# Systèmes linéaires homogènes

François DE MARÇAY
Département de Mathématiques d'Orsay
Université Paris-Saclay, France

## 1. Introduction

## 2. Représentation vectorielle des solutions d'un système linéaire

**Exemple 2.1.** Soit le système de $3$ équations linéaires à $4$ variables :

$$\begin{aligned} x_1 + \ 2\,x_2 + \ 3\,x_3 + \ 4\,x_4 &= \ 7, \\ 5\,x_1 + \ 6\,x_2 + \ 7\,x_3 + \ 8\,x_4 &= 11, \\ 9\,x_1 + 10\,x_2 + 11\,x_3 + 12\,x_4 &= 15, \end{aligned}$$

dont la matrice complète est :

$$\left[\begin{array}{cccc|c} 1 & 2 & 3 & 4 & 7 \\ 5 & 6 & 7 & 8 & 11 \\ 9 & 10 & 11 & 12 & 15 \end{array}\right].$$

Une application de la méthode du pivot montre (exercice) que la réduction à une forme échelonnée réduite est :

$$\left[\begin{array}{cccc|c} 1 & 2 & 3 & 4 & 7 \\ 5 & 6 & 7 & 8 & 11 \\ 9 & 10 & 11 & 12 & 15 \end{array}\right] \sim \begin{array}{c} \begin{array}{ccccc} x_1 & x_2 & x_3 & x_4 & \phantom{-5} \end{array} \\ \left[\begin{array}{cccc|c} \boxed{1} & 0 & -1 & -2 & -5 \\ 0 & \boxed{1} & 2 & 3 & 6 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right] \end{array}.$$

Ainsi, le système est compatible, les inconnues principales (résolubles) sont $x_1$ et $x_2$, tandis que les inconnues paramétriques (secondaires) sont $x_3$ et $x_4$.

Sur cette matrice mise sous forme échelonnée *réduite*, on lit directement l'espace des solutions :

$$\mathsf{Sol} \ := \ \big\{\big(-5{+}x_3{+}2\,x_4,\ 6{-}2\,x_3{-}3\,x_4,\ x_3,\ x_4\big) \colon\ x_3 \in \mathbb{R}\,\text{quelconque},\ x_4 \in \mathbb{R}\,\text{quelconque}\big\}.$$

**Question 2.2.** *Peut-on mettre cet espace de solutions sous forme de combinaison linéaire de vecteurs ?*

Réponse : oui sur cet exemple, et oui aussi pour tous les systèmes linéaires quelconques étudiés dans ce cours !

En effet, écrivons :

$$\begin{pmatrix} -5 + x_3 + 2\,x_4 \\ 6 - 2\,x_3 - 3\,x_4 \\ x_3 \\ x_4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -5 \\ 6 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} + x_3 \begin{pmatrix} 1 \\ -2 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} + x_4 \begin{pmatrix} 2 \\ -3 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}.$$

Si donc nous introduisons les vecteurs-colonnes appartenant à $\overrightarrow{V}_{\mathbb{R}^4}$ :

$$\vec{x}_0 := \begin{pmatrix} -5 \\ 6 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \qquad \vec{v}_1 := \begin{pmatrix} 1 \\ -2 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \qquad \vec{v}_2 := \begin{pmatrix} 2 \\ -3 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix},$$

les solutions générales du système sont les vecteurs de la forme :

$$\vec{x}_0 + t_1\,\vec{v}_1 + t_2\,\vec{v}_2,$$

avec $t_1 \in \mathbb{R}$ et $t_2 \in \mathbb{R}$ quelconques, qui sont des noms nouveaux pour $x_3$ et $x_4$.

Ce phénomène est général. Rappelons qu'un système linéaire de $m$ équations linéaires à $n$ inconnues $x_1, \ldots, x_n$ est *compatible* si et seulement si, après application de la méthode du pivot, la dernière ligne d'une forme échelonnée (réduite ou non) n'est *pas* :

$$\big[\mathbf{0}\ \mathbf{0}\ \cdots\ \mathbf{0} \mid \blacksquare\big],$$

avec un nombre réel non nul $\blacksquare \in \mathbb{R}\backslash\{0\}$, car en effet, s'il existait une telle ligne qui signifierait :

$$\mathbf{0}\,x_1 + \cdots + \mathbf{0}\,x_n = \blacksquare,$$

on en déduirait $\mathbf{0} = \text{nonzero}$, ce qui est impossible, donc le système serait incompatible.

Par conséquent, après mise sous forme échelonnée, tout système qui possède *au moins une* solution est de la forme :

$$\begin{array}{ccccccccccccc|c}
\mathbf{0} & \mathbf{0} & \blacksquare & * & * & * & * & * & * & * & * & * & & * \\
\mathbf{0} & \mathbf{0} & \mathbf{0} & \blacksquare & * & * & * & * & * & * & * & * & & * \\
\mathbf{0} & \mathbf{0} & \mathbf{0} & \mathbf{0} & \mathbf{0} & \blacksquare & * & * & * & * & * & * & & * \\
\mathbf{0} & \mathbf{0} & \mathbf{0} & \mathbf{0} & \mathbf{0} & \mathbf{0} & \blacksquare & * & * & * & * & * & & * \\
\mathbf{0} & \mathbf{0} & \mathbf{0} & \mathbf{0} & \mathbf{0} & \mathbf{0} & \mathbf{0} & \mathbf{0} & \mathbf{0} & \mathbf{0} & \blacksquare & * & & * \\
\mathbf{0} & \mathbf{0} & \mathbf{0} & \mathbf{0} & \mathbf{0} & \mathbf{0} & \mathbf{0} & \mathbf{0} & \mathbf{0} & \mathbf{0} & \mathbf{0} & \mathbf{0} & & \mathbf{0} \\
\vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots \\
\mathbf{0} & \mathbf{0} & \mathbf{0} & \mathbf{0} & \mathbf{0} & \mathbf{0} & \mathbf{0} & \mathbf{0} & \mathbf{0} & \mathbf{0} & \mathbf{0} & \mathbf{0} & & \mathbf{0}.
\end{array}$$

**Dernière ligne non nulle compatible !**

Évidemment, on s'empresse de supprimer les lignes nulles, puisqu'elles se réduisent à la tautologie $\mathbf{0} = \mathbf{0}$. Ensuite, on poursuit la méthode des pivots-saumons remonteurs de rivières glaciaires afin de parvenir à la forme échelonnée *réduite* (unique) :

$$\begin{array}{cccccccccccc|c}
x_1 & x_2 & x_3 & x_4 & x_5 & x_6 & x_7 & x_8 & x_9 & x_{10} & x_{11} & x_{12} & \\
\mathbf{0} & \mathbf{0} & \mathbf{1} & \mathbf{0} & * & \mathbf{0} & \mathbf{0} & * & * & * & \mathbf{0} & * & * \\
\mathbf{0} & \mathbf{0} & \mathbf{0} & \mathbf{1} & * & \mathbf{0} & \mathbf{0} & * & * & * & \mathbf{0} & * & * \\
\mathbf{0} & \mathbf{0} & \mathbf{0} & \mathbf{0} & \mathbf{0} & \mathbf{1} & \mathbf{0} & * & * & * & \mathbf{0} & * & * \\
\mathbf{0} & \mathbf{0} & \mathbf{0} & \mathbf{0} & \mathbf{0} & \mathbf{0} & \mathbf{1} & * & * & * & \mathbf{0} & * & * \\
\mathbf{0} & \mathbf{0} & \mathbf{0} & \mathbf{0} & \mathbf{0} & \mathbf{0} & \mathbf{0} & \mathbf{0} & \mathbf{0} & \mathbf{0} & \mathbf{1} & * & *
\end{array}$$

Ici, on illustre la méthode avec $n = 12$ inconnues $x_1$, $x_2$, $x_3$, $x_4$, $x_5$, $x_6$, $x_7$, $x_8$, $x_9$, $x_{10}$, $x_{11}$, $x_{12}$.

