Recensions mathématiques pour « *MathSciNet* »

et

Billets pour « *Images des Mathématiques* »

Reviewer : J. Merker

Reviewer number : 020952

Address :
Département de Mathématiques et Applications
École Normale Supérieure
45 rue d'Ulm
F-75230 Paris Cedex 05
France

****

B. Drinovec Drnovšek, F. Forstnerič[1]

Holomorphic curves in complex spaces

Duke Math. J.

Since the early 1990's, a series of papers impulsed mainly by works of Globevnik and of Forstnerič, has been devoted to constructing holomorphic discs $f : \Delta \to M$ in complex manifolds that are *proper*. The article under review offers a culmination of the subject, lowering as much as possible the convexity assumptions, working on complex spaces with singularities, and "properizing" not only discs, but general open Riemann surfaces whose boundary consists of a finite number of closed Jordan curves.

Thus, let X be an irreducible, reduced, paracompact complex space of dimension ≥ 2, let D be a finite bordered Riemann surface and suppose that one is given a $\mathcal{C}^2$ map $f : \overline{D} \to X$ which is holomorphic in D and satisfies $f(D) \not\subset X_{\rm sing}$. If there exists a $\mathcal{C}^\infty$ exhaustion function $\rho : X \to \mathbf{R}$ that is $(n-1)$-convex, namely the Levi form of $\rho|_{X_{\rm reg}}$ has at least 2 positive eigenvalues at every point, then in their main theorem, the two authors construct with admirable virtuosity a sequence of holomorphic maps $g_\nu : D \to X$ homotopic to $f|_D$ and converging to f on compacts of D which are all *proper*. Almost without efforts, one can add the constraint that the approximating g_ν should have the same fixed k-jet as the initial f at a finite number of points $\{z_j\} \subset D$. Also, as is common in Andreotti-Grauert's theory, 2 positive eigenvalues suffice well at every point of some $X_{>c} := \{\rho > c\}$ provided the initial boundary $f(\partial D)$ that one has to stretch and to recalibrate already lies in such an $X_{>c}$.

[1] On retrouve les références complètes en un instant sur MathSciNet.

In 2000 [Indiana Univ. Math. J. **49** (2000), 553–574 ; MR 1793682], Globevnik—the initiator of the subject to whom the paper is dedicated—had constructed proper discs in an embedded Stein manifold, building on an earlier work [Comment. Math. Helv. **67** (1992), 129–145 ; MR 1144617] joint with the second author ; one lifts a given boundary $f(\partial\Delta)$ to slightly higher level sets by a process of sewing a small analytic disc on each $f(\zeta)$, $\zeta \in \partial\Delta$, a disc which is contained in the complex tangent plane to a level-set of the exhaustion function ρ. Globevnik was the first to face with the problem of crossing the critical points of ρ.

Appealing to the technique of enlarging sublevel sets of ρ by a finite number of small bumps which hold the same $(n-1)$-convexity, the first-named author had treated before the case $D = \Delta$, $X = M$ smooth [Ann. Inst. Fourier (Grenoble), **57** (2007), no. 5, 1521–1535]. Such an M not necessarily being embedded in some $\mathbf{C}^N$, she could not appeal to a polynomial approximation in order to enlarge discs in noncritical shells, but she solved instead a certain Riemann-Hilbert problem using the solution to a suitable nonlinear Cousin problem. Working in dimension ≥ 3 because dimension 2 was already covered by Globevnik, she trickily passed around critical points by cutting in three independent $\mathbf{C}^2$-directions.

The second theorem of the paper under review states that, without convexity assumption on X, if $f : \overline{D} \to X$ is a C^2 embedding holomorphic in D, assumed to be a relatively compact smoothly bounded domain in an open Riemann surface S, then $f(\overline{D})$ has a basis of open Stein neighborhoods in X that are biholomorphic to open neighborhoods of $\overline{D}\times\{0\}^{n-1}$ in $S\times\mathbf{C}^{n-1}$. For the proof, transferring classical results of Wermer and of Stolzenberg to a complex space setting, the authors show first that $f(\overline{D})$ has a thin Stein neighborhood $\Omega \subset X$ which they embed as $\psi(\Omega) = \Sigma$ into some $\mathbf{C}^n$; next, they apply Theorem B for vector bundles to split $T\Sigma|_{\psi(f(\overline{D}))}$ by means of continuous vector fields holomorphic on $\psi(f(\overline{D}))$ and they thus recover, by means of flows, topologically controlled neighborhoods.

This theorem is used to get a new approximation result, useful to the main theorem : if $f : \overline{D} \to X$ is C^r ($r \geq 2$) and holomorphic in D with $f(D) \not\subset X_{\rm sing}$, there exist C^r approximations $f_\nu : \overline{D} \to X$ holomorphic in D, with $f_\nu \to f$ as $\nu \to \infty$, such that $f_\nu(\partial D) \subset X_{\rm reg}$ for every ν.

For the main theorem, starting therefore with $f(\partial D) \subset X_{\rm reg}$, the authors then push locally the boundary to higher ρ-levels in noncritical shells by adapting the first author's cited technique, always keeping the boundary inside $X_{\rm reg}$. A patching of holomorphic maps inspired by a recent work of the second author [Ann. of Math. (2) **163** (2006), 698–707 ; MR 2199229] based on the technique of gluing sprays gives a globalization. Remarkably, the authors build up a nonlinear Cartan-type theorem with estimates

up to the boundary thanks to a clever, technically deep, rapidly convergent iteration process insuring that domains of existence do not shrink. To pass above critical points, the authors apply a new method based on modifying the exhaustion function inspired by another recent work of the second author [Acta Math. **191** (2003), 143–189 ; MR 2051397].

In view of Franc Forstnerič's mathematical achievements in the past two decades, contemporary complex analysts would certainly desire that a comprehensive monograph appeared which would gather, synthesize and explain in a unified way all these beautiful results to a wide audience (with several illustrations), starting essentially from nothing but basic knowledge of several complex variables.

****

Xiaojun HUANG **and Wanke** YIN[2]

A Bishop surface with a vanishing Bishop invariant

Inventiones Mathematicæ **176** (2009), 461–520

Let $M \subset \mathbf{C}^2$ be a real analytic surface localized at one point p given in centered complex coordinates $(z, w = u + iv) \in \mathbf{C}^2$ by $w = z\bar{z} + \lambda(z^2 + \bar{z}^2) + \mathrm{O}(|z|^3)$, where $\lambda \in [0, \infty]$ is Bishop's invariant. It is called *non-exceptional* if $\lambda \neq 0, 1/2, \infty$ and if $\lambda x^2 - x + \lambda = 0$ has no root of modulus 1. Moser-Webser [Acta Math. **150** (1983), 255–296 ; MR0709143 (85c :32034)] showed that if λ is not exceptional, $(M, 0)$ can be formally straightened to the normal form :

$$u = z\bar{z} + \big(\lambda + \varepsilon\, u^s\big)\big(z^2 + \bar{z}^2\big), \qquad v = 0,$$

for some $\varepsilon \in \{0, 1, -1\}$ and some $s \in \mathbb{Z}^+$, and also, using a dynamically oriented object consisting of an intrinsic pair of involutions they established convergence of the formal straightening when M is moreover *elliptic*, namely $0 < \lambda < 1/2$.

In the intriguing limit case $\lambda = 0$ in which M can be shown to be either of the form $w = z\bar{z} + z^s + \bar{z}^s + \mathrm{O}\big(|z|^{s+1}\big)$ for some $s \geqslant 3$ or else of the form $w = z\bar{z} + \mathrm{O}(|z|^n)$ for arbitrarily large n, Moser [Ann. Acad. Sci. Fenn. Math. **10** (1985), 397–410 ; MR0802502 (87c :32024)] derived a formal pseudonormal form :

$$w = z\bar{z} + z^s + \bar{z}^s + 2\mathrm{Re}\Big\{ \sum_{j \geqslant s+1} a_j\, z^j \Big\},$$

where the $a_j \in \mathbb{C}$; in the second simpler case $s = \infty$, Moser showed that M is in fact holomorphically equivalent to $w = z\bar{z}$. When $\lambda = 0$ and

[2] Recension envoyée mi-décembre 2009.

$s < \infty$, it was left open to derive other invariants and to understand the hull. Huang and Krantz [Duke Math. J. **78** (1995), 213–228 ; MR1328757 (96f :32026)] showed analyticity, up to 0, of the geometric object formed by attaching Bishop discs. Moser asked whether normal forms are algebraic. Gong [Duke Math. J. **74** (1994), no. 1, 145–157 ; MR1271467 (95c :32014)] showed that there are infinitely many invariants under the (smaller) local group of holomorphic symplectic transformations, even when $0 < \lambda < 1/2$.

Dealing with a new weighting system, the two authors provide a complete set of invariants and show that the modulus space of Bishop surfaces having $\lambda = 0$ and $s < \infty$ is an infinite-dimensional manifold in a Fréchet space, thus giving a negative answer to Moser's expectation that such surfaces should be determined by a finite truncation of their Taylor series. As an application, the authors show the generic non-algebraizability of such real analytic surfaces, using a Baire category argument similar to the one employed by Gaussier-Merker [Math. Z. **247** (2004), no. 2, 337–383 ; MR2064056 (2005c :32043)] in the case of CR tubes and pushed further by Forstnerič [Manuscr. Math. **115** (2004), 489–494 ; MR2103663 (2005h :32087)].

Some exact statements are as follows. Since no pair of involutions is available, the authors use the flattening theorem of Huang-Krantz to study, at each truncation level, a certain semi-non-linear equation, which is quite different from what appeared before in the literature.

