

Rapport sur l'échange entre le CMI et l'ENS

25 Juillet-15 Septembre 2001
Thomas Doumenc

1 Généralités

1.1 Présentation

Entre le 25 Juillet et le 15 Septembre 2001 a eu lieu pour la deuxième année consécutive un échange entre l'ENS Ulm et le Chennai Mathematical Institute¹ (CMI). A cette occasion, je suis parti avec 3 autres élèves effectuer un séjour de sept semaines en Inde dont cinq à Madras (Chennai).

Ce séjour s'est déroulé dans des conditions exceptionnellement agréables en raison notamment des très bons conseils des élèves ayant fait ce voyage l'année dernière et surtout grâce à l'incroyable hospitalité dont ont fait preuve tous les responsables indiens à qui nous avons eu affaire.

1.2 Déroulement

Madras (25 Juillet-8 Août, 12 Août-30 Août)

Ces 5 semaines constituaient le cœur du séjour. Nous avons été logés dans la Guest House de l'IMSc² (Institute of Mathematical Science) située à environ 40 minutes de distance du CMI. Ce lieu de séjour offre tous les comforts possibles : Restaurant sur place, salle de sport, bibliothèque abondante en livres et périodiques, salles d'informatique, etc... Le professeur Balasubramanian, qui est le directeur de cet institut, a tout fait pour rendre notre installation la plus agréable possible.

¹<http://www.cmi.ac.in>

²<http://www.imsc.ernet.in>

De plus la présence de nombreux étudiants en doctorat de mathématiques ou de physique théorique en fait un endroit vivant où nous avons tous fait des rencontres intéressantes.

Le CMI en lui-même est situé au cœur de la ville de Madras et est très facilement accessible. Au niveau pratique, on nous a fourni un bureau et deux ordinateurs ainsi évidemment qu'un accès à la bibliothèque du CMI. Au niveau personnel, tout le monde nous a très bien accueilli, le professeur Seshadri et le professeur Nagarajan ont tout fait pour que les conditions de travail soient les plus agréables (Emplois du temps flexibles et calculés pour nous permettre de prendre des grands week-ends).

Les cours en eux-mêmes ont été très agréables grâce à l'intérêt et à la participation des élèves (voir plus loin pour une description du contenu mathématique). Les élèves m'ont étonné par leur volonté de ne rien laisser passer qu'ils ne comprenaient pas. Le fait de donner ces cours à des petites structures (5 à 8 élèves) permet de s'arrêter à chacune de leurs questions et ainsi de satisfaire (en général) leur exigence de compréhension. Cependant, j'ai eu de la chance d'enseigner un cours où les nouvelles définitions sont assez simples et ne requièrent pas de l'élève un effort majeur d'intuition.

Pondichéry (8 Août-12 Août)

Notre visite à l'université de Pondichéry a été organisée et complètement prise en charge par le professeur Ramaswamy. Il a envoyé une voiture nous chercher, nous a fourni une chambre dans la Guest House de l'université, nous a fait visiter la ville, nous a conseillé les lieux à voir aux alentours et s'est arrangé pour qu'il y ait toujours un étudiant pour nous accompagner quand lui ne pouvait pas.

L'université de Pondichéry est un très bel endroit qui semble malheureusement manquer de moyens (contrairement à d'autres sites comme le TIFR). La culture française y est très présente, il n'est pas rare d'entendre de jeunes indiens parler en français dans la rue. De même, plusieurs étudiants sont venus nous demander des renseignements sur les études en France.

Bangalore (1^{er} Septembre-5 Septembre)

Nous sommes allés à Bangalore après la fin des cours au CMI. Nous avons été reçus là-bas par Jishnu Biswas qui nous a fourni une chambre dans les locaux de la branche de Bangalore de l'Indian Statistical Institute ³ (ISI). Là

³<http://www.isibang.ac.in>

aussi les étudiants nous ont très bien accueillis et nous ont fait visiter la ville durant le week-end.

Le Lundi et le Mardi ont été utilisés pour donner des exposés et pour visiter (avec l'aide du professeur Nagarajan) le campus de l'IISc⁴ qui accueille la section du TIFR (plus spécialisée en analyse que la branche de Bombay) qui se trouve à Bangalore.

Bombay (5 Septembre-15 Septembre)

La dernière partie du voyage a été consacrée à une visite un peu plus longue que les précédentes (10 jours) dans un des centres de recherche les plus fameux d'Inde : Le Tata Institute of Fundamental Research (TIFR) de Bombay. Plus précisément, nous avons été accueillis en tant que visiteurs officiels de la School of Mathematics du TIFR⁵. Comme partout ailleurs, nous avons été logés dans la Guest House de l'institut.

Cette partie est sans doute une des plus agréables du voyage et certainement une des plus "mathématiquement fécondes" pour moi. Sans avoir rencontré quelqu'un qui travaille exactement dans le même sujet, j'ai cependant parlé avec beaucoup d'étudiants dont les domaines de recherche étaient limitrophes aux miens.