Donnons des noms aux étoiles :

$$\begin{array}{cccccccccccc|c}
\mathbf{0} & \mathbf{0} & \mathbf{1} & \mathbf{0} & c_{1,5} & \mathbf{0} & \mathbf{0} & c_{1,8} & c_{1,9} & c_{1,10} & \mathbf{0} & c_{1,12} & d_1 \\
\mathbf{0} & \mathbf{0} & \mathbf{0} & \mathbf{1} & c_{2,5} & \mathbf{0} & \mathbf{0} & c_{2,8} & c_{2,9} & c_{2,10} & \mathbf{0} & c_{2,12} & d_2 \\
\mathbf{0} & \mathbf{0} & \mathbf{0} & \mathbf{0} & \mathbf{0} & \mathbf{1} & \mathbf{0} & c_{3,8} & c_{3,9} & c_{3,10} & \mathbf{0} & c_{3,12} & d_3 \\
\mathbf{0} & \mathbf{0} & \mathbf{0} & \mathbf{0} & \mathbf{0} & \mathbf{0} & \mathbf{1} & c_{4,8} & c_{4,9} & c_{4,10} & \mathbf{0} & c_{4,12} & d_4 \\
\mathbf{0} & \mathbf{0} & \mathbf{0} & \mathbf{0} & \mathbf{0} & \mathbf{0} & \mathbf{0} & \mathbf{0} & \mathbf{0} & \mathbf{0} & \mathbf{1} & c_{5,12} & d_5,
\end{array}$$

et résolvons les 5 inconnues principales $x_3$, $x_4$, $x_6$, $x_7$, $x_{11}$ :

$$\begin{aligned}
x_3 &= d_1 - c_{1,5}\,x_5 - c_{1,8}\,x_8 - c_{1,9}\,x_9 - c_{1,10}\,x_{10} - c_{1,12}\,x_{12}, \\
x_4 &= d_2 - c_{2,5}\,x_5 - c_{2,8}\,x_8 - c_{2,9}\,x_9 - c_{2,10}\,x_{10} - c_{2,12}\,x_{12}, \\
x_6 &= d_3 \qquad\qquad - c_{3,8}\,x_8 - c_{3,9}\,x_9 - c_{3,10}\,x_{10} - c_{3,12}\,x_{12}, \\
x_7 &= d_4 \qquad\qquad - c_{4,8}\,x_8 - c_{4,9}\,x_9 - c_{4,10}\,x_{10} - c_{4,12}\,x_{12}, \\
x_{11} &= d_5 \qquad\qquad\qquad\qquad\qquad\qquad\qquad\qquad - c_{5,12}\,x_{12}.
\end{aligned}$$

Ensuite, écrivons le vecteur solution générale à 12 composantes :

$$\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \\ x_5 \\ x_6 \\ x_7 \\ x_8 \\ x_9 \\ x_{10} \\ x_{11} \\ x_{12} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ d_1 - c_{1,5}\,x_5 - c_{1,8}\,x_8 - c_{1,9}\,x_9 - c_{1,10}\,x_{10} - c_{1,12}\,x_{12} \\ d_2 - c_{2,5}\,x_5 - c_{2,8}\,x_8 - c_{2,9}\,x_9 - c_{2,10}\,x_{10} - c_{2,12}\,x_{12} \\ x_5 \\ d_3 - c_{3,8}\,x_8 - c_{3,9}\,x_9 - c_{3,10}\,x_{10} - c_{3,12}\,x_{12} \\ d_4 - c_{4,8}\,x_8 - c_{4,9}\,x_9 - c_{4,10}\,x_{10} - c_{4,12}\,x_{12} \\ x_8 \\ x_9 \\ x_{10} \\ d_5 - c_{5,12}\,x_{12} \\ x_{12} \end{pmatrix}$$

$$= \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ d_1 \\ d_2 \\ 0 \\ d_3 \\ d_4 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ d_5 \end{pmatrix} + x_1 \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} + x_2 \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} + x_5 \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ -c_{1,5} \\ -c_{2,5} \\ 1 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} + x_8 \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ -c_{1,8} \\ -c_{2,8} \\ 0 \\ -c_{3,8} \\ -c_{4,8} \\ 1 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} + x_9 \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ -c_{1,9} \\ -c_{2,9} \\ 0 \\ -c_{3,9} \\ -c_{4,9} \\ 0 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} + x_{10} \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ -c_{1,10} \\ -c_{2,10} \\ 0 \\ -c_{3,10} \\ -c_{4,10} \\ 0 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} + x_{12} \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ -c_{1,12} \\ -c_{2,12} \\ 0 \\ -c_{3,12} \\ -c_{4,12} \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ -c_{5,12} \\ 1 \end{pmatrix}.$$

De cette manière, on a représenté la solution générale du système linéaire initial sous une forme vectorielle :

$$\vec{x} = \vec{x}^{\,0} + t_1\,\vec{v}_1 + t_2\,\vec{v}_2 + t_3\,\vec{v}_3 + t_4\,\vec{v}_4 + t_5\,\vec{v}_5 + t_6\,\vec{v}_6 + t_7\,\vec{v}_7,$$

où $t_1$, $t_2$, $t_3$, $t_4$, $t_5$, $t_6$, $t_7$ sont des nombres réels quelconques, et sont des nouveaux noms pour les variables libres $x_1$, $x_2$, $x_5$, $x_8$, $x_9$, $x_{10}$, $x_{12}$.

## 3. Système linéaire homogène associé à un système linéaire

Considérons à nouveau un système linéaire quelconque de $m \geqslant 1$ équations à $n \geqslant 1$ inconnues :

$$\begin{aligned}
a_{1,1}\,x_1 + a_{1,2}\,x_2 + \cdots + a_{1,n}\,x_n &= b_1, \\
a_{2,1}\,x_1 + a_{2,2}\,x_2 + \cdots + a_{2,n}\,x_n &= b_2, \\
\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots \\
a_{m,1}\,x_1 + a_{m,2}\,x_2 + \cdots + a_{m,n}\,x_n &= b_m,
\end{aligned} \qquad \left[\begin{array}{cccc|c}
a_{1,1} & a_{1,2} & \cdots & a_{1,n} & b_1 \\
a_{2,1} & a_{2,2} & \cdots & a_{2,n} & b_2 \\
\vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\
a_{m,1} & a_{m,2} & \cdots & a_{m,n} & b_m
\end{array}\right],$$

écrit de manière détaillé, ou représenté par sa matrice complète.

