

# Échange ENS/CMI, début 2003

Olivier Wittenberg

25 février 2003

Anne Bouillard et moi-même sommes partis en Inde au début de l'année 2003, dans le cadre de l'échange entre l'ENS Paris et le CMI (Chennai Mathematical Institute). J'ai organisé mon séjour selon le modèle établi les années précédentes, à savoir une période relativement longue passée à Chennai, suivie de visites d'autres instituts de recherche en Inde. Ce rapport en décrit le déroulement, tant du point de vue matériel que scientifique.

## 1 Description générale

Mon séjour se divise naturellement en trois parties :

1. visite du CMI, à Chennai, anciennement appelée Madras, du 01/01/03 au 16/02/03 ;
2. visite du TIFR (Tata Institute of Fundamental Research) de Mumbai, anciennement appelée Bombay, du 17/02/03 au 22/02/03 ;
3. visite du HRI (Harish-Chandra Research Institute), anciennement appelé MRI (Mehta Research Institute), à Allahabad, du 23/02/03 au 01/03/03.

Je suis reparti pour la France le 3 mars, de Delhi.

### 1.1 Chennai

Pendant le mois de janvier, nous étions logés à la SPIC Dealers' Welfare Association Guest House, petit établissement situé à un kilomètre du CMI. Des chambres se sont libérées par la suite à l'IMSc (Institute for Mathematical Sciences), ce qui nous a permis d'y résider à partir du premier février. Le directeur de l'IMSc, R. Balasubramanian, nous y a accueillis avec enthousiasme et nous a donné accès à la bibliothèque et aux équipements informatiques.

J'ai consacré la plupart du temps passé au CMI à la préparation du cours que j'y ai donné. Il s'agissait d'un cours de base de géométrie algébrique de niveau DEA, une introduction au langage des schémas. Le niveau des étudiants s'est avéré hétérogène : certains étaient en troisième année, d'autres en quatrième. La plupart avaient quelques notions de géométrie différentielle et d'algèbre commutative, ce qui m'a permis de passer rapidement sur la localisation des anneaux et des modules. En revanche, ils ne connaissaient pas d'analyse complexe. L'auditoire comportait une petite dizaine d'étudiants au début du cours, cinq ou six à la fin, ce qui est satisfaisant en regard de la taille d'une promotion. Deux d'entre eux viendront à l'ENS au printemps prochain, et comptent poursuivre leur étude de la géométrie algébrique.

Le plan du cours était le suivant.

- Sheaf theory.
  - Presheaves: definition, morphisms of presheaves, stalks, direct images by a continuous map.
  - Sheaves: definition, sheafification, morphisms of sheaves, subsheaves, quotient sheaves, products and coproducts, exact sequences, glueing sheaves, inverse images by a continuous map.

- Ringed spaces: definition,  $\mathcal{O}_X$ -modules, quasi-coherent  $\mathcal{O}_X$ -modules,  $\mathcal{O}_X$ -modules of finite type, of finite presentation, locally free  $\mathcal{O}_X$ -modules, tensor product of  $\mathcal{O}_X$ -modules, direct and inverse images by a morphism of ringed spaces.
- A bit of commutative algebra: prime ideals, nilradical of a ring, radical of an ideal, localisation of a ring, of a module, functoriality of localisation.
- Spectra of rings.
  - Spectra as topological spaces: Zariski topology, distinguished open subsets, change of ring, closed points, quasi-compact topological spaces, irreducible topological spaces, irreducible closed subsets of  $\text{Spec}(A)$ , open closed subsets of  $\text{Spec}(A)$ , noetherian topological spaces.
  - The sheaf of regular functions on  $\text{Spec}(A)$ : definition, regular functions on a distinguished open subset, change of ring.
  - Quasi-coherent modules on  $\text{Spec}(A)$ : the  $\tilde{A}$ -module associated to an  $A$ -module, exactness, full faithfulness, quasi-coherent  $\tilde{A}$ -modules, comparison of some properties of  $M$  and  $\tilde{M}$ , direct and inverse images.
- Schemes: definitions, the canonical morphisms  $\text{Spec}(\mathcal{O}_x) \rightarrow X$  and  $\text{Spec}(k(x)) \rightarrow X$ , morphisms from a scheme to an affine scheme, subschemes and immersions, glueing schemes,  $S$ -schemes, products of schemes (definition and existence, properties, fibers of an  $S$ -scheme, points of a fibered product, points of an  $S$ -scheme and sections), topological properties of schemes, ring-theoretic properties of schemes (noetherian, reduced, integral, normal, integrally closed and regular schemes).
- Differentials on schemes: Kähler differentials, the sheaf of differentials.

