,e^{-2\pi \mathrm{M} y} \\ &\leqslant\, \frac{\mathrm{C}\,\varepsilon^{-2}}{1+x^2}\,e^{-2\pi\mathrm{M}y},\end{aligned}$$

avec la constante C de (5.4) remplacée par la nouvelle constante $\mathrm{C}\,\varepsilon^{-2} < \infty$. Donc la première implication de l'Étape 1 s'applique, et nous offre $\widehat{f_\varepsilon}(\xi) = 0$ pour $\xi > \mathrm{M}$. Nous voulons en déduire la même annulation pour $\widehat{f}(\xi)$, donc nous devons bien comprendre comment ce facteur $\frac{1}{(1+i\varepsilon z)^2} \underset{\varepsilon\to 0}{\longrightarrow} 1$ va devenir négligeable.

Observons que le facteur astucieux en question $1\big/(1+i\varepsilon z)^2$ est de module $\leqslant 1$ dans le demi-plan fermé inférieur $\{\mathsf{Im}\, z\leqslant 0\}$, car $1-\varepsilon y \geqslant 1$ implique :

$$\frac{1}{|1+i\varepsilon z|^2} \,=\, \frac{1}{|1-\varepsilon y+i\varepsilon x|^2} \,=\, \frac{1}{(1-\varepsilon y)^2+(\varepsilon x)^2} \,\leqslant\, 1.$$

De plus, quand $\varepsilon \longrightarrow 0$, ce facteur converge vers 1 normalement sur les compacts $K\subset\mathbb{C}$, donc en particulier sur les intervalles $[-\mathrm{R},\mathrm{R}]\subset\mathbb{R}$.

Nous affirmons alors que ces observations garantissent que $\widehat{f_\varepsilon}(\xi) \overset{\varepsilon\to 0}{\longrightarrow} \widehat{f}(\xi)$, grâce à l'inégalité :

$$\begin{aligned}\Big|\widehat{f}(\xi)-\widehat{f_\varepsilon}(\xi)\Big| \,&=\, \bigg|\int_{-\infty}^{\infty} f(x)\,\Big(1-\frac{1}{(1+i\varepsilon x)^2}\Big)\,e^{-2i\pi\xi x}\,dx\bigg| \\ &\leqslant\, \int_{-\infty}^{\infty}|f(x)|\,\Big|1-\frac{1}{(1+i\varepsilon x)^2}\Big|\,dx \quad \xrightarrow[]{\ \varepsilon\to 0\ } \quad 0,\end{aligned}$$

et grâce à l'hypothèse que $f(x) \leqslant \frac{\mathrm{C}}{1+x^2}$ — exercice de révision : découper l'intégrale comme $\int_{|x|\leqslant \mathrm{R}} + \int_{|x|>\mathrm{R}}$ et faire $\mathrm{R}\longrightarrow\infty$, ou penser au théorème de convergence dominée.

En appliquant $\lim\limits_{\varepsilon\to 0}(\bullet)$, nous en déduisons comme désiré que $\widehat{f}(\xi)=0$ pour $\xi>\mathrm{M}$.

Quant à la deuxième implication ci-dessus, elle se démontre d'une manière analogue en introduisant, pour $\varepsilon>0$, les fonctions auxiliaires :

$$f_\varepsilon(z) \,:=\, \frac{f(z)}{(1-i\varepsilon z)^2},$$

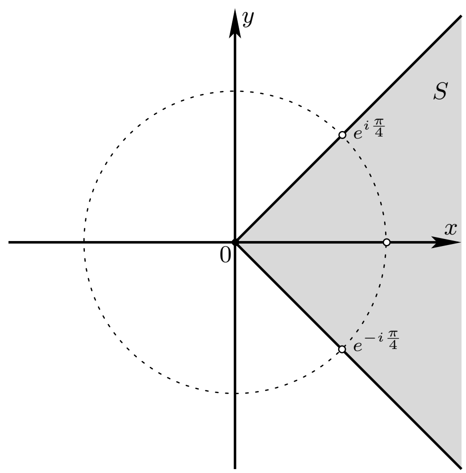
et en travaillant dans le demi-plan fermé *supérieur* $\{\mathsf{Im}\, z\geqslant 0\}$.