Mieux encore, un tel système peut s'écrire sous forme matricielle :

$$\begin{pmatrix} a_{1,1} & \cdots & a_{1,n} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{m,1} & \cdots & a_{m,n} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} b_1 \\ \vdots \\ b_m \end{pmatrix},$$

c'est-à-dire de manière très abrégée :

$$(\boldsymbol{S}_{A,\vec{b}}) \qquad A\,\vec{x} = \vec{b}.$$

**Définition 3.1.** Le *système linéaire homogène* associé :

$$(\boldsymbol{S}_{A,\vec{0}}) \qquad A\,\vec{y} = \vec{0},$$

est le système linéaire dans lequel on remplace le vecteur constant $\vec{b}$ du membre de droite par le vecteur nul $\vec{0}$, c'est-à-dire sous forme développée :

$$\begin{pmatrix} a_{1,1} & \cdots & a_{1,n} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{m,1} & \cdots & a_{m,n} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} y_1 \\ \vdots \\ y_n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix}.$$

En mathématiques, on appelle *homogène* une fonction $f(x)$ qui satisfait $f(\lambda\,x) = \lambda\,f(x)$ pour tout $\lambda \in \mathbb{R}$. Ici, on a aussi *homogénéité* au sens où :

$$A\,(\lambda\,\vec{y}) = \lambda\,A\,\vec{y} = \lambda\,\vec{0} = \vec{0},$$

de telle sorte que si $\vec{y}$ est une solution, alors $\lambda\,\vec{y}$ est *aussi* une solution, pour tout $\lambda \in \mathbb{R}$ [1].

Volontairement, nous avons utilisé les lettres $y_j$ au lieu des lettres $x_j$, ci-dessus, afin de mieux différencier les deux espaces de solutions. Et il est clair que :

$$\boldsymbol{S}_{A,\vec{0}} := \boldsymbol{S}_{A,\vec{b}}\Big|_{\vec{b}=\vec{0}}.$$

Ces deux systèmes se *ressemblent* donc presque comme deux jumeaux ! Car il ont la même matrice :

$$A = \big(a_{i,j}\big)_{1\leqslant i\leqslant m \text{ lignes}}^{1\leqslant j\leqslant n \text{ colonnes}}.$$

Introduisons leurs deux espaces respectifs de solutions :

$$\mathsf{Sol}\,\big(\boldsymbol{S}_{A,\vec{b}}\big) := \big\{\vec{x} \in \overrightarrow{V}_{\mathbb{R}^n} :\ A\,\vec{x} = \vec{b}\big\},$$
$$\mathsf{Sol}\,\big(\boldsymbol{S}_{A,\vec{0}}\big) := \big\{\vec{y} \in \overrightarrow{V}_{\mathbb{R}^n} :\ A\,\vec{y} = \vec{0}\big\}.$$

**Question 3.2.** *Ces deux espaces de solutions sont ils liés l'un à l'autre, et si oui, comment ?*

Évidemment, quand $\vec{b} = \vec{0}$, ces deux espaces de solutions *coïncident*, mais ce n'est pas vraiment cette réponse un peu trop simplette que nous espérions, car le vecteur constant $\vec{b}$ du membre de droite n'est pas toujours égal à $\vec{0}$.

1. En revanche, lorsque le vecteur constant $\vec{b} \neq \vec{0}$ n'est *pas* nul, cette propriété n'est pas vraie pour le système $A\,\vec{x} = \vec{b}$, c'est-à-dire que si $\vec{x}$ est une solution, il n'est pas vrai que $\lambda\,\vec{x}$ est aussi une solution pour tout $\lambda \in \mathbb{R}$, simplement parce que $\lambda\,\vec{b}$ n'est pas toujours égal à $\vec{b}$ :

$$A\,(\lambda\,\vec{x}) = \lambda\,A\,\vec{x} = \lambda\,\vec{b} \neq \vec{b} \qquad \text{(en général)}.$$

**Observation 3.3.** *Si deux solutions $\vec{x}\,'$ et $\vec{x}\,''$ du système linéaire sont connues, alors leurs différence est solution du système homogène :*

$$\Big(A\,\vec{x}\,' = \vec{b} \quad \textit{et} \quad A\,\vec{x}\,'' = \vec{b}\Big) \qquad \Longrightarrow \qquad A\,\big(\vec{x}\,' - \vec{x}\,''\big) = \vec{0}.$$

*Démonstration.* Cela est essentiellement évident par simple soustraction :

$$A\,\big(\vec{x}\,' - \vec{x}\,''\big) \;=\; A\,\vec{x}\,' - A\,\vec{x}\,'' \;=\; \vec{b} - \vec{b} \;=\; \vec{0}. \qquad \square$$

Une représentation développée de cette soustraction « bancaire » est la suivante. En partant de :

$$\begin{array}{c} a_{1,1}\,x_1' + \cdots + a_{1,n}\,x_n' \;=\; b_1, \\ \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots \\ a_{m,1}\,x_1' + \cdots + a_{m,n}\,x_n' \;=\; b_m, \end{array} \qquad \text{et de :} \qquad \begin{array}{c} a_{1,1}\,x_1'' + \cdots + a_{1,n}\,x_n'' \;=\; b_1, \\ \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots \\ a_{m,1}\,x_1'' + \cdots + a_{m,n}\,x_n'' \;=\; b_m, \end{array}$$

il vient :

$$\begin{array}{c} a_{1,1}\,\big(x_1' - x_1''\big) + \cdots + a_{1,n}\,\big(x_n' - x_n''\big) \;=\; b_1 - b_1 \;=\; 0, \\ \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots \\ a_{m,1}\,\big(x_1' - x_1''\big) + \cdots + a_{m,n}\,\big(x_n' - x_n''\big) \;=\; b_m - b_m \;=\; 0. \end{array}$$

Autrement dit, le vecteur :

$$\vec{y} \;:=\; \vec{x}\,' - \vec{x}\,''$$

est solution du système linéaire *homogène* associé $\boldsymbol{S}_{A,\vec{0}}$. Voilà donc un premier lien naturel :

$$\boldsymbol{S}_{A,\vec{b}} \;\rightsquigarrow\; \boldsymbol{S}_{A,\vec{0}}.$$

Or il existe aussi un « lien inverse », avec une flèche zigzagante dans l'autre sens.

Supposons en effet que, par chance, ou parce qu'on a réussi à copier sur son voisin de table, on connaisse une certaine solution « particulière » $\vec{x}^{\,0}$ du système linéaire, c'est-à-dire avec :

$$A\,\vec{x}^{\,0} \;=\; \vec{b}.$$

Parfois en effet, on peut « deviner à l'oeil » des solutions, sans avoir à entreprendre un calcul de pivot. Mieux vaut avoir une vue d'aigle — surtout en examen !

Alors là, c'est super ! Car on peut *prendre avantage* de la connaissance d'une telle solution particulière $A\,\vec{x}^{\,0} = \vec{b}$ pour comprendre la solution générale de $A\,\vec{x} = \vec{b}$, en effectuant une simple soustraction [2] :

$$A\,\big(\underbrace{\vec{x} - \vec{x}^{\,0}}_{=:\,\vec{y}}\big) \;=\; A\,\vec{x} - A\,\vec{x}^{\,0} \;=\; \vec{b} - \vec{b} \;=\; \vec{0},$$

puisqu'on constate alors que le vecteur $\vec{y} := \vec{x} - \vec{x}^{\,0}$ est solution du système linéaire homogène associé :

$$A\,\vec{y} \;=\; \vec{0}.$$

Une réponse satisfaisante à la Question 3.2 peut alors être énoncée sous la forme d'un