First of all, through an appropriate formal equivalence, one may annihilate the z^{ks} and the z^{ks+1} (any $k \geqslant 1$) in the remainder terms, giving an essentially unique (up to $(z,w) \mapsto (e^{\sqrt{-1}\theta}z, w)$ where θ is some constant with $e^{\sqrt{-1}s\theta} = 1$) formal normal form : $w = z\bar{z} + z^s + \bar{z}^s + 2\,\mathrm{Re}\sum_{k=1}^{\infty}\sum_{j=2}^{s-1} a_{ks+j}\, z^{ks+j}$. Two local *real analytic* Bishop surfaces of equations :

$$w = z\bar{z} + z^s + \bar{z}^s + 2\,\mathrm{Re}\sum_{k=1}^{\infty}\sum_{j=2}^{s-1} a_{ks+j}\, z^{ks+j}$$

$$w' = z'\bar{z}' + z'^s + \bar{z}'^s + 2\,\mathrm{Re}\sum_{k=1}^{\infty}\sum_{j=2}^{s-1} a'_{ks+j}\, z'^{ks+j}$$

are biholomorphic if and only if there exists a constant θ with $e^{s\theta\sqrt{-1}} = 1$ such that $a_{ks+j} = e^{\theta j\sqrt{-1}}\, a'_{ks+j}$. It is therefore somewhat plausible that most elliptic Bishop surfaces with $\lambda = 0$ and $s < \infty$ are not equivalent to polynomial, or even to Nash-algebraic surfaces, and the latter statement is established. Furthermore, the authors prove that any formal equivalence between two real analytic such surfaces is necessarily convergent,

i.e. (bi)holomorphic. The problem of convergence of any map to the formal normal form is not addressed in the paper.

****

Gregor Fels and Wilhelm Kaup

Acta Mathematica

The paper under review mainly studies 5-dimensional smooth CR manifolds of hypersurface type that are 2-nondegenerate, have rank 1 Levi form at every point and are locally homogeneous under a finite-dimensional Lie group of smooth CR transformations (with such assumptions, there is a real analytic atlas and local embeddability in $\mathbb{C}^3$ holds). A notable example well studied by the two authors in a previous article [J. Reine Angew. Math. **604** (2007), 47–71 ; MR2320313 (2009c :32068)] is the tube over the light cone $\mathcal{T} = \{z \in \mathbb{C}^3 : (\operatorname{Re} z_1)^2 + (\operatorname{Re} z_2)^2 = (\operatorname{Re} z_3)^2 \operatorname{and} \operatorname{Re} z_3 > 0\}$. The Lie algebra of local infinitesimal CR transformations $\mathfrak{hol}(\mathcal{T}, a)$ at point $a \in \mathcal{T}$ is isomorphic to $\mathfrak{so}(2,3)$ and hence has dimension 10.

The paper starts with the classification of all affinely homogeneous surfaces $F \subset \mathbb{R}^3$ due to M. Eastwood and V. Ezhov [MR1434565 (97j :53011)] and to B. Doubrov, B. Komrakov and M. Rabinovich [Geom. Dedicata **77** (1999), no. 1, 11–69 ; MR1706516 (2000h :53015)]. From the complete list, the authors extract only those surfaces that are nondegenerate and not cylindrical, so as to insure that the corresponding tube manifolds $M := F + i\mathbb{R}^3$ in $\mathbb{C}^3$ are 2-nondegenerate with rank 1 Levi form at every point :

(1) $F = \{x_1^2 + x_2^2 = x_3^2,\ x_3 > 0\}$ the future light cone as above ;

(2a) $F = \{r(\cos t, \sin t, e^{\omega t}) \in \mathbb{R}^3 : r \in \mathbb{R}^+ \text{ and } t \in \mathbb{R}\}$ with $\omega > 0$ arbitrary ;

(2b) $F = \{r(1, t, e^t) \in \mathbb{R}^3 : r \in \mathbb{R}^+ \text{ and } t \in \mathbb{R}\}$;

(2c) $F = \{r(1, e^t, e^{\theta t}) \in \mathbb{R}^3 : r \in \mathbb{R}^+ \text{ and } t \in \mathbb{R}\}$ with $\theta > 2$ arbitrary ;

(3) $F = \{c(t) + rc'(t) \in \mathbb{R}^3 : r \in \mathbb{R}^+ \text{ and } t \in \mathbb{R}\}$, where $c(t) := (t, t^2, t^3)$ parametrizes the *twisted cubic* $\{(t, t^2, t^3) : t \in \mathbb{R}\}$ in $\mathbb{R}^3$ and $c'(t) = (1, 2t, 3t^2)$.

The limit case $\omega = 0$ in $(2a)$ regives the future light cone (1), while the limit case $\theta = 2$ in (2c) gives $\{x \in \mathbb{R}^3 : x_1 x_3 = x_2^2 \text{ and } x_1, x_2 > 0\}$ which is locally linearly (but not globally) equivalent to (1). These five (families of) surfaces are known to be pairwise locally inequivalent under affine transformations.

The first main aspect of this far-reaching paper is to develope a method which enables one to determine explicitly the Lie algebras $\mathfrak{hol}(M, a)$ of infinitesimal CR transformations of the various CR germs (M, a), without having to study their local defining equations in coordinates. The authors

then show that for all surfaces F in (1)-(3), the corresponding tube manifolds $M = F + i\mathbb{R}^3$ (that are 2-nondegenerate with rank 1 Levi form) are all pairwise locally CR *in*equivalent, and furthermore, for any point $a \in M$: (i) the Lie algebra $\mathfrak{hol}(M, a)$ is solvable and has dimension 5 ; (ii) the stability group $\mathrm{Aut}(M, a)$ is trivial ; (iii) every homogeneous real analytic CR manifold M' that is locally CR equivalent to M is already globally CR equivalent to M.

Strikingly, the second main result states that *every 5-dimensional locally homogeneous 2-nondegenerate CR manifold having rank 1 Levi form at every point is locally CR equivalent to one and only tube $F + i\mathbb{R}^3$ with F being one of the 5 surfaces (1)–(3)*. As a corollary, using Cartan's list for $\mathbb{C}^2$ ([Ann. Mat. Pura Appl. **11** (1933), no. 1, 17–90 ; MR1553196] ; *see* also Isaev [J. Lie Theory **16** (2006), no. 3, 407–426 ; MR2248138 (2007k :32048)]), the authors deduce a *complete classification* of all real analytic hypersurfaces in $\mathbb{C}^3$ having degenerate Levi form that are locally homogeneous. Together with the results of Loboda who classified locally homogeneous hypersurfaces of $\mathbb{C}^3$ having *nondegenerate* Levi form and isotropy groups of dimension $\geqslant 1$ [Proc. Steklov Inst. Math. **235** (2001), 107–135 ; MR1886578 (2003b :32041)], [Funct. Anal. Appl. **36** (2002), 151–153 ; MR1922023 (2003e :32068)], [Math. Notes **73** (2003), 419–423 ; MR1992605 (2004e :32038)], the research field is coming close to a full classication of locally homogeneous (real analytic) hypersurfaces in $\mathbb{C}^3$.

****

Klas Diederich and Sergey Pinchuk

Complex Variables and Elliptic Equations

Let D and D' be two bounded domains in $\mathbb{C}^n$ ($n \geqslant 2$) having real analytic boundaries ∂D and $\partial D'$ and let $h\colon D \to D'$ be any proper holomorphic map. The paper under review surveys most of the deep results obtained by Pinchuk, by Diederich and by Fornaess (sometimes jointly) about analytic boundary regularity of h up to ∂D. The case when D and D' are both pseudoconvex has been answered positively two decades ago [Math. Ann. **282** (1988), 681–700 ; MR0970228 (89m :32045)], thanks to the $\mathcal{C}^\infty$ extension of h up to ∂D, which was already known at that time through property R of the Bergman kernel ; immediately, the Diederich-Fornaess theorem inspired several generalizations and localizations. In 1995, Diederich and Pinchuk [Indiana Univ. Math. J. **44** (1995), 1089–1126 ; MR1386762 (97g :32031)] succeeded, in dimension $n = 2$, to treat the general, not necessarily pseudoconvex case. More recently, in a strong and mature work [Michigan Math. J. **51** (2003), 111–140 ; MR1960924 (2004k :32058a)],

Diederich and Pinchuk were able to establish real analyticity of any *continuous* CR map $f : M \to M'$ between two local real analytic hypersurfaces of finite D'Angelo type, *e.g.* pieces of bounded real analytic ∂D and $\partial D'$; independently and a little bit earlier, at the end of a paper mainly devoted to the study of the so-called *reflection function* $\mathcal{R}'_h$ [Ann. Inst. Fourier (Grenoble) **52** (2002), no. 5, 1443–1523 ; MR1935554 (2004c :32071)], the reviewer obtained the same conclusion under the much more tractable assumption that f is $\mathcal{C}^\infty$. Also, the two authors proved in 2004 that if h extends to a neighborhood of $\overline{D}$ as an analytic set (this usually comes in the arguments as the first, most difficult step), then (second, more accessible step) h automatically extends as a holomorphic graph [J. Geom. Anal. **14** (2004), 231–239 ; MR2051685 (2005d :32027)].

The main interest of this survey paper is that it introduces nonspecialists in the field by presenting neatly and in a very accessible way all the basic techniques of the so-called *geometric reflection principle*. Remarkably, thoughtful emphasis is put at the same time on what are the objective, what are the obstacles, what is already known, and what is still missing to answer the general question, when pseudoconcavity and pseudoconvexity are intertwined all over ∂D, so that frontier rigidity and automatic Hartogs extension interact in a somewhat ambiguous, not completely understood way. Both techniques of extension by means of pairs of points located across ∂D and $\partial D'$, and the technique — developed by Shafikov when the target $\partial D'$ is algebraic — of extension along Segre varieties are discussed.