Étape 3. Pour terminer la démonstration, nous devons faire voir que l'hypothèse $|f(z)| \leqslant \mathrm{C}\,e^{2\pi\mathrm{M}|z|}$ du Théorème 5.3 est impliquée par la condition $|f(z)|\leqslant \mathrm{C}\,e^{2\pi\mathrm{M}|y|}$ que nous venons d'employer.

Comme la fonction f est à décroissance modérée, *i.e.* satisfait $|f(x)| \leqslant \frac{\mathrm{C}}{1+x^2}$, donc est bornée sur $\mathbb{R}$, après division par une constante appropriée, nous pouvons supposer que $|f(x)|\leqslant 1$ pour *tout* $x\in\mathbb{R}$. Nous allons alors démontrer que l'on a, *sans* constante C :

$$\left.\begin{aligned}\big|f(z)\big| &\leqslant e^{2\pi\mathrm{M}|z|} \\ |f(x)| &\leqslant 1\end{aligned}\right\} \qquad\Longrightarrow\qquad \big|f(x+iy)\big| \,\leqslant\, e^{2\pi\mathrm{M}|y|}. \tag{5.6}$$

Cette implication va découler d'un argument général ingénieux dû à Phragmén et Lindelöf, qui permet d'adapter le principe du maximum du module à certains domaines *non bornés* de $\mathbb{C}$. Une version particulière de ce résultat qui sera suffisante pour notre objectif s'énonce comme suit.



Théorème 5.7. [Phragmén-Lindelöf] *Soit F une fonction holomorphe dans le secteur angulaire :*

$$S \,:=\, \big\{z \in \mathbb{C}\colon\; -\tfrac{\pi}{4} < \mathsf{Arg}\, z < \tfrac{\pi}{4}\big\},$$

qui est continue dans l'adhérence $\overline{S} = \big\{-\frac{\pi}{4} \leqslant \mathsf{Arg}\, z \leqslant \frac{\pi}{4}\big\}$. On suppose que :

- $|F(z)| \leqslant 1$ *sur les deux demi-droites du bord* $\partial S = \big\{\mathsf{Arg}\, z = \pm\frac{\pi}{4}\big\}$ *;*
- *il existe deux constantes* $0 < c, \mathrm{C} < \infty$ *telles que* $|F(z)| \leqslant \mathrm{C}\, e^{c|z|}$ *pour tout* $z \in S$.

Alors :

$$|F(z)| \,\leqslant\, 1 \qquad\qquad (\forall\, z \in \overline{S}).$$

En d'autres termes, si F est bornée par 1 en module sur le bord de S, et si sa croissance reste raisonnable, *i.e.* d'ordre exponentiel au plus égal à 1, alors F est en fait partout bornée par 1 dans le secteur.

Mais comme le montre la fonction $F(z) := e^{z^2}$, il est nécessaire d'imposer une restriction sur la croissance de F à l'infini. En effet, cette fonction est bornée par 1 au bord, puisque pour $z = r\, e^{\pm i\frac{\pi}{4}}$ on constate que $e^{z^2} = e^{r^2 e^{\pm i\frac{\pi}{2}}} = e^{\pm i r^2}$ est de module unité, mais $F(x) = e^{x^2}$ est (vraiment) non bornée sur la demi-droite médiane $\mathbb{R}_+^* \subset S$ du secteur lorsque $x \longrightarrow \infty$.

Démonstration. L'idée est de détourner à notre avantage cette « fonction ennemie » e^{z^2}. Il s'agit de la modifier et de la remplacer par e^{z^α} avec n'importe quel $0 < \alpha < 2$. Pour fixer les idées, prenons $\alpha := \frac{3}{2}$.

Pour $\varepsilon > 0$, introduisons :

$$F_\varepsilon(z) \,:=\, F(z)\, e^{-\varepsilon\, z^{3/2}}.$$

Ici, nous avons choisi la *branche principale* de la fonction logarithme $\log z$, holomorphe dans $\mathbb{C} \backslash \mathbb{R}_-$ avec $\log x \in \mathbb{R}$ pour $x \in \mathbb{R}_+^*$, et nous avons défini $z^{3/2} := e^{\frac{3}{2}\log z}$, de telle sorte que pour $z = r\, e^{i\theta}$ avec $r > 0$ et $-\pi < \theta < \pi$, on a $z^{3/2} = r^{3/2}\, e^{3i\theta/2}$. Ainsi, F_ε est holomorphe dans le secteur S, et continue jusqu'à son bord, *i.e.* continue dans $\overline{S} = S \cup \partial S$.