2. En mathématiques, il n'y a rien de plus beau et de plus utile qu'un signe moins $-$ !

**Théorème 3.4.** *La solution générale $\vec{x}$ d'un système linéaire :*

$$(\boldsymbol{S}_{A,\vec{b}}) \qquad A\,\vec{x} \,=\, \vec{b},$$

*est toujours la* somme *:*

$$\vec{x} \,=\, \vec{x}^{\,0} + \vec{y},$$

*d'une solution particulière $\vec{x}^{\,0}$ satisfaisant $A\,\vec{x}^{\,0} = \vec{b}$ avec la solution* générale *$\vec{y}$ du système homogène associé :*

$$(\boldsymbol{S}_{A,\vec{0}}) \qquad A\,\vec{y} \,=\, \vec{0}.$$

*Démonstration.* En réfléchissant et en relisant le raisonnement qui précède, on se convainc que $\vec{x} = \vec{x}^{\,0} + \vec{y}$ est solution générale de $\boldsymbol{S}_{A,\vec{b}}$ *si et seulement si* $\vec{y}$ est solution générale de $\boldsymbol{S}_{A,\vec{0}}$. □

Maintenant, discutons de la résolution d'un système linéaire homogène $A\,\vec{x} = \vec{0}$, c'est-à-dire d'un système :

$$\begin{aligned}
a_{1,1}\,x_1 + a_{1,2}\,x_2 + \cdots + a_{1,n}\,x_n \,&=\, 0,\\
a_{2,1}\,x_1 + a_{2,2}\,x_2 + \cdots + a_{2,n}\,x_n \,&=\, 0,\\
\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\\
a_{m,1}\,x_1 + a_{m,2}\,x_2 + \cdots + a_{m,n}\,x_n \,&=\, 0,
\end{aligned}$$

dont les seconds membres sont tous égaux à $0$.

Clairement, sa matrice complète est de la forme :

$$\left[\begin{array}{cccc|c}
a_{1,1} & a_{1,2} & \cdots & a_{1,n} & 0\\
a_{2,1} & a_{2,2} & \cdots & a_{2,n} & 0\\
\vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots\\
a_{m,1} & a_{m,2} & \cdots & a_{m,n} & 0
\end{array}\right],$$

avec que des $0$ à la dernière colonne. En reprenant l'exemple général de la Section **2**, avec $n = 12$, nous pouvons nous imaginer que la méthode du pivot transforme cette matrice en une matrice du type :

$$\begin{array}{cccccccccccc|c}
\mathbf{0} & \mathbf{0} & \blacksquare & * & * & * & * & * & * & * & * & * & \mathbf{0}\\
\mathbf{0} & \mathbf{0} & \mathbf{0} & \blacksquare & * & * & * & * & * & * & * & * & \mathbf{0}\\
\mathbf{0} & \mathbf{0} & \mathbf{0} & \mathbf{0} & \mathbf{0} & \blacksquare & * & * & * & * & * & * & \mathbf{0}\\
\mathbf{0} & \mathbf{0} & \mathbf{0} & \mathbf{0} & \mathbf{0} & \mathbf{0} & \blacksquare & * & * & * & * & * & \mathbf{0}\\
\mathbf{0} & \mathbf{0} & \mathbf{0} & \mathbf{0} & \mathbf{0} & \mathbf{0} & \mathbf{0} & \mathbf{0} & \mathbf{0} & \mathbf{0} & \blacksquare & * & \mathbf{0}\\
\mathbf{0} & \mathbf{0} & \mathbf{0} & \mathbf{0} & \mathbf{0} & \mathbf{0} & \mathbf{0} & \mathbf{0} & \mathbf{0} & \mathbf{0} & \mathbf{0} & \mathbf{0} & \mathbf{0}\\
\vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots\\
\mathbf{0} & \mathbf{0} & \mathbf{0} & \mathbf{0} & \mathbf{0} & \mathbf{0} & \mathbf{0} & \mathbf{0} & \mathbf{0} & \mathbf{0} & \mathbf{0} & \mathbf{0} & \mathbf{0}.
\end{array}$$

**Dernière ligne non nulle *toujours* compatible !**

**Observation 3.5.** *Quand on effectue des combinaisons linéaires sur les lignes par la méthode du pivot, la dernière colonne conserve tous ses* $\mathbf{0}$.

*Preuve.* En effet, ou bien on permute deux lignes et le dernier $\mathbf{0}$ demeure, ou bien on multiplie une ligne par un nombre réel non nul $\tau \in \mathbb{R}^*$, ou bien on additionne $\mu$ fois une ligne à une autre ligne. Dans les deux derniers cas :

$$\tau\,\mathbf{0} \,=\, \mathbf{0}, \qquad\qquad \mathbf{0} + \mu\,\mathbf{0} \,=\, \mathbf{0}.$$ □

Par conséquent, il est impossible d'obtenir une dernière ligne non nulle de la forme *incompatible :*

$$\mathbf{0}\ \mathbf{0}\ \cdots\ \mathbf{0}\ |\ \blacksquare.$$

Par contraposition, ce raisonnement justifie l'

**Observation 3.6.** *Un système linéaire* homogène $A\,\vec{y} = \vec{0}$ *est toujours compatible.*

*Preuve.* Une autre explication de ce fait, plus simple, est la suivante :

$$A\,\vec{0} \,=\, \vec{0},$$

donc $\vec{y} := \vec{0}$ est toujours une solution — triviale, évidente ! Il fallait y penser !

Or d'après la théorie générale de la résolution des systèmes linéaires, nous savons que trois cas, et trois cas seulement, peuvent se produire :

**(i)** le système n'a *aucune* solution [est incompatible] ;

**(ii)** le système a une solution unique [est compatible] ;

**(iii)** le système possède une *infinité* de solutions [est compatible].

Ici, pour un système linéaire homogène $A\,\vec{y} = \vec{0}$, les deux cas **(ii)** et **(iii)** peuvent se produire, mais jamais le (mauvais) cas **(i)**, puisque nous venons de constater que $\vec{y} := \vec{0}$ est toujours solution ! □

Pour terminer cette section, admettons maintenant que nous ayons poursuivi la méthode du pivot jusqu'à mettre la matrice complète du système homogène $A\,\vec{y} = \vec{0}$ sous forme échelonnée réduite :

$$\begin{array}{cccccccccccc|c}
y_1 & y_2 & y_3 & y_4 & y_5 & y_6 & y_7 & y_8 & y_9 & y_{10} & y_{11} & y_{12} & \\
\mathbf{0} & \mathbf{0} & \boxed{\mathbf{1}} & \mathbf{0} & * & \mathbf{0} & \mathbf{0} & * & * & * & \mathbf{0} & * & \mathbf{0} \\
\mathbf{0} & \mathbf{0} & \mathbf{0} & \boxed{\mathbf{1}} & * & \mathbf{0} & \mathbf{0} & * & * & * & \mathbf{0} & * & \mathbf{0} \\
\mathbf{0} & \mathbf{0} & \mathbf{0} & \mathbf{0} & \mathbf{0} & \boxed{\mathbf{1}} & \mathbf{0} & * & * & * & \mathbf{0} & * & \mathbf{0} \\
\mathbf{0} & \mathbf{0} & \mathbf{0} & \mathbf{0} & \mathbf{0} & \mathbf{0} & \boxed{\mathbf{1}} & * & * & * & \mathbf{0} & * & \mathbf{0} \\
\mathbf{0} & \mathbf{0} & \mathbf{0} & \mathbf{0} & \mathbf{0} & \mathbf{0} & \mathbf{0} & \mathbf{0} & \mathbf{0} & \mathbf{0} & \boxed{\mathbf{1}} & * & \mathbf{0} \\
\mathbf{0} & \mathbf{0} & \mathbf{0} & \mathbf{0} & \mathbf{0} & \mathbf{0} & \mathbf{0} & \mathbf{0} & \mathbf{0} & \mathbf{0} & \mathbf{0} & \mathbf{0} & \mathbf{0} \\
\mathbf{0} & \mathbf{0} & \mathbf{0} & \mathbf{0} & \mathbf{0} & \mathbf{0} & \mathbf{0} & \mathbf{0} & \mathbf{0} & \mathbf{0} & \mathbf{0} & \mathbf{0} & \mathbf{0} \\
\mathbf{0} & \mathbf{0} & \mathbf{0} & \mathbf{0} & \mathbf{0} & \mathbf{0} & \mathbf{0} & \mathbf{0} & \mathbf{0} & \mathbf{0} & \mathbf{0} & \mathbf{0} & \mathbf{0} \\
\mathbf{0} & \mathbf{0} & \mathbf{0} & \mathbf{0} & \mathbf{0} & \mathbf{0} & \mathbf{0} & \mathbf{0} & \mathbf{0} & \mathbf{0} & \mathbf{0} & \mathbf{0} & \mathbf{0},
\end{array}$$