Among the novel extant results is the following. Consider the disjoint union decomposition :

$$\partial D = \partial D_s^+ \cup \partial D_s^- \cup \partial D_0,$$

where :

$\partial D_s^+ := \{z \in \partial D\colon\ \partial D$ is strictly pseudoconvex near $z\}$;

$\partial D_s^- := \{z \in \partial D\colon\ \exists$ at least one eigenvalue of the Levi form of ∂D at z which is $< 0\}$;

$\partial D_0 := \{z \in \partial D\colon$ at least one eigenvalue of the Levi form of ∂D at z vanishes and all eigenvalues are $\geqslant 0\}$.

Then it is shown that there exists an open dense subset $\mathcal{D}_s^+$ of ∂D_s^+ such that the proper holomorphic map $h\colon D \to D'$ extends holomorphically across every point of $\mathcal{D}_s^+$, in dimension $n \geqslant 3$. It follows immediately that extension holds past the dense open subset $\mathcal{D} := \mathcal{D}_s^+ \cup \partial D_s^-$ of ∂D.

Remarks to the Editors : this laudatory review reflects the opinion of the international Several Complex Variables community about Pinchuk's really deep results (*pauca sed matura*), leaving aside – I regret to say – the counter-opinion regularly formulated by an eager CR team based at La Jolla. Although I am not anymore involved in the regularity of CR mappings

(thanks, God ! *pax* came back !), I wanted to say that this survey seemed to me to be potentially very useful to younger researchers who would desire to enter the field, and up to now, there did not exist any such easily readable survey. Really, the writer(s) write(s) very well there.

****

Bernard Coupet, Alexander Sukhov and Alexander Tumanov

Proper J-holomorphic discs in Stein domains of dimension 2

Amer. J. Math. **131** (2009), 653–674

Let (M, J) be an almost complex manifold of real dimension 4 admitting a strictly J-plurisubharmonic exhaustion function ρ. The three authors build large embedded J-holomorphic discs directed by any preassigned line element in the following sense : for every noncritical value c of ρ, for every point $p \in \Omega_c := \{\rho < c\}$ inside the corresponding strongly pseudoconvex sublevel set, and for every real vector $v_p \in T_pM$ at p, they construct a J-holomorphic immersion $f\colon \overline{\Delta} \longrightarrow \Omega_c$ from the closed unit disc $\overline{\Delta} \subset \mathbf{C}$ passing through the line element (p, v_p), *i.e.* satisfying $f(0) = p$ and $df_0\big(\partial/\partial \mathrm{Re}\,\zeta\big) = \lambda\, v_p$ for some $\lambda > 0$, which is *attached* to the strongly J-pseudoconvex boundary $\partial\Omega_c$, namely whose boundary $f(\partial\Delta)$ satisfies $f(\partial\Delta) \subset \partial\Omega_c$, hence goes as far as one wants from (p, v_p) if c was chosen large at the beginning.

Based on Floer homology and on works of Viterbo [Geom. Funct. Anal. **9** (1999), no. 5, 985–1033 ; MR1726235 (2000j :53115)] and of D. Hermann [Duke Math. J. **103** (2000), no. 2, 335–374 ; MR1760631 (2001b :53112)], Biolley [arxiv.org/abs/math/0404551] obtained a few years before a similar statement without precribing the tangential direction but in arbitrary (real) dimension $2n$, under the assumption that ρ does not have critical points whose Morse index is maximal possible, equal to n. Proceeding differently by relying instead upon classical methods of quasiconformal mappings and of the multidimensional Riemann-Hilbert problem which were developed by Ahlfors, Bers, Boyarskii, Lavrentiev, Morrey, Vekua, the three authors employ singular integral operators (transforms) of Cauchy-Green-Pompeiu, of Ahlfors-Beurling and of Bergman in order to solve analytically a certain nonlinear elliptic system of partial differential equations which, geometrically speaking, corresponds to the purpose of attaching step by step some J-holomorphic disc to a certain thin J-totally real 2-torus immersed in M that is constructed inductively as a bundle of small circles sitting inside some small transversal J-holomorphic curves centered at all points of the boundary of a previously contructed J-holomorphic disc that one wants to extend a little bit above a given level-set of ρ. For domains in

$(\mathbf{C}^n, J_{\rm st})$ with $n \geq 2$, this clever geometric technique was devised by Forstnerič and Globevnik [Comment. Math. Helv. **67** (1992), 129–145], the case $2n \geq 6$ (not considered in the paper under review) reducing to $2n = 4$ simply by slicing, an argument which clearly fails when the complex structure is not integrable. Far reaching generalizations have been obtained recently by Forstnerič and Drinovec Drnovšek [Duke Math. J. **139** (2007), 203–254 ; MR2352132 (2008g :32019)] who stretched some bordered Riemann surfaces inside *singular* complex spaces and who only assumed $(n-1)$-convexity of the exhaustion function. Accordingly, one may expect further extensions of the now well developed pseudoholomorphic machinery.

Patrick Ahern and Xiangong Gong

Annales Fac. Sci. Toulouse

Consider a local real analytic n-dimensional submanifold M of $\mathbb{C}^n$ having a set $C \subset M$ of parabolic complex tangencies which is a codimension one submanifold, maximally real in $\mathbb{C}^n$. In suitable holomorphic coordinates z_1, $z' \overset{def}{=} (z_2, \ldots, z_{n-1}) = x' + iy'$ and z_n one may represent C by $z_1 + \overline{z}_1 = 0$ inside :

$$M: \qquad z_n = (z_1 + \overline{z}_1)^2 p(z_1, \overline{z}_1, x'), \qquad y' = (z_1 + \overline{z}_1) q(z_1, \overline{z}_1, x'),$$

with p and q convergent, $p(0) = 1$, $q(0) = 0$. The first result states that each such M centered at 0 is formally equivalent to the quadric :

$$Q: \qquad z_n = (z_1 + \overline{z}_1)^2, \qquad \operatorname{Im} z_1 = \cdots = \operatorname{Im} z_n = 0,$$

by means of a formal invertible $h\colon (\mathbb{C}^n, 0) \to (\mathbb{C}^n, 0)$ of the form $h = z + \sum_{|\alpha| \geqslant 2} h_\alpha \, z^\alpha$. Set $\omega := dz_1 \wedge \cdots \wedge dz_n$. If $\operatorname{Re} \omega|_M = 0$, there exists in addition such an h which is *unimodular* : $h^* \omega = \omega$.

In one variable $z \in \mathbb{C}$, for instance for parabolic holomorphic germs $f(z) = z + z^2 + z^3 + \sum_{\kappa \geqslant 4} f_\kappa z^\kappa$, there is similarly one single formal normal form : $z + z^2 + z^3$. Écalle [Publications Mathématiques d'Orsay 81 ; MR0670417 (84h :30077a)] and Voronin [Funktsional. Anal. i Prilozhen. 15 (1981), no. 1, 1–17, 96 ; MR0609790 (82h :58008)] introduced a method called *functional moduli* showing that there are infinitely many biholomorphic equivalence classes parametrized by certain pairs of functions of period 1 that are holomorphic in $\{\operatorname{Re} \zeta > 0\}$ and in $\{\operatorname{Re} \zeta < 0\}$. Later, Voronin [Adv. Soviet Math., **14**, Amer. Math. Soc., Providence, RI (1993), 139–233 ; MR1206044 (94d :58018)] developed a higher-dimensional theory for certain germs of holomorphic mappings $(\mathbb{C}^n, 0) \to (\mathbb{C}^n, 0)$ that the two authors succeed in the paper under review to apply in this context to the pair of Moser-Webster involutions [Acta Math. **150** (1983), 255-296 ; MR0709143

(85c :32034)] in order to establish that there exist large classes of *inequivalent* germs, though all are formally normalized by Q. The main theorem precisely states that there exists a germ $(M, 0)$ such that, with the dilation

$$L_r: \qquad z_1 \mapsto rz_1, \ \ \ldots, \ \ z_{n-1} \mapsto rz_{n-1}, \qquad z_n \mapsto r^2 z_n \qquad (r>0),$$

the germ $L_r(M)$ is not equivalent to M under any unimodular holomorphic map if $r \neq 1$, while every such $L_r(M)$ is formally equivalent to Q under some unimodular formal map.

****

Beloshapka, Ezhov and Schmalz

Russian J. of Mathematical Physics

Let $M \subset \mathbb{C}^3$ be a CR, generic, real analytic submanifold, which is 2-codimensional, hence of CR dimension 1. If the Levi form of M is not identically zero and if M is almost everywhere minimal (*i.e.* of finite Bloom-Graham type), then locally in some neighborhood $\mathcal{U}_p \subset M$ of a Zariski-generic point p of M, the Levi-form is nonzero, the distribution $D' := T^cM + \big[T^cM, T^cM\big]$ is 3-dimensional and furthermore, the distribution $D'' := D' + \big[D, D'\big]$ spans $TM\big|_{\mathcal{U}_p}$. A decade ago and in the same journal [Russian J. Math. Phys. **5** (2), 399–404 (1997) ; MR1605653 (99f :32014)], Beloshapka exhibited the cubic generic submanifold $\operatorname{Im} w_1 = z\bar{z}$, $\operatorname{Im} w_2 = z\bar{z}(z+\bar{z})$ as the "simplest model" among these generic manifolds, and showed that its infinitesimal CR Lie algebra consists of a certain semi-direct product of $\mathbf{R}$ with the unique irreducible 4-dimensional nilpotent real Lie algebra $\underline{\mathbf{n}}_1^4$. For such a class of CR manifolds, the paper under review provides a complete analog of Cartan's construction of a (projective) connection for deformations of the Heisenberg sphere $\operatorname{Im} w = z\bar{z}$, the above model being *a posteriori* characterized by the vanishing of exactly 4 functionally independent curvature tensors.