Deux cours avaient lieu chaque semaine, d'une durée de 1h15 chacun. Trois d'entre eux ont été annulés, de sorte que je n'ai pas eu le temps de parler de cohomologie des faisceaux sur un espace topologique. Un professeur du CMI, V. Balaji, poursuit mon cours et donnera un examen global.

## 1.2 Pondichéry

L'accueil de V. Indumathy et de S. Ramaswamy au département de mathématiques de l'université de Pondichéry fut extrêmement chaleureux. Nous y avons passé la journée du 31/01/03. L'arithmétique et la géométrie algébrique n'y sont pas représentés, et c'est avec d'autant plus d'intérêt que les étudiants, de niveau licence, ont assisté à l'exposé introductif que j'y ai donné, intitulé « The Hasse principle on algebraic varieties ». J'ai tenté d'expliquer certains thèmes de recherche dans l'étude des points rationnels des variétés algébriques sur  $\mathbb{Q}$ , notamment dans le cas des courbes.

## 1.3 Mumbai

La semaine que j'ai passée au TIFR Mumbai fut la plus stimulante de mon séjour. Je disposais d'un bureau confortable, d'un accès à l'excellente bibliothèque et d'un compte informatique. Les nombreux chercheurs que j'ai rencontrés se sont toujours montrés accueillants, curieux et enthousiastes. Cet institut est mathématiquement très actif, et en géométrie algébrique en particulier ; j'en ai donc profité pour raconter dans les grandes lignes l'article que j'ai étudié en DEA, à l'occasion d'un exposé intitulé « The Tate conjecture for elliptic  $K3$  surfaces over finite fields, after Artin and Swinnerton-Dyer ».

## 1.4 Allahabad

Mon séjour s'est terminé par une visite du HRI, à Allahabad, où mon ami C. S. Dalawat m'a accueilli. J'ai effectué le trajet Mumbai/Allahabad par avion jusqu'à Delhi, puis en train de nuit. Là encore, je disposais d'un bureau, de la bibliothèque et d'un compte informatique ; j'ai été en contact avec deux chercheurs intéressés par la conjecture de Tate, ainsi qu'avec un étudiant, Krishnendu Gongopadhyay.

## 2 Finances

Les dépenses ont été prises en charge comme suit :

- À Chennai. Le CMI m'a donné 14000 roupies et a payé le logement à l'IMSc (du 01/02/03 au 16/02/03), ainsi que les repas que j'y ai pris (petit-déjeuner et dîner). Le mois passé à la SPIC Dealers' Welfare Association Guest House était à notre charge (6000 roupies par personne). Quant aux repas, nous les prenions midi et soir au restaurant pendant le mois de janvier, le CMI ne disposant pas de cantine.
- À Pondichéry. L'université m'a versé 100 roupies pour mon exposé, et 650 roupies pour les frais de logement et de transport.
- À Mumbai. Le TIFR m'a donné 1000 roupies, ce qui équivaut à un peu plus de la moitié du billet de train Chennai/Mumbai. Le prix des cantines (excellentes) et du logement (très confortable) au TIFR est dérisoire : de l'ordre de 400 roupies au total pour une semaine.
- À Allahabad. Le HRI m'a remboursé le trajet Mumbai/Delhi/Allahabad/Delhi au tarif d'un train en seconde classe avec air conditionné, soit 4500 roupies.
- Voyage. L'ENS, et plus précisément le DMA, remboursera les billets d'avion Paris/Chennai et Delhi/Paris (1064 EUR, British Airways).
- Divers. Le visa pour l'Inde et les vaccinations, facultatives mais conseillées, étaient à ma charge (respectivement 50 EUR et 80 EUR).