toujours avec que des $\mathbf{0}$ à la dernière colonne. Ici, nous traitons un cas de $m = 9$ équations à $n = 12$ variables.

Supprimons les $4$ dernières lignes, donnons des noms aux étoiles :

$$\begin{array}{cccccccccccc|c}
\mathbf{0} & \mathbf{0} & \mathbf{1} & \mathbf{0} & c_{1,5} & \mathbf{0} & \mathbf{0} & c_{1,8} & c_{1,9} & c_{1,10} & \mathbf{0} & c_{1,12} & \mathbf{0} \\
\mathbf{0} & \mathbf{0} & \mathbf{0} & \mathbf{1} & c_{2,5} & \mathbf{0} & \mathbf{0} & c_{2,8} & c_{2,9} & c_{2,10} & \mathbf{0} & c_{2,12} & \mathbf{0} \\
\mathbf{0} & \mathbf{0} & \mathbf{0} & \mathbf{0} & \mathbf{0} & \mathbf{1} & \mathbf{0} & c_{3,8} & c_{3,9} & c_{3,10} & \mathbf{0} & c_{3,12} & \mathbf{0} \\
\mathbf{0} & \mathbf{0} & \mathbf{0} & \mathbf{0} & \mathbf{0} & \mathbf{0} & \mathbf{1} & c_{4,8} & c_{4,9} & c_{4,10} & \mathbf{0} & c_{4,12} & \mathbf{0} \\
\mathbf{0} & \mathbf{0} & \mathbf{0} & \mathbf{0} & \mathbf{0} & \mathbf{0} & \mathbf{0} & \mathbf{0} & \mathbf{0} & \mathbf{0} & \mathbf{1} & c_{5,12} & \mathbf{0}.
\end{array}$$

Cet exemple est essentiellement le même qu'à la fin de la Section **2**, mais avec :

$$d_1 \,=\, d_2 \,=\, d_3 \,=\, d_4 \,=\, d_5 \,=\, \mathbf{0}.$$

Résolvons les $5$ inconnues principales $y_3$, $y_4$, $y_6$, $y_7$, $y_{11}$ :

$$\begin{aligned}
y_3 &= -\,c_{1,5}\,y_5 - c_{1,8}\,y_8 - c_{1,9}\,y_9 - c_{1,10}\,y_{10} - c_{1,12}\,y_{12},\\
y_4 &= -\,c_{2,5}\,y_5 - c_{2,8}\,y_8 - c_{2,9}\,y_9 - c_{2,10}\,y_{10} - c_{2,12}\,y_{12},\\
y_6 &= \qquad\qquad -c_{3,8}\,y_8 - c_{3,9}\,y_9 - c_{3,10}\,y_{10} - c_{3,12}\,y_{12},\\
y_7 &= \qquad\qquad -c_{4,8}\,y_8 - c_{4,9}\,y_9 - c_{4,10}\,y_{10} - c_{4,12}\,y_{12},\\
y_{11} &= \qquad\qquad\qquad\qquad\qquad\qquad\qquad\qquad -c_{5,12}\,y_{12}.
\end{aligned}$$

Ensuite, écrivons le vecteur solution générale à $12$ composantes :

$$\begin{pmatrix} y_1\\ y_2\\ y_3\\ y_4\\ y_5\\ y_6\\ y_7\\ y_8\\ y_9\\ y_{10}\\ y_{11}\\ y_{12}\end{pmatrix} = \begin{pmatrix} y_1\\ y_2\\ -c_{1,5}\,y_5 - c_{1,8}\,y_8 - c_{1,9}\,y_9 - c_{1,10}\,y_{10} - c_{1,12}\,y_{12}\\ -c_{2,5}\,y_5 - c_{2,8}\,y_8 - c_{2,9}\,y_9 - c_{2,10}\,y_{10} - c_{2,12}\,y_{12}\\ y_5\\ -c_{3,8}\,y_8 - c_{3,9}\,y_9 - c_{3,10}\,y_{10} - c_{3,12}\,y_{12}\\ -c_{4,8}\,y_8 - c_{4,9}\,y_9 - c_{4,10}\,y_{10} - c_{4,12}\,y_{12}\\ y_8\\ y_9\\ y_{10}\\ d_5 - c_{5,12}\,y_{12}\\ y_{12}\end{pmatrix}$$

$$= y_1\begin{pmatrix}1\\0\\0\\0\\0\\0\\0\\0\\0\\0\\0\\0\end{pmatrix} + y_2\begin{pmatrix}0\\1\\0\\0\\0\\0\\0\\0\\0\\0\\0\\0\end{pmatrix} + y_5\begin{pmatrix}0\\0\\-c_{1,5}\\-c_{2,5}\\1\\0\\0\\0\\0\\0\\0\\0\end{pmatrix} + y_8\begin{pmatrix}0\\0\\-c_{1,8}\\-c_{2,8}\\0\\-c_{3,8}\\-c_{4,8}\\1\\0\\0\\0\\0\end{pmatrix} + y_9\begin{pmatrix}0\\0\\-c_{1,9}\\-c_{2,9}\\0\\-c_{3,9}\\-c_{4,9}\\0\\1\\0\\0\\0\end{pmatrix} + y_{10}\begin{pmatrix}0\\0\\-c_{1,10}\\-c_{2,10}\\0\\-c_{3,10}\\-c_{4,10}\\0\\0\\1\\0\\0\end{pmatrix} + y_{12}\begin{pmatrix}0\\0\\-c_{1,12}\\-c_{2,12}\\0\\-c_{3,12}\\-c_{4,12}\\0\\0\\0\\-c_{5,12}\\1\end{pmatrix}.$$

De cette manière, on a représenté la solution générale du système linéaire initial sous une forme vectorielle :

$$\vec{x} \;=\; t_1\,\vec{v}_1 + t_2\,\vec{v}_2 + t_3\,\vec{v}_3 + t_4\,\vec{v}_4 + t_5\,\vec{v}_5 + t_6\,\vec{v}_6 + t_7\,\vec{v}_7,$$

où $t_1$, $t_2$, $t_3$, $t_4$, $t_5$, $t_6$, $t_7$ sont des nombres réels quelconques, et sont des nouveaux noms pour les variables libres $y_1$, $y_2$, $y_5$, $y_8$, $y_9$, $y_{10}$, $y_{12}$.

