

Compte-Rendu de Mission en Inde

Stéphane Fischler

16 octobre 2001

1 Généralités

Nous sommes partis en Inde à trois : Alexandru Oancea, Mladen Dimitrov et moi-même. Ce voyage coïncide avec la fin de notre scolarité à l'ENS.

Cette mission s'inscrit dans le cadre du protocole de jumelage entre l'École Normale Supérieure et le Chennai Mathematical Institute de Madras (Inde), désigné ci-dessous par les lettres CMI. Il s'agit d'un échange : deux élèves du CMI visiteront l'ENS en mai et juin 2001, durant six semaines.

Quant à nous, nous sommes restés 7 semaines en Inde, principalement à Madras, où nous donnions des cours au CMI. Nous avons atterri à Madras le 23 juillet 2000, et sommes repartis de Bombay le 11 septembre. A Madras, nous étions logés à la guest house de l'Institute of Mathematical Sciences (appelé souvent Matscience). Comme les cours au CMI ne commençaient que le 31 juillet, nous sommes partis exposer à l'université de Pondichéry (du mercredi 26 au samedi 29 juillet). Plus tard, nous sommes allés à Bangalore (du mercredi 23 au dimanche 27 août) pour visiter l'Indian Institute of Sciences, l'Indian Statistical Institute et la branche de Bangalore du Tata Institute of Fundamental Research (TIFR). Enfin, nous avons quitté Madras le vendredi 1er septembre, pour passer les dix derniers jours à Bombay, dans la branche principale du TIFR.

2 Rencontres

- Pondichéry : notre voyage à Pondichéry a été organisé avec Mme Indumathi, lors de sa venue à Paris fin mai 2000. Sur place, c'est surtout M. Ramaswamy qui s'est occupé de nous, avec une attention et une gentillesse toutes particulières. Il s'est occupé d'organiser notre transport (aller-retour en taxi; il est même venu nous chercher à Madras) et notre hébergement (dans une très bonne guest house, en centre ville). Tout a été fait pour maximiser les échanges avec les étudiants; par exemple, des cours ont été annulés pour permettre aux étudiants d'assister à nos exposés. En particulier, nous avons rencontré à cette occasion un ancien étudiant de Pondichéry, nommé Narayana, qui a ensuite étudié à Bangalore et se prépare, en octobre 2000, à venir à Paris pour faire une thèse sous la direction de Gilles Godefroy.
- Bangalore : notre visite à Bangalore a été organisée par C.S. Yogananda, qui est en poste à l'Indian Institute of Science. Nous avons été amenés à passer par lui car nous avons rencontré son frère, C.S. Aravinda, qui travaille au CMI et était à Paris fin mai 2000. En outre, au TIFR nous avons rencontré Nagaraj, un spécialiste d'équations aux dérivées partielles avec lequel nous avons discuté assez longuement.

- Bombay : notre semaine à Bombay a été organisée avec Eknath Ghate, qui travaille au TIFR et que nous avons rencontré en juin 2000 à Paris. Outre les nombreux moments que nous avons passés avec lui, cette visite à Bombay a été pour moi l'occasion de rencontrer T. Shorey et N. Saradha, qui travaillent sur des sujets proches du mien.
- Madras : notre visite à Madras a été organisée principalement par email, entre janvier et juillet 2000, avec C.S. Seshadri, C.S. Aravinda et le secrétaire du CMI, S. Sripathy. En outre, nous avons rencontré C.S. Seshadri et C.S. Aravinda à Paris le 29 mai. La principale difficulté a été de connaître le niveau exact des étudiants; j'y suis parvenu fin mai, mais Mladen n'a obtenu cette information cruciale que sur place, donc il a dû préparer son cours pour les étudiants de troisième année à Madras même. Rétrospectivement, la meilleure solution pour connaître le niveau des élèves aurait été de leur écrire directement, ou de demander à Rajeshwari (secrétaire du CMI en charge des enseignements) qui a enseigné le cours concerné, puis d'écrire à cette personne. En effet, le contenu exact qui est enseigné diffère souvent des programmes théoriques disponibles sur la page web¹ du CMI; en particulier, il est susceptible de varier fortement d'une année sur l'autre.

