

Rapport sur le séjour en Inde

Catriona Maclean, Septembre 2001

J'ai participé avec Thomas Doumenc, Dimitri Zvonkine et Augustin Chainreau au deuxième échange d'élèves entre l'École Normale Supérieure, Paris et le Chennai Mathematical Institute (CMI), Chennai (anciennement Madras), Inde qui a eu lieu du 26 juillet 2001 au 15 septembre 2001. Dans le cadre de cet échange, trois ou quatre élèves de l'École Normale partent enseigner au CMI pendant le mois d'août, et deux ou trois élèves du CMI viendront travailler à Paris pendant 6 semaines en mai-juin.

Avec Thomas et Dimitri, je suis restée sept semaines en Inde. Entre le 25 juillet et le 31 août nous étions à Chennai, à part la période du 8 août au 12 août que nous avons passée à l'université de Pondichéry. Le 31 août nous sommes partis de Chennai pour aller à Bangalore, où nous avons visité le Indian Statistical Institute (ISI) et le site du Tata Institute of Fundamental Research (TIFR) à Bangalore. Nous avons quitté Bangalore le soir du 4 septembre pour arriver à Mumbai (anciennement Bombay) le soir du 5 septembre, où nous avons visité le site principal du TIFR pendant dix jours.

J'ai donné des exposés dans toutes les institutions que nous avons visitées, à part le CMI.

1 Les institutions et les contacts.

Pendant notre séjour, nous avons travaillé principalement au Chennai Mathematical Institute (CMI), où nous avons donné des cours aux élèves de deuxième et troisième années du "Bachelor's Degree" (qui correspond à la licence française) ainsi qu'aux élèves de quatrième année (Maîtrise). Nous avons également visité l'université de Pondichéry, l'ISI (Indian Statistical Institute) à Bangalore, et les deux TIFR à Bangalore et Mumbai.

Notre séjour à Chennai a été organisé par S. Sripathy, le secrétaire de l'institut, qui s'est occupé de nous avec beaucoup de gentillesse, et par le directeur, C.S. Seshadri. Je les remercie tous les deux pour leur hospitalité. Pour les cours, j'ai coopéré avec K. R. Nagarajan, qui doit continuer le cours d'algèbre après mon départ de Chennai, et que je remercie également pour son soutien.

Notre visite à l'université de Pondichéry a été organisée par le chef du département de mathématiques de l'université, S. Ramaswamy; l'accueil ici a été très chaleureux, et je conseille à tous ceux qui participeront à cet échange par la suite de visiter son institut: la ville de Pondichéry est charmante et les étudiants comme les membres de la faculté se sont donné de la peine pour nous la montrer.

A Bangalore, nous avons été accueillis par Jishnu Biswas, un jeune géomètre de l'ISI, et B.R. Nagaraj, professeur en équations aux dérivées partielles du TIFR Bangalore. Avec quelques étudiants, ils nous ont montré Bangalore pendant le week-end et pendant les soirées, et se sont occupés de nos exposés pendant les journées.

Notre séjour à Mumbai a été organisé par le secrétaire, D.B. Sawant, avec le professeur Eknath Ghate, qui s'est chargé de notre intégration à Mumbai. Le côté scientifique de mon séjour a été organisé par V.S. Srinivas, un professeur de géométrie complexe, avec qui j'ai eu des échanges scientifiques extrêmement intéressants.

Je tiens à dire que partout en Inde, nous avons été accueillis avec une hospitalité chaleureuse et aimable.

1.0.1 Conditions de travail

A Chennai, nous avons eu droit à un bureau au CMI, ainsi qu'à des comptes informatiques au CMI et à l' "Institute of Mathematical Sciences" où nous étions logés. Nous avons pu accéder aussi aux très complètes bibliothèques de l'institut, qui contenaient tous les livres que j'ai voulu consulter pendant mon séjour. Le CMI et l'IMSC possèdent tous les deux des salles informatiques très bien équipées et je n'ai manqué d'aucun matériel pour poursuivre mes recherches personnelles à Chennai.