Ici, quand on compare avec la fin de la Section **2**, il n'y a pas de vecteur constant $\vec{x}^{\,0}$, mais c'est mieux, puisqu'on a une vraie combinaison linéaire de $7$ vecteurs $\vec{v}_1$, $\vec{v}_2$, $\vec{v}_3$, $\vec{v}_4$, $\vec{v}_5$, $\vec{v}_6$, $\vec{v}_7$.

**Résumé 3.7.** *L'ensemble des solutions d'un système linéaire* homogène $A\,\vec{y} = \vec{0}$ *:*

$$\mathsf{Sol}\left(\boldsymbol{S}_{A,\vec{0}}\right) \;=\; \mathsf{Vect}\left\{\vec{v}_1, \ldots, \vec{v}_r\right\},$$

*est un espace vectoriel, engendré par $r$ vecteurs $\vec{v}_1, \ldots, \vec{v}_r$, pour un certain entier $r$.*

Évidemment, le nombre $r$ est le nombre d'inconnues paramétriques dans la forme échelonnée réduite (unique) de la matrice $A$.

## 4. Interprétation vectorielle des systèmes linéaires

Dans l'espace vectoriel $\overrightarrow{V}_{\mathbb{R}^m}$ à $m \geqslant 1$ dimensions, soient $n \geqslant 1$ vecteurs $\vec{a}_1, \ldots, \vec{a}_n$, et soit un autre vecteur $\vec{b}$.

**Question 4.1.** *Existe-t-il des coefficients scalaires $x_1, \ldots, x_n$ tels que :*

$$x_1\,\vec{a}_1 + \cdots + x_n\,\vec{a}_n \;=\; \vec{b}\ \textbf{?}$$

C'est-à-dire : *Le vecteur $\vec{b}$ est-il combinaison linéaire des vecteurs $\vec{a}_1, \ldots, \vec{a}_n$ ?*
Si nous déployons les $m$ composantes verticales de chacun de ces $n+1$ vecteurs :

$$\vec{a}_1 = \begin{pmatrix} a_{1,1} \\ \vdots \\ a_{m,1} \end{pmatrix}, \quad \ldots, \quad \vec{a}_n = \begin{pmatrix} a_{1,n} \\ \vdots \\ a_{m,n} \end{pmatrix}, \quad \vec{b} = \begin{pmatrix} b_1 \\ \vdots \\ b_m \end{pmatrix},$$

la question :

$$x_1 \begin{pmatrix} a_{1,1} \\ \vdots \\ a_{m,1} \end{pmatrix} + \cdots + x_n \begin{pmatrix} a_{1,n} \\ \vdots \\ a_{m,n} \end{pmatrix} \overset{?}{=} \begin{pmatrix} b_1 \\ \vdots \\ b_m \end{pmatrix}$$

revient évidemment à résoudre le bon vieux système linéaire-camembert des familles :

$$\begin{pmatrix} a_{1,1} & \cdots & a_{1,n} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{m,1} & \cdots & a_{m,n} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix} \overset{?}{=} \begin{pmatrix} b_1 \\ \vdots \\ b_m \end{pmatrix}.$$

Et dans les chapitres qui précèdent, nous avons déjà vu de nombreux exemples de tels systèmes.

L'objectif, maintenant, est de montrer que l'algorithme du pivot de Gauss possède une interprétation vectorielle. Rappelons la

**Définition 4.2.** Le *sous-espace vectoriel* de $\overrightarrow{V}_{\mathbb{R}^n}$ engendré par $n$ vecteurs :

$$\vec{a}_1, \ldots, \vec{a}_n \in \overrightarrow{V}_{\mathbb{R}^m},$$

est l'ensemble noté :

$$\mathsf{Vect}\left(\vec{a}_1, \ldots, \vec{a}_n\right) := \left\{ x_1\vec{a}_1 + \cdots + x_n\vec{a}_n : \ x_1, \ldots, x_n \in \mathbb{R} \text{ quelconques} \right\}.$$

Il a la propriété presque évidente d'être invariant par combinaisons linéaires.

**Proposition 4.3.** *Pour tous scalaires $\lambda, \mu \in \mathbb{R}$, et pour tous vecteurs :*

$$\begin{aligned} \vec{x} &= x_1\,\vec{a}_1 + \cdots + x_n\,\vec{a}_n \ \in \ \mathsf{Vect}\left(\vec{a}_1, \ldots, \vec{a}_n\right), \\ \vec{y} &= y_1\,\vec{a}_1 + \cdots + y_n\,\vec{a}_n \ \in \ \mathsf{Vect}\left(\vec{a}_1, \ldots, \vec{a}_n\right), \end{aligned}$$

*on a encore :*

$$\lambda\,\vec{x} + \mu\,\vec{y} \ \in \ \mathsf{Vect}\left(\vec{a}_1, \ldots, \vec{a}_n\right).$$

*Preuve.* En effet :

$$\begin{aligned} \lambda\,\vec{x} + \mu\,\vec{y} &= \lambda\,x_1\,\vec{a}_1 + \cdots + \lambda\,x_n\,\vec{a}_n \\ &\quad + \mu\,y_1\,\vec{a}_1 + \cdots + \mu\,y_n\,\vec{a}_n \\ &= \left(\lambda\,x_1 + \mu\,y_1\right)\vec{a}_1 + \cdots + \left(\lambda\,x_n + \mu\,y_n\right)\vec{a}_n. \end{aligned}$$

□

## 5. Familles libres de vecteurs $\vec{a}_1, \ldots, \vec{a}_n$

Si un vecteur $\vec{a}_1 \in \overrightarrow{V}_{\mathbb{R}^m}$ n'est pas le vecteur nul $\vec{0}$, l'espace vectoriel qu'il engendre :

$$\mathsf{Vect}\,\big(\vec{a}_1\big) \;=\; \mathbb{R}\,\vec{a}_1,$$

est la droite vectorielle dirigée par $\vec{a}_1$, dans l'espace vectoriel ambiant $\overrightarrow{V}_{\mathbb{R}^m}$.

Autre exemple : si deux vecteurs $\vec{a}_1$ et $\vec{a}_2$ ne sont *pas* colinéaires, c'est-à-dire ne sont *pas* situés sur une même droite vectorielle, alors :

$$\mathsf{Vect}\,\big(\vec{a}_1, \vec{a}_2\big) \;=\; \mathbb{R}\,\vec{a}_1 + \mathbb{R}\,\vec{a}_2,$$

est un *plan vectoriel*, de dimension $2$, contenu dans l'espace ambiant $\overrightarrow{V}_{\mathbb{R}^m}$.