In fact, the three authors study more generally what they call *Engel CR manifolds*, which are only $\mathcal{C}^\infty$ and are not necessarily embedded in $\mathbb{C}^3$. By definition, these consist of a $\mathcal{C}^\infty$ 4-dimensional manifold M equipped with a 2-dimensional (sub)distribution $D \subset TM$ together with an almost complex structure $J : D \to D$, $J^2 = -\mathrm{Id}$, the Frobenius-like integrability condition being automatically satisfied in CR dimension one. Further, the "Engelian" nature [*cf.* F. Engel's ancient study under Sophus Lie's supervision in Leipz. Ber. **41** (1889), 157–176] requires that $D' := D + [D, D]$ consists of a 3-dimensional distribution, and that $D'' := D' + [D, D'] = TM$, uniformly at all points of M. Then there is a unique direction field $\ell \subset D$ with $[\ell, D'] \equiv 0 \mod D'$. The equivalence problem for Engel manifolds

respecting such a direction field identifies with the equivalence problem for a third order ordinary differential equation $y''' = F(x, y, y', y'')$ under contact transformations. H. Sato and A.Y. Yoshikawa [J. Math. Soc. Japan **50** (1998), no. 4, 993–1013 ; MR1643383] constructed a normal Cartan connection with structure group $\mathrm{Sp}(2, \mathbb{R})$, the equivalence to $y''' = 0$ being characterized by the vanishing of two fundamental differential invariants. However, the existence of a supplementary complex structure J on D changes completely the structure Lie algebra to $\mathbb{R} \ltimes \underline{\mathfrak{n}}_1^4$, the factor $\mathbb{R}$ corresponding to dilations of the cubic.

Then at a fixed point $p \in M$, one defines the (initial) Levi-Tanaka algebra by $\mathfrak{g}_- := \mathfrak{g}_{-3} \oplus \mathfrak{g}_{-2} \oplus \mathfrak{g}_{-1} \simeq \mathfrak{n}_1^4$, where $\mathfrak{g}_{-1} := D_p$, where $\mathfrak{g}_{-2} := D'_p \big/ D_p$ and where $\mathfrak{g}_{-3} := T_pM \big/ D'_p$. Following Tanaka [Japan J. Math. **2** (1976), no. 1, 131–190 ; MR0589931 (58 #28645)] or a more recent restitution given D.V. Alekseevsky and F. Spiro [Selected topics in Cauchy-Riemann geometry, 1–37, Quad. Mat., 9, Dept. Math., Seconda Univ. Napoli, Caserta, 2001 ; MR2049139 (2004k :53035)], the infinitesimal automorphisms of $\mathfrak{g}_-$ preserving the two distinguished direction $V_y \in \mathfrak{g}_{-1}$ and JV_y identify with $\mathfrak{g}_0 := \mathbb{R}$ and the other prolongations $\mathfrak{g}_\ell$ with $\ell \geqslant 1$ are then zero. Of course, $\mathfrak{g}_- \oplus \mathfrak{g}_0$ identifies with the infinitesimal CR Lie algebra of the cubic.

With M being an arbitrary Engel CR manifold and defining then $\mathcal{G}$ to be the $\mathbb{R}^*$-principal bundle of all distinguished vectors tV_y, $t \in \mathbb{R}^*$, the authors construct a canonical Cartan connection valued in $\mathbb{R} \ltimes \underline{\mathfrak{n}}_1^4$ by making the commutator bracket relations "as close as possible" to the corresponding relations for the cubic model, taking account of the cohomology $H^2(\mathfrak{g}_-, \mathfrak{g})$. At then end, 4 functionally independent curvature components, R^x_{y2}, R^y_{y2}, R^2_{x3}, R^y_{x3} are gained by computing the Lie brackets between 5 progressively normalized vector fields $\widehat{V}_0, \widehat{V}_x, \widehat{V}_y, \widehat{V}_2, \widehat{V}_3$ on $\mathcal{G}$ making an absolute parallelism. Local CR equivalence to the cubic holds if and only if all curvatures vanish. By projection, the Cartan connection induces a family of distinguished frames $\widetilde{V}_x, \widetilde{V}_y, \widetilde{V}_2, \widetilde{V}_3$ at any point of M. Vanishing of R^x_{y2} is equivalent to the the integrability of the distribution spanned by $\widetilde{V}_y$ and $\widetilde{V}_2$. Vanishing of R^y_{x3} and of R^2_{x3} is equivalent to the integrability of the distribution spanned by $\widetilde{V}_x, \widetilde{V}_3$.

Reviewer's final appreciation : this paper is presumably the clearest existing reference within CR geometry in which one finds an explicit, geometrically neat, application of the Cartan-Tanaka theory of connections.

****

A.V. Isaev

Zero CR-curvature equations for rigid and tube hypersurfaces

Complex Variables and Elliptic Equations **54** (2009), no. 3-4, 317–344

Let M be a Levi nondegenerate local real analytic CR-hypersurface in a complex manifold of dimension $n+1$ with $n \geqslant 1$. The Cartan-Hachtroudi-Tanaka-Chern theory shows that there exists a principal bundle $\pi\colon \mathcal{P} \to M$ and a coframe σ_M, which consists of a 1-form on $\mathcal{P}$ valued in $\mathbb{R}^{\dim \mathcal{P}}$ with $\sigma_M(p)$ defining an isomorphism of $T_p\mathcal{P}$ onto $\mathbb{R}^{\dim \mathcal{P}}$ for every $p \in \mathcal{P}$, such that :

1) any (local) CR-isomorphism $h\colon M \to M'$ from M to another Levi-nondegenerate M' can be lifted as a diffeomorphism $H\colon \mathcal{P} \to \mathcal{P}'$ satisfying $H^*(\sigma_{M'}) = \sigma_M$ and $\pi' \circ H = h \circ \pi$;

2) any diffeomorphism $H\colon \mathcal{P} \to \mathcal{P}'$ such that $H^*(\sigma_{M'}) = \sigma_M$ is (in fact) a lift of a CR-isomorphism $h\colon M \to M'$.

The article under review focuses on the so-called *spherical* hypersurfaces, namely those that are (locally) CR-isomorphic to the hyperquadric $\mathrm{Im} w = \pm|z_1|^2 \pm \cdots \pm |z_n|^2$, the number of $+$ and $-$ signs being preassigned by the signature of the Levi form of the considered M.

If M is given as the zero-set of some real analytic function r having nowhere zero differential, then it is known that sphericity is equivalent to the vanishing of all the fundamental CR-curvature tensors associated to the absolute parallelism (or equivalently, to the Cartan-Hachtroudi-Tanaka-Chern projective connection), and some noneffective arguments show easily that this vanishing can be expressed as a rather complicated system, difficult to know explicitly, of equations involving the partial derivatives of r up to order six for $n = 1$, and up to order four for $n \geqslant 2$.

The author restricts his attention to the already difficult cases where one assumes r to be independent of certain groups of variables. Remarkably, he shows that a rigid M represented by $\mathrm{Im}\, w = F(z, \overline{z})$ is spherical if and only if F satisfies a second-order system of the form :

$$F_{\alpha\beta} = F_\gamma \big(E^\gamma \, F_\alpha \, F_\beta + D^\gamma_\alpha \, F_\beta + D^\gamma_\beta \, F_\alpha + C^\gamma_{\alpha\beta} \big) + H_{\alpha\beta},$$

where $F_{\alpha\beta} = \partial F / \partial z^\alpha$, where $F_{\alpha\beta} = \partial^2 F / \partial z^\alpha \partial z^\beta$, and where E^γ, D^γ_α, $C^\gamma_{\alpha\beta}$, $H_{\alpha\beta}$ are local holomorphic functions, all of which, in the tube case $\mathrm{Im}\, w = F(z + \overline{z})$, reduce to constants. On the other hand, two recent works of the reviewer provide explicit expressions of the two mentioned systems of orders six and four, with no special assumption on a defining equation for M.

Remarks to MR : I got not only this review from MR (which I appreciated) but I also got from Springer a review about a project of *Lecture Notes in Mathematics* by Isaev, the 50 first pages of which are devoted to

essentially the same kind of characterization of sphericity for rigid or tube real hypersurfaces in complex manifolds. I knew since 2003–2004 how to derive explicit zero CR-curvature equations for any hypersurface M, not necessarily rigid or tube, and not in terms of a real defining function r (which would be essentially inadequate, for any multiple $r \cdot u$ of r by a nonvanishing function u has the same zero-set M as r, which shows that r does not represent well M), but in terms of what is sometimes called in the literature a *complex defining equation* for M, which represents it as $\mathrm{Im}\, w = \Theta(z, \overline{z}, \overline{w})$ for some function Θ satisfying the functional equation : $w \equiv \Theta\big(z, \overline{z}, \overline{\Theta}(\overline{z}, z, w)\big)$. The function Θ being a *graphing* function, it is uniquely associated to M, and I worked a lot with such a basic datum and wrote synthetical, unifying memoirs (Merker, Fourier 2002, Toulouse 2005). So as a last phrase of the review, I allow myself to cite two recent papers of mine (but I do not provide the two arxiv.org references arxiv.org/abs/0910.2861 and arxiv.org/abs/0910.1694, for I guess it is not OK with respect to MR), where I complete the computations that specialists were still unable to perform, and which Isaev's two recent works motivated me immediately to achieve. If MR thinks that mentioning in a review recent works that are not yet published and checked is not OK, please erase just the last phrase. With thanks for the sending me in the last months high-level papers to review, which I continue to appreciate.