Les conditions de travail du Tata Institute ont été les égales de celles du premier institut de recherche de n'importe quel pays- une grande bibliothèque, un bureau avec ordinateur et panorama sur la mer, et une salle informatique bien fournie, auxquels nous avons pu accéder à n'importe quelle heure du jour ou de la nuit.

2 Chennai Mathematical Institute- ses fonctions

Cet institut, très jeune, a été fondé il y a dix ans, et son program de "Bachelor's Degree" et "Master's Degree" n'existe que depuis quatre ans. Ceux-ci ont été instaurés par le directeur, C.S. Seshadri, qui a pris pour modèle l'École Normale Supérieure, dans la mesure où il espère créer un institut où se poursuivront et la recherche de haut niveau et l'enseignement. (La plupart des recherches de haut niveau indiennes ayant lieu dans des instituts de recherche plutôt que dans les universités, la recherche et l'enseignement y ont été, jusqu'à maintenant, essentiellement séparés.) Le CMI est un petit institut, comptant cette année 33 élèves en Bachelor's Degree- dont 20 élèves de première année, 7 élèves de deuxième année, et 6 élèves de troisième année. Les organisateurs espèrent qu'il sera bientôt possible d'élargir ce programme, en acceptant plus d'étudiants et en déménageant dans un campus plus adapté à leurs besoins. Il y a également un petit nombre d'étudiants qui poursuivent des études de doctorat ou de maîtrise. Comme le CMI a 13 professeurs en mathématiques, et 7 en informatique, les cours assurés par les étudiants français représentent un supplément non négligeable à leur programme.

Les cours proposés par le CMI donnent à leurs élèves de très bonnes bases en mathématiques: ils ont pour but de former des étudiants qui poursuivront plus tard des métiers mathématiques, en particulier, la recherche.

3 Les cours

Pendant mon séjour à Madras, j'ai donné deux cours différents:

3.1 Algebra 3

Ce cours est destiné aux étudiants de deuxième année du "Bachelor's Degree" du CMI. Les élèves ayant de bonnes bases en algèbre, le cours a pu avancer très rapidement, et en huit cours je suis arrivée à la factorisation des idéaux dans les anneaux d'entiers des corps quadratiques imaginaires.

3.1.1 Le programme

Pour mon cours, j'ai suivi les chapitres 10 et 11 du livre "Algebra" de Michael Artin, jusqu'à la factorisation des idéaux. J'ai présenté le contenu suivant:

- Cours 1- Définition d'un anneau, exemples d'anneaux. Construction formelle des entiers et des polynômes.
- Cours 2- Homomorphismes d'anneaux, image et noyau d'une homomorphisme. Idéaux.
- Cours 3- L'anneau quotient et les théorèmes d'isomorphisme.
- Cours 4- Les anneaux intègres et les corps de fractions. Les idéaux maximaux et le Nullstellensatz pour une algèbre de polynômes complexes.
- Cours 5- Les anneaux factoriels, les anneaux principaux, les éléments premiers et irréductibles. Les anneaux euclidiens.
- Cours 6- Le lemme de Gauss.
- Cours 7- Calcul explicite des éléments irréductibles de l'anneau des entiers de Gauss.
- Cours 8- Les anneaux d'entiers algébriques dans un corps algébrique. La factorisation des idéaux dans l'anneau des entiers d'un corps quadratique imaginaire.

Ce cours a été enseigné en huit exposés d'une heure et demie chacun, deux fois par semaine pendant quatre semaines. Le Professeur Nagarajan du CMI l'a continué après mon départ de Madras. En outre, j'ai préparé des devoirs une fois par semaine, pour lesquels j'ai distribué des modèles de solutions ainsi que des commentaires sur le travail des élèves.

Neuf élèves ont assisté à ce cours, dont sept élèves de deuxième année du Bachelor's degree et deux élèves de maîtrise.

3.2 Algebraic Curves

Ce cours est destiné aux élèves de troisième année et aux élèves de maîtrise. Pour ce cours je n'ai pas suivi de livre, mais j'ai conseillé aux élèves de lire le premier chapitre du livre de Robin Hartshorne, "Algebraic Geometry" ainsi que "Algebraic Curves" de Robert Walker.