**Définition 5.1.** Dans $\overrightarrow{V}_{\mathbb{R}^m}$, on dit que $n \geqslant 1$ vecteurs $\vec{a}_1, \ldots, \vec{a}_n$ sont *linéairement indépendants*, ou que la famille $\big\{\vec{a}_1, \ldots, \vec{a}_n\big\}$ est *libre*, si on a l'implication :

$$x_1\,\vec{a}_1 + \cdots + x_n\,\vec{a}_n \;=\; \vec{0} \qquad\qquad \Longrightarrow \qquad\qquad \Big(\; x_1 \;=\; 0, \quad \ldots, \quad x_n \;=\; 0 \;\Big).$$

Inversement, on dit que $\vec{a}_1, \ldots, \vec{a}_n$ sont *linéairement dépendants*, ou que la famille $\big\{\vec{a}_1, \ldots, \vec{a}_n\big\}$ est *liée*, s'il existe des scalaires non tous nuls :

$$\big(x_1, \ldots, x_n\big) \;\neq\; (0, \ldots, 0),$$

tels que :

$$x_1\,\vec{a}_1 + \cdots + x_n\,\vec{a}_n \;=\; \vec{0}.$$

En revenant aux cas simples $n = 1$ et $n = 2$ on a la

**Proposition 5.2.** **(1)** *Un système de un vecteur $\{\vec{a}_1\}$ est libre si et seulement si $\vec{a}_1 \neq \vec{0}$.*
**(2)** *Un système de deux vecteurs $\big\{\vec{a}_1, \vec{a}_2\big\}$ est libre si et seulement si $\vec{a}_1$ et $\vec{a}_2$ ne sont pas colinéaires.*

Pour ce qui concerne **(2)**, nous allons en fait établir la *contraposition* c'est-à-dire que plutôt que d'établir l'équivalence :

$$\mathsf{P} \qquad\qquad \Longleftrightarrow \qquad\qquad \mathsf{Q}$$

où $\mathsf{P}$ et $\mathsf{Q}$ sont deux énoncés, nous allons établir l'équivalence :

$$\mathsf{non\ P} \qquad\qquad \Longleftrightarrow \qquad\qquad \mathsf{non\ Q},$$

ce qui est logiquement équivalent.

*Démonstration.* **(1)** Si $\vec{a}_1 \neq \vec{0}$, en partant de $x_1\,\vec{a}_1 = \vec{0}$, ceci implique $x_1 = 0$, donc $\{\vec{a}_1\}$ est libre.

Au contraire, si $\vec{a}_1 = \vec{0}$, pour tout $x_1 \in \mathbb{R}$, on a aussi $x_1\,\vec{a}_1 = \vec{0}$, en particulier avec $x_1 \neq 0$, donc $\{\vec{a}_1\}$ est liée.

**(2)** La contraposition en question est l'équivalence :

$$\big\{\vec{a}_1, \vec{a}_2\big\} \text{ est liée} \qquad\qquad \Longleftrightarrow \qquad\qquad \vec{a}_1,\ \vec{a}_2 \text{ sont colinéaires.}$$

Premièrement, supposons que $\big\{\vec{a}_1, \vec{a}_2\big\}$ liée, c'est-à-dire qu'il existe $(x_1, x_2) \neq (0, 0)$ avec :

$$x_1\,\vec{a}_1 + x_2\,\vec{a}_2 \;=\; \vec{0}.$$

Par symétrie, on peut supposer que $\lambda_1 \neq 0$. Donc on peut résoudre :

$$\vec{a}_1 \;=\; -\,\tfrac{x_2}{x_1}\,\vec{a}_2,$$

ce qui montre que $\vec{a}_1$ et $\vec{a}_2$ sont colinéaires.

Deuxièmement, et réciproquement, on peut supposer par symétrie que $\vec{a}_1 = \mu\,\vec{a}_2$ avec $\mu \in \mathbb{R}$, ce qui équivaut à :

$$\vec{a}_1 - \mu\,\vec{a}_2 \;=\; \vec{0},$$

donc avec $(x_1, x_2) := (1, -\mu) \neq (0, 0)$, on a une relation de dépendance linéaire entre $\vec{a}_1$ et $\vec{a}_2$. $\square$

Voici une reformulation de la Définition 5.1.

**Proposition 5.3.** *Une famille* $\big\{\vec{a}_1, \ldots, \vec{a}_n\big\}$ *de vecteurs dans* $\overrightarrow{V}_{\mathbb{R}^n}$ *est libre si et seulement si le système linéaire* homogène :

$$\begin{pmatrix} a_{1,1} & \cdots & a_{1,n} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{m,1} & \cdots & a_{m,n} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix} \;=\; \begin{pmatrix} 0 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix}.$$

*admet au moins une solution* non nulle $(x_1, \ldots, x_n) \neq (0, \ldots, 0)$. $\square$

Appliquons la méthode du pivot de Gauss, et supposons qu'elle a été conduite jusqu'à produire une matrice équivalente sous forme échelonnée :

$$\begin{bmatrix} a_{1,1} & \cdots & a_{1,n} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{m,1} & \cdots & a_{m,n} \end{bmatrix} \quad\rightsquigarrow\quad \begin{bmatrix} \blacksquare & * & \cdots \\ \mathbf{0} & \blacksquare & \cdots \\ \vdots & \vdots & \ddots \\ \mathbf{0} & \mathbf{0} & \cdots \end{bmatrix} =: \begin{bmatrix} a'_{1,1} & \cdots & a'_{1,n} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ a'_{m,1} & \cdots & a'_{m,n} \end{bmatrix},$$

que nous noterons dorénavant avec des primes (non salariales).

**Théorème 5.4.** *Dans* $\overrightarrow{V}_{\mathbb{R}^m}$*, on a équivalence entre :*

**(i)** $\big\{\vec{a}_1, \ldots, \vec{a}_n\big\}$ *est libre ;*

**(ii)** *une matrice échelonnée* $\big(a'_{i,j}\big)$ *associée à* $\big(a_{i,j}\big)$ *possède un pivot sur chaque colonne.*

La matrice complète $\big[a'_{i,j} \,\big|\, 0\big]$ du système gaussifié doit donc être du type :

$$\begin{array}{cccccccccc|c}
x_1 & x_2 & x_3 & x_4 & x_5 & x_6 & x_7 & x_8 & x_9 & x_{10} & \\
\blacksquare & * & * & * & * & * & * & * & * & * & \mathbf{0} \\
\mathbf{0} & \blacksquare & * & * & * & * & * & * & * & * & \mathbf{0} \\
\mathbf{0} & \mathbf{0} & \blacksquare & * & * & * & * & * & * & * & \mathbf{0} \\
\mathbf{0} & \mathbf{0} & \mathbf{0} & \blacksquare & * & * & * & * & * & * & \mathbf{0} \\
\mathbf{0} & \mathbf{0} & \mathbf{0} & \mathbf{0} & \blacksquare & * & * & * & * & * & \mathbf{0} \\
\mathbf{0} & \mathbf{0} & \mathbf{0} & \mathbf{0} & \mathbf{0} & \blacksquare & * & * & * & * & \mathbf{0} \\
\mathbf{0} & \mathbf{0} & \mathbf{0} & \mathbf{0} & \mathbf{0} & \mathbf{0} & \blacksquare & * & * & * & \mathbf{0} \\
\mathbf{0} & \mathbf{0} & \mathbf{0} & \mathbf{0} & \mathbf{0} & \mathbf{0} & \mathbf{0} & \blacksquare & * & * & \mathbf{0} \\
\mathbf{0} & \mathbf{0} & \mathbf{0} & \mathbf{0} & \mathbf{0} & \mathbf{0} & \mathbf{0} & \mathbf{0} & \blacksquare & * & \mathbf{0} \\
\mathbf{0} & \mathbf{0} & \mathbf{0} & \mathbf{0} & \mathbf{0} & \mathbf{0} & \mathbf{0} & \mathbf{0} & \mathbf{0} & \blacksquare & \mathbf{0} \\
\vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\
\mathbf{0} & \mathbf{0} & \mathbf{0} & \mathbf{0} & \mathbf{0} & \mathbf{0} & \mathbf{0} & \mathbf{0} & \mathbf{0} & \mathbf{0} & \mathbf{0}
\end{array}$$

Il est alors clair que son nombre de ligne $m \geqslant n$ doit nécessairement être supérieur ou égal à son nombre de colonnes.