De plus, on a :

$$\left|e^{-\varepsilon\, z^{3/2}}\right| = \left|e^{-\varepsilon\, r^{3/2}\left(\cos\frac{3\theta}{2}+i\sin\frac{3\theta}{2}\right)}\right| = e^{-\varepsilon\, r^{3/2}\cos\frac{3\theta}{2}}.$$

Puisque $-\frac{\pi}{4} \leqslant \theta \leqslant \frac{\pi}{4}$ dans le secteur fermé, il vient $-\frac{3\pi}{8} \leqslant \frac{3\theta}{2} \leqslant \frac{3\pi}{8}$, ce qui garantit la positivité stricte de :

$$\cos\frac{3\,\theta}{2} \geqslant \cos\frac{3\,\pi}{8} > 0.$$

Ceci, allié à l'hypothèse du théorème :

$$\left|F(r\,e^{i\theta})\right| \leqslant \mathrm{C}\,e^{c\,r},$$

implique que F_ε décroît rapidement à l'infini dans le secteur fermé $\overline{S}$ lorsque $|z| = r \longrightarrow \infty$ comme le montre l'estimation :

$$\begin{aligned}\left|F_\varepsilon(r\,e^{i\theta})\right| &= \left|F(r\,e^{i\theta})\right|\,\left|e^{-\varepsilon\, z^{3/2}}\right| \\ &\leqslant \mathrm{C}\,e^{c\,r}\,e^{-\varepsilon\, r^{3/2}\cos\frac{3\theta}{2}} \\ &\leqslant \mathrm{C}\,e^{c\,r-\varepsilon\cos\frac{3\pi}{8}\,r^{3/2}} \quad \xrightarrow{r\to\infty} \quad 0.\end{aligned}$$

En particulier, ceci implique que F_ε est bornée dans $\overline{S}$.

Assertion 5.8. *En fait,* $\left|F_\varepsilon(z)\right| \leqslant 1$ *pour tout* $z \in \overline{S}$.

Preuve. Posons :

$$\mathrm{M} := \sup_{z\in\overline{S}} \left|F_\varepsilon(z)\right|.$$

Nous pouvons supposer que $F \not\equiv 0$, donc $\mathrm{M} > 0$. Soit $\{w_j\}_{j=1}^{\infty}$ une suite de points $w_j \in \overline{S}$ telle que $|F_\varepsilon(w_j)| \underset{j\to\infty}{\longrightarrow} \mathrm{M}$.

Comme $\mathrm{M} > 0$ et comme $F_\varepsilon(z)$ tend vers 0 lorsque $|z| = r \longrightarrow \infty$, il est clair que cette suite maximisante ne peut s'évader vers l'infini dans l'ouverture du secteur. Donc cette suite $\{w_j\}_{j=1}^{\infty}$ est forcée de rester dans un compact de la forme $\overline{S} \cap \{|z| \leqslant \mathrm{R}\}$ avec $\mathrm{R} \gg 1$ assez grand. Après extraction d'une sous-suite, nous pouvons supposer la convergence :

$$w_j \underset{j\to\infty}{\longrightarrow} w_* \in \overline{S}.$$

Ce point w_* ne peut appartenir à l'intérieur connexe $S = \mathrm{Int}\,\overline{S}$, sinon, F_ε devrait être une constante à cause du principe du maximum, non nulle puisque $\mathrm{M} > 0$, ce qui contredirait l'annulation de F_ε vers l'infini. Donc ce point $w_* \in \partial S$ doit se trouver au bord.