Nous avons rencontré, à la guest house, de nombreux thésards ou post-doc (en mathématiques ou en physique théorique) qui y habitaient aussi. Vivre avec eux pendant six semaines a beaucoup contribué à notre intégration dans la vie indienne, et j'espère vivement avoir l'occasion de revoir certains d'entre eux. Un autre moment privilégié de discussion avec des étudiants indiens étaient les repas que nous prenions, presque chaque midi en semaine, chez les étudiants du CMI. Ainsi avons-nous lié des relations mathématiques, mais aussi personnelles par des activités communes en-dehors des cours (concert, football, ...). En outre, j'ai discuté (de manière certes un peu moins proche, et plus mathématique) avec R. Balasubramanian, directeur de MatScience, qui travaille en théorie analytique des nombres. J'ai aussi travaillé assez longuement avec V. Sridhar, qui effectue au CMI une thèse en théorie algébrique des nombres; nous nous sommes expliqué (assez en détail) nos domaines de recherche respectifs. Enfin, suite à mon exposé de recherche et à des questions qui m'y ont été posées, j'ai travaillé avec Kannan (qui est en poste au CMI) pour essayer de généraliser les résultats de [2] en utilisant des techniques issues de l'étude des groupes algébriques. Ces discussions n'ont pas abouti (pour l'instant du moins), mais elles m'ont permis d'entrevoir ces méthodes que j'ignorais presque totalement. Il faut d'ailleurs noter que jusqu'à présent, la grande majorité des exposés que j'avais faits sur mes travaux de recherche étaient destinés à des théoriciens des nombres; c'est pour moi une chance que d'avoir pu exposer (à Madras et à Bombay) devant d'autres mathématiciens, qui ont souvent des approches différentes et intéressantes.

3 Enseignement

J'ai donné des cours aux élèves de troisième année du CMI. Ils sont 6; leur niveau est comparable à celui des élèves de première année à l'ENS (les classes préparatoires n'existant pas en Inde, les élèves intègrent le CMI après l'équivalent du baccalauréat). Toutefois, ils sont peut-être moins habitués que leurs homologues normaliens à résoudre (par calcul ou raisonnement déjà vu) des exercices classiques. Mais cela est compensé par le fait que leur culture générale mathématique est

1. <http://www.smi.ernet.in>

plus vaste. Ils ont également plus de connaissances (par exemple, ils font de l'analyse complexe dès la deuxième année), mais probablement moins approfondies (surtout en algèbre linéaire).

Le cours que j'ai enseigné s'inscrit dans le cursus de l'"undergraduate programme" mis en place au CMI. C'est un cours optionnel, intitulé "Théorie des Nombres"; mais les 6 élèves de la promotion l'ont tous suivi. Le volume horaire était de deux cours et une séance d'exercices par semaine, chacun durant une heure et demie. Le cours a commencé la semaine du 31 juillet, et j'ai enseigné jusqu'au jeudi 31 août (veille de mon départ pour Bombay), soit cinq semaines complètes (15 heures de cours, et 7 heures et demie d'exercices). Après mon départ, le cours est poursuivi par R. Balasubramanian, qui enseigne les aspects algébriques de la théorie des nombres, en parfaite complémentarité par rapport à mon cours.

L'assiduité des élèves a été satisfaisante, et leurs questions très nombreuses: ils étaient tous actifs en cours, et faisaient souvent des remarques tout à fait pertinentes. Leur niveau est assez homogène, excepté pour l'un d'entre eux qui est nettement plus fort (il a d'ailleurs obtenu une médaille d'or aux olympiades internationales).

Mon cours est une introduction à la théorie analytique des nombres. Il a pour objectif de montrer comment les méthodes analytiques permettent de traiter des problèmes variés en théorie des nombres, avec une attention particulière portée au problème des approximations rationnelles. Il est divisé en cinq parties à peu près égales :