Axiome d'inverse en théorie des groupes

ARGUMENT PRESQUE VRAIMENT HISTORIQUE ET UN PEU PHILOSOPHIQUE

Ce billet à la fois léger et sérieux propose un extrait ciblé, adapté et remanié du livre :

"*Sophus Lie, Friedrich Engel et le problème de Riemann-Helmholtz*"

à paraître en 2010 chez Hermann, Éditeur des Sciences et des Arts ([9]). Moins à la mode de nos jours en France que, disons, la dynamique holomorphe avec ses arabesques chamarrées et dentelées, la *théorie des groupes continus locaux de transformations* a été érigée entre 1873 et 1899 par le mathématicien norvégien Sophus Lie[3] comme un continent mathématique nouveau surgit de sa pensée. Plus de six mille pages publiées en trente années par un seul homme et qui ne sont quasiment plus jamais citées, cette œuvre serait considérée comme un ensemble de mesure zéro par la bibliométrie contemporaine, mais il n'en reste pas moins que lire Lie (je lis Lie) en allemand dans le texte, c'est un plaisir divin pour la pensée [sans compter qu'un retour aux œuvres englouties par le temps permet facilement de ridiculiser l'obsession stupide pour la performance au *Citation Index* : si mêmes les travaux des plus grands mathématiciens du passé ne sont plus lus ou cités, qu'adviendra-t-il des nôtres dans cinquante ans ? Ce ne sont assurément plus nos logiciels contemporains de recherche bibliométrique qui feront autorité dans l'avenir, et certains mathématiciens futurs auront peut-être autant de condescendance pour nos productions actuelles que nous sommes tentés – hélas – d'en avoir pour les œuvres mathématiques des temps anciens.]

IRRIGATION EN FRANCE

Au-delà de Leipzig avec Friedrich Engel[4] et Gehrard Kowalewki, la théorie des groupes continus de transformations s'est ensuite aussi développée en France de 1890 jusqu'à la fin des années 1930, grâce à l'intérêt que Henri Poincaré portait aux fondements de la géométrie, et surtout grâce aux relais

[3] En 1886, Klein accepte un poste de professeur à Göttingen (capitale mathématique internationale de l'époque) et parvient à persuader Lie de quitter sa patrie norvégienne adorée pour lui succéder à Leipzig.

[4] Engel a commencé à travailler avec Lie en septembre 1884 à Christiania (Oslo), et en juin 1885, il retourne en Allemagne avec un manuscrit d'une taille déjà conséquente. À Leizig, il soutient son *Habilitationsschrift* sur les groupes de transformations et devient chargé de cours, *Privatdozent*.

scientifiques que Gaston Darboux, Camille Jordan et Jules Tannery fournissaient à Paris. Leurs travaux en géométrie et en théorie des groupes de substitutions les avaient bien entendu convaincus de l'intérêt de ce continent d'origine norvégienne expatrié à Leipzig, et c'est pourquoi ils ont incité plusieurs élèves de l'École Normale Supérieure à passer un an à Leipzig au contact de Lie, en particulier Jules Drach, Arthur Tresse, ? ?Janet, et surtout Ernest Vessiot ? ? et Élie Cartan, les deux continuateurs principaux de Lie. Pour la petite histoire, voici un extrait d'une allocution d'Élie Cartan.

[...] Nous avons la grande joie de voir sortir de l'École Normale des générations successives de brillants mathématiciens ; nous sommes assurés ainsi qu'elle n'abdique pas le rôle de pépinière des mathématiques qu'elle joue depuis longtemps et qui inspira autrefois à Sophus Lie l'idée de lui dédier son grand traité sur la théorie des groupes. Et puisque, par une pensée touchante, le fils de Sophus Lie a voulu marquer ce Jubilée par l'envoi du buste de son père[5]*, ne serait-il pas naturel que la place de ce buste soit à la bibliothèque des Sciences de l'École Normale ? Il rappellerait aux promotions successives à la fois le grand mathématicien norvégien et les normaliens qui ont été ses élèves à Leipzig, les Vessiot, les Tresse, les Drach (*[1]*, p. 278).*

Beauté des œuvres systématiques

Du point de vue du grand public auquel s'adresse le site "Image des Mathématiques", ce billet sera peut-être l'occasion de démontrer qu'il n'est pas impossible de *féconder encore* les problématiques contemporaines au contact des œuvres systématiques du dix-neuvième siècle. D'un point de vue plus "littéraire", la *Theorie der Transformationsgruppen*, monument en trois volumes de plus de 2000 pages ([2, 3, 4]) qu'Engel avait fini de rédiger à 31 ans sous la direction de Lie, pourrait éventuellement accéder au rang de classique intemporel du corpus mathématique, si elle était traduite en anglais, relue et appréciée à sa juste valeur.

Théorème principal

Mais ce billet sera surtout l'occasion de redémontrer un théorème *incontestable en soi* et bien connu de tous : "**Le maître**" (en l'occurence ici Sophus Lie) "**a toujours raison**". Voyons voir ce que cela peut donc bien vouloir dire et voyons voir si la démonstration d'un énoncé aussi vraisemblablement faux ne contiendrait pas une très grosse erreur.

[5] Deux bustes imposants de Lie au regard altier et intimidant trônent magistralement dans la salle de conférence du département de mathématiques d'Oslo.

ÉVARISTE GALOIS PERMUTAIT DES RACINES

Dans les années 1873 à 1880, l'idée fixe de Sophus Lie était d'ériger, dans le domaine des *continua* n-dimensionnels, une théorie qui corresponde à la théorie de Galois des substitutions des racines d'une équation algébrique et qui lui soit en tout point analogue. Or un difféomorphisme analytique local quelconque d'une variété de dimension n peut être considéré comme effectuant une *permutation* (différentiable) entre tous les points considérés, car en particulier, un difféomorphisme, c'est une bijection. Ainsi, bien que les difféomorphismes agissent sur un ensemble de cardinal infini (non dénombrable), ils sont les *analogues continus* des *permutations discontinues* d'un ensemble fini.

PRINCIPE DE RAISON SUFFISANTE ET ÉCONOMIE DES AXIOMES

Soit donc :

$$x' = f(x;\, a_1, \ldots, a_r) =: f_a(x)$$

une famille de difféomorphismes locaux analytiques paramétrée par un nombre fini r de paramètres $(a_1, \ldots, a_r)$. Pour Sophus Lie, le seul axiome de groupe vraiment significatif est celui qui demande qu'une telle famille soit *fermée par composition*, à savoir que l'on ait toujours :

$$f_a\big(f_b(x)\big) \equiv f_c(x),$$

pour un certain c qui dépend de a et de b, mais avec une restriction de localité afin d'assurer qu'une telle composition ait un sens. C'est bien cette propriété qu'ont les mouvements des corps rigides dans l'espace : la composition est évidente, et les retours en arrière sont évidemment permis. En s'inspirant de sa connaissance du *Traité des substitutions* de Jordan, Lie s'est alors demandé au tout début de ses recherches s'il était possible d'*économiser* les deux autres axiomes standard de la structure de groupe : l'axiome d'existence d'un élément identité, et l'axiome d'existence d'un inverse pour tout élément du groupe.

Assertion. ([7]) *Soit H un sous-ensemble quelconque d'un groupe abstrait G dont le cardinal est* fini : $\mathrm{Card}\, H < \infty$, *et qui est* fermé *par composition :*

$$h_1 h_2 \in H \qquad \text{toutes les fois que} \qquad h_1,\, h_2 \in H.$$

Alors H contient l'élément identité e de G et tout élément $h \in H$ possède un inverse dans H, de telle sorte que H lui-même est un vrai sous-groupe de G.

Preuve. En effet, soit $h \in H$ arbitraire. La suite infinie $h, h^2, h^3, \ldots, h^k, \ldots$ d'éléments de l'ensemble fini H doit nécessairement devenir périodique : $h^a = h^{a+n}$ pour un certain $a \geqslant 1$ et pour un certain $n \geqslant 1$, d'où $e = h^n$, donc $e \in H$ et h^{n-1} est l'inverse de h. □

ÉLIMINER L'AXIOME D'INVERSE POUR LES GROUPES CONTINUS

Dans ses travaux pionniers des années 1873 à 1880 et aussi dans la *Theorie der Transformationsgruppen* qu'Engel a rédigée sous sa direction entre 1884 et 1893, Lie est parvenu à transférer *tous* les concepts de la théorie des groupes de substitutions (Galois, Serret, Jordan) du discontinu vers le continu : *loi de groupe, actions de groupe, sous-groupes, sous-groupes normaux, groupe quotient, classification à conjugaison près, groupe adjoint, représentation adjointe, formes normales, (in)transitivité, (im)primitivité, prolongement holoédrique, prolongement mériédrique, asystaticité, etc.* Le principe de raison suffisante (Leibniz) suggère alors naturellement qu'au fondement même de la théorie générale, l'*élimination des deux axiomes* concernant l'élément identité et l'existence d'inverses soit *aussi possible* dans l'univers des groupes continus finis de transformations. Pendant plus de dix années, Lie a en effet été convaincu qu'une assertion purement similaire à celle énoncée ci-dessus devait être vraie dans le domaine du continu, avec $G = \mathsf{Diff}_n$ le pseudo-groupe (infini, continu) des difféomorphismes locaux de $\mathbb{C}^n$ (ou de $\mathbb{R}^n$) et en prenant pour $H \subset \mathsf{Diff}_n$ une collection finiment paramétrée d'équations de transformations $x' = f(x;\, a)$ qui est stable par composition[6].

Citons un extrait du premier mémoire systématique de Lie, paru en 1880 aux *Mathematische Annalen* ([8]).

Comme on le sait, on montre dans la théorie des substitutions que les permutations d'un groupe de substitutions peuvent être ordonnées en paires de permutations inverses l'une de l'autre. Mais comme la différence entre

---

[6] Note (vraiment) technique : sans présupposer l'existence d'un élément identité, la condition de stabilité par composition qu'Engel et Lie ont dégagée ([2], p. 14) s'énonce comme suit, lorsque $x \in \mathbb{C}^n$ et $a \in \mathbb{C}^r$ sont à valeurs complexes. Il existe deux paires de domaines $\mathcal{X}^1 \subset \mathcal{X} \subset \mathbb{C}^n$ et $\mathcal{A}^1 \subset \mathcal{A} \subset \mathbb{C}^r$ dans l'espace des variables x et dans l'espace des paramètres a tels que pour tout $a \in \mathcal{A}$, l'application $x \mapsto f(x;\, a)$ est un difféomorphisme de $\mathcal{X}$ sur son image, tels que de plus, pour tout $a^1 \in \mathcal{A}^1$ fixé, $f(\mathcal{X}^1 \times \{a^1\}) \subset \mathcal{X}$, de telle sorte que pour tout $a^1 \in \mathcal{A}^1$ et pour tout $b \in \mathcal{A}$, l'application composée $x \longmapsto f\big(f(x;\, a^1);\, b\big)$ est bien définie et établit un difféomorphe sur son image. De plus, deux conditions significatives sont supposées.