Mais sur le bord, on a tout d'abord par hypothèse dans le théorème $\left|F|_{\partial S}\right| \leqslant 1$, puis par prestidigitation astucieuse préparée à l'avance aussi :

$$\left|e^{-\varepsilon\,(r\,e^{\pm i\frac{\pi}{4}})^{3/2}}\right| = \left|e^{-\varepsilon\, r^{3/2}\cos\pm\frac{3\pi}{8}}\right| \leqslant 1,$$

ce qui implique $\left|F_\varepsilon|_{\partial S}\right| \leqslant 1$, donc force $|F_\varepsilon(w_*)| \leqslant 1$, et donc en définitive $\mathrm{M} \leqslant 1$, exactement ce qui était asserté ! □

Pour conclure la démonstration du Théorème 5.7, il suffit de faire tendre $\varepsilon \longrightarrow 0$ dans l'inégalité $\left|F(z)\,e^{-\varepsilon\, z^{3/2}}\right| \leqslant 1$ que nous venons d'établir dans tout $\overline{S}$. □

Fin de la démonstration du Théorème 5.3. Nous pouvons maintenant montrer la dernière implication restante (5.6).

Observons que le secteur d'ouverture $\frac{\pi}{2}$ dans le Théorème 5.7 de Phragmén-Lindelöf peut être rotationné, et que le résultat demeure valable, par exemple dans le quadrant positif $Q := \{x > 0,\, y > 0\}$. Introduisons alors :

$$F(z) \,:=\, f(z)\, e^{2i\pi \mathrm{M} z}.$$

Grâce aux *deux* hypothèses (5.6), cette fonction $F(z)$ est bornée par 1 en module sur l'axe réel positif :

$$|F(x)| \,=\, \big|f(x)\, e^{2i\pi \mathrm{M} x}\big| \,=\, |f(x)| \,\leqslant\, 1 \qquad\qquad (x \geqslant 0),$$

et aussi sur l'axe imaginaire positif :

$$|F(iy)| \,=\, \big|f(iy)\, e^{-2\pi \mathrm{M} y}\big| \,=\, \big|f(iy)\, e^{-2\pi \mathrm{M} |iy|}\big| \,\leqslant\, 1 \qquad\qquad (y \geqslant 0).$$

Comme nous avons aussi dans ce quadrant le contrôle :

$$|F(z)| \,=\, \big|f(z)\, e^{2i\pi \mathrm{M} z}\big| \,\leqslant\, e^{2\pi \mathrm{M}|z|}\, e^{2\pi \mathrm{M}|z|} \,\leqslant\, \mathrm{C}\, e^{c|z|},$$

le Théorème 5.7 de Phragmén-Lindelöf s'applique et nous donne $|F(z)| \leqslant 1$ dans le quadrant fermé $\overline{Q}$, c'est-à-dire $\big|f(z)\, e^{2i\pi \mathrm{M} z}\big| \leqslant 1$, d'où pour tout $z = x + iy$ avec $x, y \geqslant 0$:

$$|f(z)| \,\leqslant\, \big|e^{-2i\pi \mathrm{M}(x+iy)}\big| \,=\, e^{2\pi \mathrm{M}|y|} \qquad\qquad (y \geqslant 0),$$

ce qui était le but de (5.6), restreint à ce quadrant.

Des arguments similaires peuvent être rédigés (exercice) pour obtenir, dans les 3 autres quadrants :

$$\{x < 0,\, y > 0\}, \qquad\qquad \{x < 0,\, y < 0\}, \qquad\qquad \{x > 0,\, y > 0\},$$

la même estimée $|f(z)| \leqslant e^{2\pi \mathrm{M}|y|}$ est satisfaite. La démonstration du Théorème 5.3 est achevée. □

Terminons ce chapitre par une autre illustration des idées analytico-géométriques qui se trouvent derrière les arguments de type Paley-Wiener. Il s'agit de caractériser les fonctions dont la transformée de Fourier est identiquement nulle pour $\xi \leqslant 0$. Soit $\mathbb{H} := \{\mathrm{Im}\, z > 0\}$ le demi-plan supérieur, d'adhérence $\overline{\mathbb{H}} = \{\mathrm{Im}\, z \geqslant 0\}$.