1. Preuve du théorème des nombres premiers, sous sa forme faible: le nombre de nombres premiers jusqu'à x est équivalent à $\frac{x}{\log(x)}$. Pour cette partie, j'ai suivi le chapitre 2 de [4]. En outre, j'ai conclu cette partie en exposant, en une demi-heure, quelques conjectures et résultats partiels connus sur la fonction zêta de Riemann, au-delà de ceux que j'ai démontrés en cours.
2. Nombres irrationnels, exposant d'irrationalité: exemples de nombres irrationnels (e , $\sqrt{2}$, $\frac{\log(2)}{\log(3)}$, ...), lien avec les approximations rationnelles; définition de l'exposant d'irrationalité, exemple du nombre de Liouville, et théorème de Liouville (sur l'exposant d'irrationalité d'un nombre algébrique). Cette partie est un condensé de plusieurs sources, parmi lesquelles le chapitre 11 de [3].
3. Approximations rationnelles de $\log(2)$: preuve que l'exposant d'irrationalité de $\log(2)$ est inférieur à 4.7 (ce résultat est dû à Alladi et Robinson, à Chudnovski et à Nikishin, indépendamment, en 1979). La preuve est tirée de [5]; elle utilise le théorème des nombres premiers démontré dans la première partie.
4. Fractions continues: exposé classique de la théorie, avec preuves complètes des résultats utilisés dans la cinquième partie, en suivant le chapitre 10 de [3].
5. Approximations rationnelles de e : preuve du théorème de Davis (1978) qui donne exactement la précision maximale avec laquelle on peut approcher e par des rationnels. La preuve suit [5]; elle est aussi esquissée dans [1] (chapitre 2, §5.1). L'outil principal est la théorie des fractions continues, développée dans la quatrième partie.

4 Exposés

J'ai donné trois exposés différents, pour lesquels j'ai distribué des notes à ceux qui le souhaitent :

1. “Algebraic and Transcendental Numbers” : introduction aux nombres algébriques et transcendants, et à l'indépendance algébrique; liens avec l'approximation rationnelle (exposant d'irrationalité). Cet exposé ne contient pratiquement aucune démonstration, mais principalement des définitions, exemples, énoncés de théorèmes (classiques ou plus récents) et de conjectures. Je l'ai donné le 27 juillet à Pondichéry, devant une trentaine d'étudiants et une petite dizaine de professeurs. Il s'agit pour la plupart d'étudiants en Master of Science (équivalent approximatif de la maîtrise), mais avec des connaissances très faibles, surtout en algèbre. C'était la première fois que je faisais un tel exposé de “vulgarisation”, et j'ai pris beaucoup de plaisir aussi bien à le préparer qu'à l'exposer et à répondre aux nombreuses questions posées ensuite par les étudiants.
2. “Infinitely many $\zeta(2n+1)$ are irrational” : esquisse de la preuve d'un résultat récent de Rivoal [6] selon lequel une infinité de valeurs de la fonction zêta de Riemann aux entiers impairs sont irrationnelles. Cet exposé présente d'abord les travaux de Nikishin, puis la façon dont Rivoal s'en est inspiré pour démontrer son résultat. Il s'adresse à des chercheurs, mais pas forcément théoriciens des nombres. Je l'ai fait à trois reprises : à Madras (Institute of Mathematical Sciences) le 22 août, à Bangalore (Indian Institute of Science) le 25 août, et à Bombay (Tata Institute of Fundamental Research) le 5 septembre. Ces exposés m'ont donné l'occasion de travailler sur la preuve de Rivoal, qui utilise des méthodes voisines de celles qui interviennent dans mon domaine de recherche. Le résultat (spectaculaire) m'a bien sûr beaucoup motivé, et a fait venir de nombreux auditeurs.
3. “Orbits under algebraic groups and logarithms of algebraic numbers” : il s'agit d'un exposé de recherche, sur les résultats [2] que j'ai obtenus durant mes deux dernières années de scolarité à l'ENS. J'ai présenté cet exposé à Madras (CMI) le 28 août, et à Bombay (TIFR) le 7 septembre. J'avais déjà fait cet exposé plusieurs fois, lors de divers séminaires de théorie des nombres, mais toujours en français.

5 Aspects Financiers

L'ENS a payé le billet d'avion Paris-Madras et Bombay-Paris (par British Airways), soit environ 6000F. Sur place, l'hébergement (dans chacune des villes) était d'excellente qualité : air conditionné (sauf à Bangalore), chambres individuelles avec terrasse et salle de bains à Bombay et à Madras. A Madras, nous avons même droit à un vrai appartement chacun, de quatre pièces et plus de soixante mètres carrés ! D'autre part, chaque institut nous a ouvert l'accès aux bibliothèques et aux salles informatiques (avec création d'un compte à MatScience, au CMI et au TIFR de Bombay), y compris la possibilité d'imprimer et de photocopier gratuitement. Nous avons aussi bénéficié des cantines dans les différents instituts ou guest houses; au CMI, nous avons partagé la plupart des repas de midi avec les élèves (ce qui a été une occasion supplémentaire d'échanges très amicaux). En outre, nous avons reçu dans chacune des villes un support financier :