- Il existe une application analytique $\varphi = \varphi(a, b)$ à valeurs dans $\mathbb{C}^m$ définie dans $\mathcal{A} \times \mathcal{A}$ avec $\varphi(\mathcal{A}^1 \times \mathcal{A}^1) \subset \mathcal{A}$ telle que :
$$f\big(f(x;\, a);\, b\big) \equiv f\big(x;\, \varphi(a, b)\big) \qquad \text{pour tous } x \in \mathcal{X}^1,\ a \in \mathcal{A}^1,\ b \in \mathcal{A}^1.$$
- Il existe une application analytique $\chi = \chi(a, c)$ à valeurs dans $\mathbb{C}^m$ définie pour $a \in \mathcal{A}$ et $c \in \mathcal{A}$ avec $\chi\big(\mathcal{A}^1 \times \mathcal{A}^1\big) \subset \mathcal{A}$ qui résout b en termes de (a, c) dans l'équation $c = \varphi(a, b)$, à savoir :
$$c \equiv \varphi\big(a,\, \chi(a, c)\big) \qquad \text{pour tous } a \in \mathcal{A}^1,\ c \in \mathcal{A}^1.$$

C'est avec ces hypothèses précises que Lie pensait déduire : 1) la présence d'un élément identité $e \in \mathcal{A}$; et : 2) l'existence d'un difféomorphisme analytique local $a \mapsto \iota(a)$ défini près de e et fixant e, tel que $f(x;\, \iota(a))$ est la transformation inverse de $f(x;\, a)$.

un groupe de substitutions et un groupe de transformations réside seulement dans le fait que le premier contient un ensemble fini, et le second un ensemble infini d'opérations, il est naturel de conjecturer que les transformations d'un groupe de transformations puissent aussi être ordonnées par paires de transformations inverses l'une de l'autre. Dans des travaux antérieurs, je suis parvenu à la conclusion que tel devrait être le cas. Mais comme au cours de mes investigations en question, certaines hypothèses implicites *se sont introduites au sujet des fonctions qui apparaissent, je pense alors qu'il est nécessaire d'*ajouter expressément l'exigence que les transformations du groupe puissent être ordonnées par paires de transformations inverses l'une de l'autre. *En tout cas, je conjecture que cette exigence est une condition nécessaire de ma définition originale du concept [Begriff] de groupe de transformations. Toutefois, il m'a été impossible de démontrer cela en général.*

L'ÉLÈVE ENGEL TROUVE RAPIDEMENT UN CONTRE-EXEMPLE

Cependant, en 1884, dans sa toute première année de travail de rédaction en collaboration, Engel proposa un contre-exemple à cette conjecture de Lie. Considérons en effet la famille d'équations de transformations :

$$x' = \zeta\, x,$$

où $x,\ x' \in \mathbb{C}$ sont les coordonnées de l'espace-source et de l'espace-image, et où le paramètre $\zeta \in \mathbb{C}$ est restreint à $|\zeta| < 1$. Évidemment, cette famille est fermée par composition, à savoir : lorsque $x' = \zeta_1\, x$ et lorsque $x'' = \zeta_2\, x'$, la composition donne $x'' = \zeta_2\, x' = \zeta_2 \zeta_1 x$, et elle appartient en effet à la famille en question, puisque $|\zeta_2\, \zeta_1| < 1$ découle de $|\zeta_1|,\ |\zeta_2| < 1$. Par contre, ni l'élément identité, ni l'inverse de toute transformation n'appartiennent à la famille ainsi définie.

CE N'EST PAS UN CONTRE-EXEMPLE ! OBJECTE MAÎTRE LIE

Comme on l'aura noté, cette proposition de contre-exemple n'est en fait pas réellement convaincante. En effet, la condition $|\zeta| < 1$ est ici visiblement artificielle, puisque la famille se prolonge en fait trivialement comme groupe complet des dilatations $\big(x' = \zeta\, x\big)_{\zeta \in \mathbb{C}}$ de la droite complexe.

CONSTRUCTION D'UN MEILLEUR CONTRE-EXEMPLE !

L'idée de Engel était d'en appeler à une application holomorphe univalente $\omega : \Delta \to \mathbb{C}$ qui possède le cercle unité $\{|\zeta| = 1\}$ comme coupure, à savoir : ω ne peut être prolongée holomorphiquement au-delà d'aucun point $\zeta_0 \in \partial\Delta = \{|\zeta| = 1\}$ du bord du disque unité. L'application ω utilisée (sans référence bibliographique) par Engel est la suivante ([2], p. 164). Si $k \geqslant 1$

est un entier quelconque, soit od_k le nombre de diviseurs impairs de k, y compris 1 et k (lorsque k est impair).

Assertion. *La série infinie :*

$$\omega(a) := \sum_{\nu\geqslant 1} \frac{a^\nu}{1-a^{2\nu}} = \sum_{\nu\geqslant 1} \big(a^\nu + a^{3\nu} + a^{5\nu} + a^{7\nu} + \cdots\big) = \sum_{k\geqslant 1} \mathsf{od}_k\, a^k$$

converge absolument dans tout disque $\Delta_\rho = \{z \in \mathbb{C} : \ |z| < \rho\}$ *de rayon* $\rho < 1$ *et y définit une application holomorphe univalente* $\Delta \to \mathbb{C}$ *du disque unité* $\Delta := \{|z| < 1\}$ *à valeurs dans* $\mathbb{C}$ *qui* ne *se prolonge holomorphiquement au-delà d'*aucun *point* $\zeta_0 \in \partial\Delta := \{|z| = 1\}$.

En fait, à la place de cette série explicite, on pourrait utiliser aussi n'importe quelle autre application de type uniformisante de Riemann[7] $\zeta \longmapsto \omega(\zeta) =: \lambda$ qui établit un biholomorphisme du disque unité Δ sur un domaine simplement connexe $\Lambda := \omega(\Delta)$ dont le bord est une courbe de Jordan nulle part localement analytique réelle[8]. Désignons alors par $\lambda \longmapsto \chi(\lambda) =: \zeta$ l'inverse d'une telle application, et considérons la famille d'équations de transformations :

$$\big(x' = \chi(\lambda)\, x\big)_{\lambda\in\Lambda}.$$

Par construction, $|\chi(\lambda)| < 1$ pour tout $\lambda \in \Lambda$. Toute composition de $x' = \chi(\lambda_1)\, x$ et de $x'' = \chi(\lambda_2)\, x'$ est de la forme $x'' = \chi(\lambda)\, x$, avec le paramètre défini de manière unique $\lambda := \omega\big(\chi(\lambda_1)\,\chi(\lambda_2)\big)$, donc l'axiome de composition de groupe est satisfait. Cependant, il n'y a à nouveau pas d'élément identité, et à nouveau, aucune transformation ne possède un inverse. Et de plus crucialement (et pour terminer), il n'existe aucun prolongement de cette famille à un domaine plus grand $\widetilde{\Lambda} \supset \Lambda$ qui soit accompagné d'un prolongement holomorphe $\widetilde{\chi}$ de χ à $\widetilde{\Lambda}$ de telle sorte que $\widetilde{\chi}\big(\widetilde{\Lambda}\big)$ contienne un voisinage de $\{1\}$ (afin d'atteindre l'élément identité), et même *a fortiori*, il

[7] Le théorème de Riemann énonce que pour tout ouvert connexe et simplement connexe Λ de $\mathbb{C}$ dont le complémentaire $\mathbb{C}\backslash\Lambda$ contient au moins un point, il existe une application biholomorphe — c'est-à-dire holomorphe, bijective et d'inverse holomorphe — $\chi : \Lambda \to \Delta$ de Λ sur le disque unité $\Delta \subset \mathbb{C}$, appelée *uniformisante de Riemann*. Le théorème réflexion de Schwarz stipule qu'en tout point $\lambda_0 \in \partial\Lambda$ du bord de Λ autour duquel $\partial\Lambda$ est un petit morceau de courbe analytique réelle, l'uniformisante χ se prolonge holomorphiquement dans un voisinage de λ_0. Réciproquement, si χ se prolonge holomorphiquement au-delà d'un point du bord de Λ, ce bord est alors nécessairement analytique réel au voisinage de ce point.

[8] On peut même considérer un domaine dont le bord est une courbe de Jordan continue nulle part différentiable, voire dont le bord est un ensemble fractal, comme par exemple le flocon de Von Koch ; on trouvera une présentation concise et lumineuse de la théorie de Carathéodoy sur le prolongement au bord des uniformisantes de Riemann dans le Chapitre 17 de [10].

n'existe aucun prolongement holomorphe tel de χ à un voisinage de $\overline{\Delta}$ (afin d'obtenir les inverses des transformations $x' = \chi(\lambda)\, x$ avec $\lambda \in \Lambda$ proche de $\partial\Lambda$).