3.2.1 Le Programme

- Cours 1- Les variétés algébriques affines et le Nullstellensatz. Les variétés algébriques irréductibles.
- Cours 2- Les variétés projectives. Les variétés projectives irréductibles.
- Cours 3- Le corps des fonctions méromorphes sur une variété projective ou affine. La dimension d'une variété projective irréductible.
- Cours 4- Les anneaux locaux et la lissitude d'une variété projective de dimension 1.
- Cours 5- Les morphismes entre variétés. Le théorème de finitude et le degré d'un morphisme.
- Cours 6- Les diviseurs sur les courbes, les diviseurs principaux et le groupe des classes de diviseurs. L'espace $H^0(O_C(D))$. Le morphisme associée à un diviseur et le théorème des plongements.
- Cours 7- Les différentielles de Kähler et le diviseur canonique. Le genre d'une courbe.
- Cours 8- Les théorèmes de Riemann-Roch et de Riemann-Hurwitz. Applications aux courbes de genre 1. Le genre algébrique d'une courbe complexe équivaut à son genre topologique.

Ce cours a été enseigné en huit cours d'une heure et demie chacun, deux fois par semaine pendant quatre semaines. 12 élèves ont assisté à ce cours, dont 6 élèves de troisième année, 4 élèves en thèse et 2 élèves de maîtrise.

Je tiens à dire que, grâce à la forte motivation et aux connaissances solides des élèves, à la petite taille des classes (qui m'a permis de développer un rapport personnel avec les étudiants), à la gentillesse et au soutien des professeurs qui nous ont encadrés, et à la responsabilité qu'on m'a confiée (il est rare d'avoir l'occasion d'enseigner des cours de ce niveau pendant sa thèse), mon séjour au CMI a été une introduction particulièrement stimulante et fructueuse à la pédagogie. C'est un privilège d'enseigner pour la première fois dans de telles conditions.

4 Les exposés

J'ai donné des exposés dans quatre instituts différents:

4.0.2 Université de Pondichéry: 10 août

A l'université de Pondichéry j'ai présenté un exposé intitulé "La topologie de $SO(3)$ ", dans lequel j'ai présenté une démonstration du fait que le groupe $SO(3)$ est homéomorphe à l'espace projectif $\mathbb{P}^3(\mathbb{R})$. J'en ai déduit que son groupe fondamental est isomorphe à $\mathbb{Z}/2\mathbb{Z}$, et j'ai expliqué les ramifications de ce résultat dans la mécanique quantique. Le public était d'une trentaine d'élèves et de membres de la faculté de mathématiques de Pondichéry. Ceci a été essentiellement un cours de vulgarisation mathématique; je n'ai utilisé que des idées mathématiques qui apparaissent dans un cursus de niveau licence en France. En particulier, tous les résultats dont j'avais besoin sur le groupe fondamental avaient été expliqués par Thomas dans son exposé la veille.

4.0.3 ISI Bangalore et TIFR Bangalore

Le 3 septembre, j'ai présenté un exposé intitulé "The Noether-Lefschetz locus", dans lequel j'ai démontré le théorème de Noether-Lefschetz, selon lequel toute courbe contenue dans une hypersurface de degré $d > 3$ générique de $\mathbb{P}^3(\mathbb{C})$ est une intersection complète. Cet exposé s'adressait à des chercheurs dans des domaines autres que la géométrie algébrique. Pour cet exposé, j'ai suivi la démonstration classique de ce résultat, due à Samuel Lefschetz. Le lendemain, devant un public de niveau semblable, j'ai présenté une démonstration tout à fait indépendante du même résultat, dans un esprit plus géométrique, due à Phillip Griffiths et Joe Harris, au TIFR de Bangalore.

4.0.4 TIFR Mumbai

Le TIFR de Mumbai est la première institution scientifique d'Inde et c'est un grand privilège d'avoir pu y présenter un exposé. Le 14 septembre j'y ai présenté un exposé intitulé "On the Noether-Lefschetz locus" dans lequel, devant un public de chercheurs spécialisés dans le domaine j'ai présenté les résultats de Griffiths et Harris avant de montrer comment les mêmes idées peuvent s'appliquer pour démontrer que le lieu de Noether-Lefschetz est dense dans l'espace des hypersurfaces lisses de $\mathbb{P}^3(\mathbb{C})$.