*Démonstration.* Puisqu'il faut déduire que toutes les variables $x_1 = 0, \ldots, x_n = 0$, sont nulles, aucune variable ne peut être indépendante. Autrement dit, toutes les variables sont dépendantes, c'est-à-dire que toutes les variables $x_1, \ldots, x_n$ doivent pouvoir se résoudre, et cela se produit si et seulement si chaque colonne contient un pivot (un carré noir). $\square$

**Théorème 5.5.** *Dans $\overrightarrow{V}_{\mathbb{R}^m}$, toute famille de $n \geqslant m+1$ vecteurs $\vec{a}_1, \ldots, \vec{a}_n$ est toujours nécessairement* liée.

*Démonstration.* En effet, on vient de dire, pour la liberté, qu'il est nécessaire que $n \leqslant m$. Donc quand $n \geqslant m+1$, la liberté est terminée : présentez vos poignets et vos chevilles, chaînes dans les prisons de l'universités !

Plus sérieusement, il y a au moins $n - m \geqslant 1$ variables indépendantes, que l'on peut choisir toutes $\neq 0$, et en résolvant le système linéaire, on trouve donc une relation de dépendance linéaire $x_1\,\vec{a}_1 + \cdots + x_n\,\vec{a}_n = \vec{0}$ dont les coefficients $x_1, \ldots, x_n$ ne sont pas tous nuls, puisque au moins $n - m \geqslant 1$ d'entre eux sont non nuls. $\square$

## 6. Familles génératrices de vecteurs $\vec{a}_1, \ldots, \vec{a}_n$

Dans $\overrightarrow{V}_{\mathbb{R}^2}$, les deux vecteurs :

$$\vec{e}_1 := \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} \qquad \text{et} \qquad \vec{e}_2 := \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix},$$

ont la propriété que, pour tout vecteur $\vec{b} = \left(\begin{smallmatrix} b_1 \\ b_2 \end{smallmatrix}\right)$, il existe $x_1$ et $x_2$ tels que :

$$x_1\,\vec{e}_1 + x_2\,\vec{e}_2 = \vec{b},$$

avec évidemment $x_1 := b_1$ et $x_2 := b_2$.

**Définition 6.1.** On dit qu'une famille $\{\vec{a}_1, \ldots, \vec{a}_n\}$ de vecteurs dans $\overrightarrow{V}_{\mathbb{R}^m}$ est *génératrice* si, pour tout vecteur $\vec{b} \in \overrightarrow{V}_{\mathbb{R}^m}$, il existe des scalaires $x_1, \ldots, x_n \in \mathbb{R}$ tels que :

$$x_1\,\vec{a}_1 + \cdots + x_n\,\vec{a}_n = \vec{b}.$$

Autrement dit, tout vecteur $\vec{b}$ est combinaison linéaire de $\vec{a}_1, \ldots, \vec{a}_n$.

À nouveau, cette propriété va pouvoir s'exprimer grâce à une forme échelonnée de la matrice complète du système :

$$\left[\begin{array}{ccc|c} a_{1,1} & \cdots & a_{1,n} & b_1 \\ \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ a_{m,1} & \cdots & a_{m,n} & b_m \end{array}\right] \rightsquigarrow \left[\begin{array}{ccc|c} \blacksquare & * & \cdots & * \\ \mathbf{0} & \blacksquare & \cdots & * \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \mathbf{0} & \mathbf{0} & \cdots & * \end{array}\right] =: \left[\begin{array}{ccc|c} a'_{1,1} & \cdots & a'_{1,n} & b'_1 \\ \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ a'_{m,1} & \cdots & a'_{m,n} & b'_m \end{array}\right],$$

avec un second membre à droite de la barre verticale qui demeure quelconque, et que nous noterons $\vec{b}'$.

**Théorème 6.2.** *Dans $\overrightarrow{V}_{\mathbb{R}^m}$, on a équivalence entre :*

**(i)** $\{\vec{a}_1, \ldots, \vec{a}_n\}$ *est génératrice ;*

**(ii)** *dans une matrice échelonnée* $\left[a'_{i,j} \,\middle|\, b'_i\right]$ *associée à* $\left[a_{i,j} \,\middle|\, b_i\right]$*, il n'y a aucune ligne (en bas) de la forme :*

$$\left[\mathbf{0} \;\cdots\; \mathbf{0} \;\middle|\; b'_i\right];$$

**(iii)** *il existe un pivot sur chaque ligne.*

La matrice complète $\left[a'_{i,j} \,\middle|\, b'_i\right]$ du système gaussifié doit donc être du type :

$$\begin{array}{cccccccccc|c}
x_1 & x_2 & x_3 & x_4 & x_5 & x_6 & x_7 & x_8 & x_9 & x_{10} & \\
\blacksquare & * & * & * & * & * & * & * & * & * & b'_1 \\
\mathbf{0} & \blacksquare & * & * & * & * & * & * & * & * & b'_2 \\
\mathbf{0} & \mathbf{0} & \mathbf{0} & \blacksquare & * & * & * & * & * & * & b'_3 \\
\mathbf{0} & \mathbf{0} & \mathbf{0} & \mathbf{0} & \blacksquare & * & * & * & * & * & b'_4 \\
\mathbf{0} & \mathbf{0} & \mathbf{0} & \mathbf{0} & \mathbf{0} & \mathbf{0} & \mathbf{0} & \mathbf{0} & \blacksquare & * & b'_5
\end{array}$$

Il est alors clair que le nombre de lignes $m \leqslant n$ doit nécessairement être inférieur ou égal au nombre de colonnes.

*Démonstration.* **(ii)** $\Longleftrightarrow$ **(iii)** découle aisément du principe général de l'algorithme de Gauss.

**(i)** $\Longrightarrow$ **(ii)** Par contraposition, s'il existe une mauvaise ligne, en choisissant un vecteur $\vec{b}'$ avec $b'_j \neq 0$, on voit que $\vec{b}'$ ne peut *pas* être combinaison linéaire de $\vec{a}'_1, \vec{a}'_n$.

**(i)** $\Longleftarrow$ **(ii)** Comme il existe un pivot sur chaque ligne, et comme les colonnes [3] la condition **(iii)** est aussi satisfaite, et nous avons déjà plusieurs fois constaté que c'est la condition nécessaire et suffisante pour que le système linéaire de matrice gaussifiée $\left[a'_{i,j} \,\middle|\, b'_i\right]$ ait toujours au moins une solution. □

## 7. Familles libres et génératrices de vecteurs $\vec{a}_1, \ldots, \vec{a}_n$

Lorsque $n = m$, *i.e.* lorsqu'on a un nombre de vecteurs *égal* à la dimension de l'espace ambiant, les Théorèmes 5.4 et 6.2 donnent le

**Théorème 7.1.** *Dans* $\overrightarrow{V}_{\mathbb{R}^m}$*, on a équivalence entre :*

**(i)** $\left\{\vec{a}_1, \ldots, \vec{a}_n\right\}$ *est libre ;*

**(ii)** $\left\{\vec{a}_1, \ldots, \vec{a}_n\right\}$ *est génératrice.* □

## 8. Exercices

**Exercice 1.** EE

**Exercice 2.** EE

3. Elle sont « co*mm*es », les colo*mm*es ? Impossible de résister à ce petit calembour polisson de passage !