Théorème 5.9. *Soit $f \colon \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{C}$ une fonction continue à décroissance modérée,* i.e. $|f(x)| \leqslant \frac{\mathrm{C}}{1+x^2}$, *et soit $\widehat{f}(\xi) = \int_{-\infty}^{\infty} f(x)\, e^{-2i\pi \xi x}\, dx$ sa transformée de Fourier. On suppose que $\big|\widehat{f}(\xi)\big| \leqslant \frac{\widehat{\mathrm{C}}}{1+\xi^2}$ est aussi à décroissance modérée. Alors on a équivalence entre :*

$$\widehat{f}(\xi) \,=\, 0 \quad \forall\, \xi \,\in]-\infty, 0] \qquad \Longleftrightarrow \qquad \begin{cases} f \ \textit{se prolonge comme}\ f \,\in\, \mathscr{O}(\mathbb{H}) \cap \mathscr{C}^0(\overline{\mathbb{H}}) \\ \textit{et est borné sur}\ \overline{\mathbb{H}}. \end{cases}$$

Démonstration. Traitons l'implication $\Longrightarrow$. La formule d'inversion de Fourier devient :

$$f(x) \,=\, \int_0^\infty \widehat{f}(\xi)\, e^{2i\pi x \xi}\, d\xi.$$

Nous pouvons prolonger $f(x)$ à des $z = x + i\, y$ avec $y \geqslant 0$ *via* la formule :

$$f(z) \,:=\, \int_0^\infty \widehat{f}(\xi)\, e^{2i\pi z \xi}\, d\xi,$$

car cette intégrale converge grâce à $|e^{2i\pi(x+iy)\xi}| = e^{-2\pi y\xi} \leqslant 1$, et grâce à l'hypothèse que $\widehat{f}$ est à décroissance modérée. Les théorèmes standard du cours d'*Intégration* garantissent que $f \in \mathscr{C}^0(\overline{\mathbb{H}})$.

Pour justifier l'holomorphie, avec $n \in \mathbb{N}_{\geqslant 1}$, introduisons la suite :

$$f_n(z) := \int_0^n \widehat{f}(\xi)\, e^{2i\pi z\xi}\, d\xi.$$

Ces fonctions sont holomorphes pour $z \in \mathbb{H}$ grâce au théorème des intégrales à paramètre holomorphe sur un intervalle compact, et elles convergent uniformément vers f sur $\overline{\mathbb{H}}$, puisque :

$$\begin{aligned}\big|f(z) - f_n(z)\big| &\leqslant \int_n^\infty \big|\widehat{f}(\xi)\big|\, e^{-2\pi y\xi}\, d\xi \\ &\leqslant \int_n^\infty \frac{\widehat{\mathrm{C}}}{1+\xi^2}\, d\xi \xrightarrow[]{\,n\to\infty\,} 0.\end{aligned}$$

Un théorème connu dû à Cauchy offre alors l'holomorphie de la limite $f \in \mathscr{O}(\mathbb{H})$.

L'implication inverse $\Longleftarrow$ est plus délicate. Contentons-nous d'en résumer les idées principales. Pour $\varepsilon > 0$ et $\delta > 0$, introduisons :

$$f_{\varepsilon,\delta}(z) := \frac{f(z+i\delta)}{(1-i\varepsilon z)^2}.$$

Ces fonctions $f_{\varepsilon,\delta}$ sont toutes holomorphes dans un certain domaine $\Omega \supset \overline{\mathbb{H}}$ contenant le demi-plan supérieur fermé.

Comme dans la démonstration du Théorème 5.3 de Paley-Wiener, en utilisant le théorème de Cauchy, le lecteur pourra se convaincre que $\widehat{f_{\varepsilon,\delta}}(\xi) = 0$ pour tout $\xi \leqslant 0$.

Alors, en passant à $\lim\limits_{\delta\to 0}(\bullet)$, le lecteur déduira $\widehat{f_{\varepsilon,0}}(\xi) = 0$ pour $\xi \leqslant 0$, puis en passant à $\lim\limits_{\varepsilon\to 0}(\bullet)$, il conclura que :

$$\widehat{f}(\xi) = \widehat{f_{0,0}}(\xi) = 0 \qquad (\forall\, \xi \in]-\infty, 0]). \qquad \square$$

6. Exercices

Exercice 1. EE

Exercice 2. EE