4.0.5 La coopération scientifique

Mes propres recherches scientifiques ont aussi pu avancer dans une ambiance fructueuse. J'ai profité en particulier de plusieurs conversations très intéressantes avec Ravindra, de l'IMSC et du TIFR Mumbai, Balaji du CMI et Srinivas du TIFR Mumbai.

5 Aspects pratiques et administratifs

Notre billet aller-retour à Chennai a été payé par l'École Normale. Nous avons pris les billets en janvier, avec Air India, pour un prix de 6735FF aller-

retour toutes taxes comprises. Il est important d'acheter le plus tôt possible le billet, afin d'avoir les meilleurs prix.

Pendant notre séjour à Chennai, nous étions logés à la guest house de l'Institute of Mathematical Sciences (IMSC). Ceci a été payé par le IMSC: nous avons eu droit chacun à un appartement de 60 mètres carrés, muni d'une salle de bains, d'un frigo, de la climatisation et d'une moustiquaire (sans lesquels le sommeil aurait été très difficile). Le CMI nous a versé 8400 roupies chacun pour nos cours: à l'heure actuelle, un franc équivaut à 6 roupies, mais le pouvoir d'achat d'une roupie en Inde est à peu de choses près le pouvoir d'achat d'un franc en France.

Nous avons pu prendre le dîner tous les jours dans la cantine des étudiants de l'IMSC- ce qui a beaucoup facilité notre intégration dans la vie indienne. J'ai rencontré ainsi des personnes qui m'ont beaucoup appris sur la culture indienne et avec qui j'espère garder une longue amitié. Tout aussi utile du point de vue de notre intégration: nous avons pu déjeuner tous les jours avec les élèves du CMI, ce qui a été un moment pour mieux connaître les élèves, et approfondir nos rapports ainsi que pour apprendre des choses sur leur culture. Pour tous les repas que j'ai pris dans ces deux cantines à Chennai, j'ai payé au total 1200 roupies.

Le CMI étant à une certaine distance de l'IMSC, nous avons effectué le trajet tous les jours en bus (3 roupies) ou en auto-rickshaw (50-60 roupies pour un rickshaw, quoi que puisse en dire le conducteur.)

A Pondichéry, nous avons été logés dans une guest-house universitaire, où nous avons eu droit, comme à l'IMSC, à une grande chambre avec douche et climatisation. Notre aller-retour à Pondichéry a été effectué en taxi, ce qui a été payé par l'université. (Pondichéry est à 100 kilomètres de Chennai.) La guesthouse nous a également été offerte, et on nous a versé 250 roupies chacun pour les conférences que nous avons données.

A Bangalore, nous étions logés dans la guest house de l'ISI, sur le campus. Nous avons payé nous-mêmes l'aller-retour en train de nuit climatisé entre Chennai et Bangalore, ce qui nous a coûté 1000 roupies par personne. Pour les conférences que j'ai données à Bangalore, le ISI m'a versé 300 roupies, et le TIFR 500 roupies.

Notre billet aller-retour entre Paris et Chennai comportant un escale à Mumbai, nous avons pu demander une longue escale à Mumbai pour éviter de payer en plus le transport entre Chennai et Mumbai. Au Tata Institute, nous avons été logés dans la guest house, sur le campus, et nous avons reçu chacun 1155 roupies pour payer nos frais de séjour. En particulier, ceci nous a servi pour payer la guesthouse (450 roupies pour 10 jours) et les repas dans la cantine à Mumbai (à environ 20 roupies par repas.)

6 Conclusion

J'espère beaucoup qu'il me sera bientôt possible de revenir dans ce pays où j'ai passé deux mois riches dont je garderai toujours un souvenir. Les gens

comme les paysages et la culture ont été totalement différents de tout ce que j'ai déjà vu- et ils m'ont fascinée. Je serai sans doute de retour: au moins, je l'espère.