- Madras : le CMI a payé la guest house, et nous a versé 8000 roupies chacun pour les cours que nous avons donné. Parmi cet argent, 1200 roupies environ ont servi à chacun pour payer

ses repas pris à la cantine (des étudiants) de la guest house. En outre, le CMI a mis à notre disposition un chauffeur, qui est venu nous chercher tous les matins pour nous amener au CMI (le trajet depuis la guest house dure une demi-heure en voiture, mais si nous avions dû prendre le bus nous aurions mis plus d'une heure).

- Pondichéry : Le CMI a payé la guest house (3 nuits, soit 2100 roupies pour une chambre triple). L'université de Pondichéry nous a versé 700 roupies chacun, qui nous ont servi à payer le trajet aller-retour (en taxi) de Madras à Pondichéry. Les rivalités au sein de l'université de Pondichéry ont fait que M. Ramaswamy et Mme Indumathi ont dû avancer, avec leur argent personnel, le prix de la première nuit d'hébergement et du trajet aller en taxi. Heureusement nous nous en sommes aperçus et avons pu les rembourser.
- Bangalore : Le CMI a payé le billet de train (3ème classe² climatisée). Une institution de Bangalore a pris en charge notre hébergement (à la guest house du TIFR, dans le campus de l'Indian Institute of Science, en centre ville). Chaque université a payé environ 300 roupies à celui qui y a donné un exposé.
- Bombay : Le CMI a payé le billet de train (2ème classe³ climatisée). Le TIFR a donné 945 roupies à chacun de nous, ce qui nous a permis de payer la guest house et les repas.

Pour convertir les roupies en francs, mieux vaut ne pas se fier au simple cours (qui est d'environ 6 roupies pour un franc). Si on veut tenir compte du coût de la vie, une règle simple et assez efficace consiste à appliquer la parité : une roupie équivaut à un franc. Par exemple, à Madras, un ticket de bus (en ville) coûte en moyenne 6 roupies, un repas dans un restaurant (type fast-food) coûte 20 à 30 roupies, . . . Les salaires sont en conséquence : un thésard reçoit une bourse d'environ 6000 roupies par mois, ce qui lui donne un pouvoir d'achat à peu près équivalent à celui d'un thésard français. Il faut d'ailleurs noter que les élèves undergraduate du CMI ne touchent que 500 roupies par mois (en plus du logement et de la nourriture qui leur sont offerts).

6 Conclusion

Au cours de ce voyage, j'ai beaucoup progressé en anglais : j'ai pu mettre en pratique ce que j'avais appris lors des cours d'anglais mathématique de Leila Schneps, mon accent s'est amélioré ainsi que ma compréhension orale, et surtout je ne suis plus effrayé de faire un exposé en anglais.

Mais l'intérêt principal réside bien sûr ailleurs, dans la découverte d'un pays, d'une culture, et la rencontre de gens, que j'ai trouvés extraordinaires. Je n'ai maintenant plus qu'une envie : retourner en Inde . . .

Références

- [1] N.I. Fel'dman, Y.V. Nesterenko, *Number Theory IV: Transcendental Numbers*, A.N. Parshin & I.R. Shafarevich Eds., Encyclopaedia of Math. Sciences 44, Springer, 1998.
- [2] S. Fischler, *Orbits under algebraic groups and logarithms of algebraic numbers*, soumis.

2. En France, cela correspond à un intermédiaire entre première et seconde classe

3. Equivalent de la première classe française

- [3] G.H. Hardy & E.M. Wright, *An introduction to the theory of numbers*, 5ème édition, Oxford University Press, 1983.
- [4] A.E. Ingham, *The distribution of prime numbers*, Cambridge Tracts in Math. 30, Cambridge Univ. Press, 1932.
- [5] Y.V. Nesterenko, *Effective constructions in transcendental number theory*, Cours de D.E.A., Université Paris VI (2000), notes manuscrites.
- [6] T. Rivoal, *Irrationalité d'une infinité de valeurs de la fonction zêta aux entiers impairs*, Preprint, Université de Caen (2000).