CACHER CE CONTRE-EXEMPLE DANS LE GRAND TRAITÉ

Dans le volume I de la *Theorie der Transformationsgruppen*, cet exemple apparaît seulement au Chapitre 9, pp. 163–165, et il est écrit en petits caractères. Constation frappante : pour des raisons de pureté et de systématicité dans la pensée, la structure des neuf premiers chapitres est organisée afin de faire autant que possible l'économie de l'existence d'un élément identité et de transformations inverses l'une de l'autre par paires. Ce choix théorique complexifie considérablement la présentation de la théorie fondamentale, pourtant censée être relativement facile d'accès afin de toucher un public assez large de mathématiciens. Mais il est bien connu que la meilleure qualité dans l'exposition des premiers éléments d'un ouvrage et que les meilleurs choix stratégiques quant à son organisation thématique, ne peuvent être atteints, paradoxalement, qu'à la fin du processus de mise en forme dans son ensemble. Impossible, donc, de demander au jeune et novice Friedrich Engel (alors âgé de 24 ans) de faire prévaloir un point de vue d'accessibilité et de simplicité dans la présentation. Au contraire, l'objectif affirmé de son maître Sophus Lie était d'atteindre la plus grande généralité, de s'élever le plus haut possible dans un tel traité.

RESTER À TOUT PRIX TRÈS SYSTÉMATIQUE

Et malgré le contre-exemple du jeune Engel que nous venons de détailler, Lie était quand même persuadé que l'analogie profonde de sa théorie des groupes continus avec la théorie des groupes finis de substitutions n'était pas, *dans sa racine métaphysique profonde*, réellement remise en cause. Ainsi, toutes les fois que cela est possible du point de vue abstrait de Lie, les énoncés des neuf premiers chapitres de la *Theorie der Transformationsgruppen* n'utilisent ni l'existence d'un élément identité, ni l'existence de transformations inverses l'une de l'autre par paires. Engel et Lie étudient seulement les familles continues finies d'équations de transformations $x_i' = f_i(x;\, a_1, \ldots, a_r)$, $i = 1, \ldots, n$ qui sont fermées par composition au sens de la note technique, sans hypothèse supplémentaire : grand degré d'abstraction et de généralité[9]. En fait, à partir de cette seule condition de fermeture par composition, Engel et Lie déduisent que les équations finies $x_i' = f_i(x;\, a)$ satisfont certaines *équations différentielles fondamentales*. C'est alors l'existence de telles équations différentielles qu'ils prennent systématiquement comme hypothèse principale, à la place de la fermeture

[9] C'est presque du Bourbaki avant l'heure !

par composition, toujours sans élément identité et sans transformations inverses.

VAINCRE L'ÉLÈVE ABSOLUMENT

Le Théorème 26 est énoncé à la page 163 de [2] (*voir* p. 23), et il est démontré tout juste avant que n'apparaisse le contre-exemple de Engel, relégué au rang d'illustration de la nécessité de faire des hypothèses spéciales. En fait, ce théorème *objecte une seconde fois* à Engel que son contre-exemple n'est pas véritablement un *vrai* contre-exemple, puisqu'il suffirait en fait de *restituer les bonnes coordonnées* ζ dans l'espace des paramètres afin de retrouver un vrai groupe qui contient l'identité et des transformations inverses l'une de l'autre par paires. Pour être bref, le Théorème 26 va dire que quitte à effectuer un changement de coordonnées dans l'espace des paramètres, on pourra capturer l'identité et les inverses, et donc alors avec ce Théorème 26[10], *le contre-exemple de Engel est en fait magistralement vaincu en toute généralité* !

PERSÉVÉRANCE MÉTAPHYSIQUE DE LIE

Ainsi, c'est un théorème raffiné et subtil qui confirme la croyance métaphysique de Lie, montre sa persévérance intellectuelle, et prouve à nouveau sa remarquable force de conceptualisation.

PRÉSENTATION TECHNIQUE DU THÉORÈME 26

En résumé, le théorème de Maître Lie qui répond au contre-exemple de l'élève Engel s'énonce techniquement comme suit. Soit :

$$x'_i = f_i(x;\, a_1, \ldots, a_r) \qquad (i = 1 \cdots n),$$

une collection de transformations fermée par compositions locales. D'après le premier théorème fondamental de la théorie, il existe un système d'équations différentielles de la forme :

$$\frac{\partial x'_i}{\partial a_k} = \sum_{j=1}^{r} \psi_{kj}(a) \cdot \xi_{ji}(x') \qquad (i = 1 \cdots n\,;\, k = 1 \cdots r).$$

qui est satisfait identiquement par les fonctions $f_i(x, a)$, où les ψ_{kj} sont certaines fonctions analytiques des paramètres $(a_1, \ldots, a_r)$. Si l'on introduit alors les r transformations infinitésimales (champs de vecteurs) qui sont définies par :

$$\sum_{i=1}^{n} \xi_{ki}(x)\, \frac{\partial f}{\partial x_i} =: X_k(f) \qquad (k = 1 \cdots r),$$

[10] Il y a 114 théorèmes dans le premier volume [2].

et si l'on forme les équations finies :

$$\begin{aligned} x_i' &= \exp\big(\lambda_1 X_1 + \cdots + \lambda_k X_k\big)(x) \\ &=: g_i(x;\, \lambda_1, \ldots, \lambda_r) \qquad\qquad (i = 1 \cdots n) \end{aligned}$$

du groupe à r paramètres qui est engendré par ces r transformations infinitésimales, alors ce groupe contient l'élément identité $g(x;\, 0)$ et ses transformations sont ordonnées par paires inverses l'une de l'autre, puisque : $g(x;\, -\lambda) = g(x;\, \lambda)^{-1}$. Enfin, le Théorème 26 en question énonce que dans ces équations finies $x_i' = g_i(x;\, \lambda)$, il est possible d'introduire de *nouveaux* paramètres locaux $\overline{a}_1, \ldots, \overline{a}_r$ à la place de $\lambda_1, \ldots, \lambda_r$ de telle sorte que les équations de transformations qui en résultent :

$$\begin{aligned} x_i' &= g_i\big(x;\, \lambda_1(\overline{a}), \ldots, \lambda_r(\overline{a})\big) \\ &=: \overline{f}_i(x_1, \ldots, x_n,\, \overline{a}_1, \ldots, \overline{a}_r) \qquad\qquad (i = 1 \cdots n) \end{aligned}$$

représentent une famille de ∞^r transformations qui embrasse, *après un prolongement analytique éventuel*, toutes les ∞^r transformations initiales :

$$x_i' = f_i(x_1, \ldots, x_n,\, a_1, \ldots, a_r).$$

CAPTURER DES VÉRITÉS SUPÉRIEURES

Ainsi Lie réalise-t-il et confirme-t-il son idée d'épuration axiomatique. En répondant à Engel que l'on doit s'autoriser à changer éventuellement de paramètres[11], on peut toujours élargir le domaine initial d'existence pour capturer l'identité et les transformations inverses. *À la contre-exemplification contrariante répond donc la dialectique complexifiante de vérités supérieures qui doivent être quêtées sans relâche.*

ÉNONCÉ (VRAIMENT) TECHNIQUE DU THÉORÈME 26

Théorème 26. ([2], p. 163) *Tout groupe $x_i' = f_i(x_1, \ldots, x_n,\, a_1, \ldots, a_r)$ à r paramètres qui n'est pas engendré par r transformations infinitésimales indépendantes dérive d'un groupe contenant r transformations infinitésimales indépendantes de la manière suivante : former tout d'abord les équations différentielles :*

$$\frac{\partial x_i'}{\partial a_k} = \sum_{j=1}^{r} \psi_{kj}(a) \cdot \xi_{ji}(x') \qquad\qquad (i = 1 \cdots n\,;\, k = 1 \cdots r),$$

[11] Redisons qu'en changeant de paramètre dans la famille $x' = \chi(\lambda)\, x$, on retrouve évidemment le groupe complet des dilatations $x' = \zeta\, x$.

qui sont satisfaites par les équations $x_i' = f_i(x, a)$, puis poser :

$$\sum_{i=1}^{n} \xi_{ki}(x)\, \frac{\partial f}{\partial x_i} = X_k(f) \qquad (k = 1 \cdots r)$$

et former ensuite les équations finies :

$$x_i' = x_i + \sum_{k=1}^{r} \lambda_k\, \xi_{ki}(x) + \cdots \qquad (i = 1 \cdots n)$$

du groupe à r paramètres contenant la transformation identité qui est engendré par les r transformations infinitésimales indépendantes $X_1 f, \ldots, X_r f$. Avec ces données, il est alors possible, dans ces équations finies, d'introduire des nouveaux paramètres $\overline{a}_1, \ldots, \overline{a}_r$ à la place de $\lambda_1, \ldots, \lambda_r$ de manière à ce que les équations de transformations qui en résultent :

$$x_i' = \Phi_i(x_1, \ldots, x_n,\, \overline{a}_1, \ldots, \overline{a}_r) \qquad (i = 1 \cdots n)$$

représentent une famille de ∞^r transformations qui embrasse, après prolongement analytique, toutes les ∞^r transformations :

$$x_i' = f_i(x_1, \ldots, x_n,\, a_1, \ldots, a_r) \qquad (i = 1 \cdots n)$$

du groupe.

CONCLUSION INCONTESTABLE

Le maître a toujours raison !

RÉFÉRENCES

[1] Akivis, S. ; Rosenfeld, B.A. : *Élie Cartan (1869–1951)*, Translations of mathematical monographs, vol. 123, Amer. Math. Soc., ? ?

[2] Engel, F. ; Lie, S. : *Theorie der transformationsgruppen. Erster Abschnitt*. Unter Mitwirkung von Dr. Friedrich Engel, bearbeitet von Sophus Lie, B.G. Teubner, Leipzig, 1888. Reprinted by Chelsea Publishing Co. (New York, N.Y., 1970).

[3] Engel, F. ; Lie, S. : *Theorie der transformationsgruppen. Zweiter Abschnitt*. Unter Mitwirkung von Prof. Dr. Friedrich Engel, bearbeitet von Sophus Lie, B.G. Teubner, Leipzig, 1890. Reprinted by Chelsea Publishing Co. (New York, N.Y., 1970).