2 Contenu mathématique

2.1 Enseignement

J'ai donné un cours au CMI : "Representation theory of finite groups" (voir le programme en annexe). Avant le départ, il avait été prévu que j'enseigne aussi le cours d'Algèbre aux élèves de première année mais la grande taille de la nouvelle promotion (près de 20 élèves soit 3 fois plus que d'habitude) et le fait que leur niveau était presque inconnu et probablement très inhomogène ont fait que le professeur Nagarajan a préféré confier ce cours à quelqu'un de plus expérimenté.

Le cours a pratiquement suivi le programme donné en annexe à l'exception de la session sur les représentations du groupe symétrique qui n'a pas eu lieu. En effet, les étudiants m'ont appris qu'un autre professeur allait traiter

⁴<http://www.iisc.ernet.in>

⁵<http://www.math.tifr.res.in>

le sujet plus tard dans l'année et ils préféraient que j'en profite pour passer plus de temps sur la caractéristique p .

Une bonne partie de ce cours (caractères, induction) m'était bien connue grâce notamment au cours de M. Duflo que j'ai suivi à l'E.N.S. Ulm. Mais pour d'autres parties (comme la structure des algèbres semi-simples ou la caractéristique p), ce cours a été une très bonne occasion d'approfondir mes connaissances.

Les références que j'ai utilisées pour ce cours sont données sur le programme, la principale a été le livre de J.P. Serre.

2.2 Exposés

Introduction to fundamental groups (Pondichéry)

Cet exposé a été donné pour servir de préambule à l'exposé de Catriona MacLean "The topology of $SO(3)$ ". Il consistait en première partie à donner la définition et les premières propriétés du groupe fondamental, puis en deuxième partie à démontrer le théorème suivant :

Soit X un espace topologique connexe et simplement connexe. Soit G un groupe agissant librement et discrètement sur X , alors $\pi_1(X/G) = G$.

A q-analogue of Schur-Weyl duality (Bangalore)

Cet exposé consiste en un rappel de la dualité de Schur Weyl telle qu'on peut la trouver expliquée dans [1] par exemple suivi de la présentation de l'extension de cette dualité au "cas quantique", c'est-à-dire entre le groupe quantique $\mathcal{U}_q(\mathfrak{sl}_n)$ et l'algèbre de Hecke $\mathcal{H}_n(q)$. Cette extension a été obtenue par M. Jimbo dans [2].

Cet exposé a surtout servi à introduire quelques objets "quantiques" ainsi que quelques raisonnements habituels comme la réduction à $q = 1$.

References

- [1] **H. Weyl** The classical groups. Their invariants and Representations, *Princeton University Press* (1939)
- [2] **M. Jimbo** A q-analogue of $U(\mathfrak{gl}_{N+1})$, Hecke algebra, and the Yang-Baxter equation, *Lett. Math. Phys.* **N. 11** (1986)

3 Conclusion

N'ayant pas une grande habitude des exposés, ce voyage m'a particulièrement enrichi à ce niveau. De plus, c'était aussi une première occasion de parler au public en anglais, et il n'y a aucun doute que cette expérience m'a considérablement fait progresser dans la maîtrise de cette langue.

Mathématiquement, cet échange m'a permis de rencontrer beaucoup de personnes intéressantes et la visite des différents instituts de recherche m'a donné une vision plus précise de ce que pouvait représenter une carrière de chercheur. Les discussions avec les autres élèves ayant participé au voyage ont été tout aussi intéressantes, spécialement celles avec Dimitri en rapport avec le cours qu'il a donné, et que j'ai suivi, au CMI.

Enfin, la découverte d'un pays aussi fascinant que l'Inde a rendu ce voyage définitivement inoubliable et j'espère vraiment avoir l'occasion de réitérer cette expérience.

Annexe 1 : Programme du cours

Representation of finite groups

Lecture 1 : Definitions and Notations

Definitions, Indecomposable and Simple representations, Group algebra.

Lecture 2 : Characters

Definitions, Orthogonality relations, Class functions, The regular representation, Integral Properties (Burnside Theorem).

Lecture 3 : Canonical Decomposition

Minimal left ideals, Isotypic component, Idempotents, Structure of $k[G]$

Lecture 4 : Induction and Restriction

Induced representation, Induced characters, Frobenius Reciprocity, Mackey's criterion

Lecture 5 : Study of the symmetric group

Classification of the irreducible representations by Young's diagrams.

Lecture 6 : Some results for $k = \mathbb{R}$

Lecture 7 & 8 : Some results for $\text{char}(k) = p$

References

- [1] **Serre**, Representation theory of finite groups
- [2] **Curtis & Reiner**, Methods of representation theory (*Volume 1*)
- [3] **Curtis & Reiner**, Representation theory of finite groups and associative algebras
- [4] **Fulton & Harris**, Representation theory : A first course