[4] Engel, F. ; Lie, S. : *Theorie der transformationsgruppen. Dritter und Letzter Abschnitt*. Unter Mitwirkung von Prof. Dr. Friedrich Engel, bearbeitet von Sophus Lie, B.G. Teubner, Leipzig, 1893. Reprinted by Chelsea Publishing Co. (New York, N.Y., 1970).

[5] Hawkins, T. : *Emergence of the theory of Lie groups, An essay in the history of mathematics 1869–1926*, Sources and studies in the history of mathematics and physical sciences, Springer-Verlag, Berlin, 2001, xiii+564 pp.

[6] Hawkins, T. : *Frobenius, Cartan, and the problem of Pfaff*, Arch. Hist. Exact Sci. **59** (2005), 381–436.

[7] Jordan, C. : *Traité des substitutions et des équations algébriques*, Gauthier-Villars, Paris, 1870. Nouveau tirage. Paris : Librairie Scientifique & Technique Albert Blanchard XVIII, 667 pp., 1957.

[8] Lie, S. : *Theorie der Transformationsgruppen*, Math. Ann. **16** (1880), 441–528.

[9] Merker, J. : *Sophus Lie, Friedrich Engel et le problème de Riemann-Helmholtz*, arxiv.org/abs/0910.0801/, Hermann, Éditeur des Sciences et des Arts, Paris, $\sim$320 pages, à paraître en 2010.

[10] Milnor, J. : *Dynamics in one complex variable*, Annals of Mathematics Studies, 160, Princeton University Press, Princeton, NJ, Third Edition, 2006, viii+304 pp.

Dynamique de l'égalité

Identité à soi de l'être égal à lui-même

Le mauvais et plat concept d'égalité, c'est celui auquel tout le monde pense :

$$A = A,$$

et qui nous vient toujours immédiatement à l'esprit : la tautologie logique de l'assertion d'identité à soi-même, répétition immensément vide de l'être qui se déclare « être ce qu'il est et rien de plus, sinon » — raisonnons mécaniquement par l'absurde — « il ne serait plus rigoureusement égal à lui-même ».

Répétition et différence

Mais déjà la répétition est une première différence. L'« A » du premier « A », comme une initiale de ce qui subsume un genre possible du divers, ou encore, comme désignation de variable mathématique susceptible d'endosser un champ spécifique du numérique ou un domaine intangible de l'univers ensembliste zermélo-fraenkélien, ce « premier A » tout simple que nous écrivons dans un premier temps avec toute la lenteur physique d'un scribe, d'un étudiant, ou d'un élève :

$$A =$$

suspendus que nous sommes dans l'« $=$ » qui le suit, ce premier « A » quête par nature un *alter ego* et recherche aussi un « deuxième A » qui ne sera pas « premier A », et donc sera déjà un peu et d'une certaine manière un « A » autre que « A ».

Culte du signe « $=$ »

Tel est le jeu fascinant de la *dynamique de l'égalité* : comme tous les gestes virtuoses du géomètre qui se produit en conférence et au tableau, ce signe-fétiche et merveilleux dont sont remplies nos milliers de pages de calculs est toujours *germe virtuel d'une différence et d'une nouveauté* ; il nous sert indéfiniment à propulser vers l'avant l'« irréversible-synthétique » — ce *sang* des mathématiques que Kant n'avait pas vu — et à faire rebondir inlassablement nos intuitions. Entre ces deux barres horizontales :

$$=$$

c'est en effet une boule centripète de questions possibles qui sont prises en sandwich. Et si le signe retenu par l'histoire importe peu, seule compte la *dynamique intrinsèque de l'égalité*, demandeuse insatiable d'altérité.

RENVERSER L'ORDRE DES SYMBOLES

C'est pour toutes ces raisons et d'autres encore plus complexes et plus profondes que les deux règles suivantes doivent gouverner l'alchimie interne des manuscrits étoffés de calculs délicats.

Règle 1 : Donner la préséance au zéro. Ne jamais écrire : « $\mathsf{X} = 0$ », mais toujours à l'inverse :

$$0 = \text{une expression longue et complexe},$$

comme par exemple [arxiv.org/abs/0910.2861/] — excusez du peu ! — :

$$\begin{aligned}
0 = {} & \sum_{\mu=1}^{n+1}\sum_{\nu=1}^{n+1}\Big[\Delta^{\mu}_{[0_{1+\ell_1}]}\cdot\Delta^{\nu}_{[0_{1+\ell_2}]}\Big\{\Delta\cdot\frac{\partial^4\Theta}{\partial z_{k_1}\partial z_{k_2}\partial\overline{t}_\mu\partial\overline{t}_\nu}-\sum_{\tau=1}^{n+1}\Delta^{\tau}_{[\overline{t}^\mu\overline{t}^\nu]}\cdot\frac{\partial^3\Theta}{\partial z_{k_1}\partial z_{k_2}\partial\overline{t}^\tau}\Big\}- \\
& -\tfrac{\delta_{k_1,\ell_1}}{n+2}\sum_{\ell'=1}^{n}\Delta^{\mu}_{[0_{1+\ell'}]}\cdot\Delta^{\nu}_{[0_{1+\ell_2}]}\Big\{\Delta\cdot\frac{\partial^4\Theta}{\partial z_{\ell'}\partial z_{k_2}\partial\overline{t}_\mu\partial\overline{t}_\nu}-\sum_{\tau=1}^{n+1}\Delta^{\tau}_{[\overline{t}^\mu\overline{t}^\nu]}\cdot\frac{\partial^3\Theta}{\partial z_{\ell'}\partial z_{k_2}\partial\overline{t}^\tau}\Big\}- \\
& -\tfrac{\delta_{k_1,\ell_2}}{n+2}\sum_{\ell'=1}^{n}\Delta^{\mu}_{[0_{1+\ell_1}]}\cdot\Delta^{\nu}_{[0_{1+\ell'}]}\Big\{\Delta\cdot\frac{\partial^4\Theta}{\partial z_{\ell'}\partial z_{k_2}\partial\overline{t}_\mu\partial\overline{t}_\nu}-\sum_{\tau=1}^{n+1}\Delta^{\tau}_{[\overline{t}^\mu\overline{t}^\nu]}\cdot\frac{\partial^3\Theta}{\partial z_{\ell'}\partial z_{k_2}\partial\overline{t}^\tau}\Big\}- \\
& -\tfrac{\delta_{k_2,\ell_1}}{n+2}\sum_{\ell'=1}^{n}\Delta^{\mu}_{[0_{1+\ell'}]}\cdot\Delta^{\nu}_{[0_{1+\ell_2}]}\Big\{\Delta\cdot\frac{\partial^4\Theta}{\partial z_{k_1}\partial z_{\ell'}\partial\overline{t}_\mu\partial\overline{t}_\nu}-\sum_{\tau=1}^{n+1}\Delta^{\tau}_{[\overline{t}^\mu\overline{t}^\nu]}\cdot\frac{\partial^3\Theta}{\partial z_{k_1}\partial z_{\ell'}\partial\overline{t}^\tau}\Big\}- \\
& -\tfrac{\delta_{k_2,\ell_2}}{n+2}\sum_{\ell'=1}^{n}\Delta^{\mu}_{[0_{1+\ell_1}]}\cdot\Delta^{\nu}_{[0_{1+\ell'}]}\Big\{\Delta\cdot\frac{\partial^4\Theta}{\partial z_{k_1}\partial z_{\ell'}\partial\overline{t}_\mu\partial\overline{t}_\nu}-\sum_{\tau=1}^{n+1}\Delta^{\tau}_{[\overline{t}^\mu\overline{t}^\nu]}\cdot\frac{\partial^3\Theta}{\partial z_{k_1}\partial z_{\ell'}\partial\overline{t}^\tau}\Big\}+ \\
& +\tfrac{1}{(n+1)(n+2)}\cdot\big[\delta_{k_1,\ell_1}\delta_{k_2,\ell_2}+\delta_{k_2,\ell_1}\delta_{k_1,\ell_2}\big]\cdot \\
& \cdot\sum_{\ell'=1}^{n}\sum_{\ell''=1}^{n}\Delta^{\mu}_{[0_{1+\ell'}]}\cdot\Delta^{\nu}_{[0_{1+\ell''}]}\Big\{\Delta\cdot\frac{\partial^4\Theta}{\partial z_{\ell'}\partial z_{\ell''}\partial\overline{t}_\mu\partial\overline{t}_\nu}-\sum_{\tau=1}^{n+1}\Delta^{\tau}_{[\overline{t}^\mu\overline{t}^\nu]}\cdot\frac{\partial^3\Theta}{\partial z_{\ell'}\partial z_{\ell''}\partial\overline{t}^\tau}\Big\}.
\end{aligned}$$

Règle 2 : Au positif, préférer le négatif. Commencer toute addition suspendue par un signe « $-$ » et placer volontairement les signes « $-$ » au début des équations et des parenthèses, comme par exemple :

$$y_{xx} = -\Box^1_{xx} + y_x\cdot\big(-2\,\Box^1_{xy}+\Box^0_{xx}\big)+(y_x)^2\cdot\big(-\Box^1_{yy}+2\,\Box^0_{xy}\big)+(y_x)^3\cdot\Box^0_{yy}.$$

L'ALGÈBRE IMMANENTE NOUS EST INACCESSIBLE

Nonobstant tout ce que le jeu dominant du *conceptuel a posteriori* aime à faire accroire, les mathématiques *sont dans leur essence même* du calcul pur. La dynamique d'égalisation n'est qu'une simple arme humaine de mobilité dans l'immobilité symbolique. Mais l'algèbre quant à elle, non locale, non temporelle et non sérielle synthétise toutes les relations possibles immanentes dans son internalité immobile inaccessible. Prenons donc l'altérisation dynamique du concept d'égalité comme le signe de notre incapacité

à voir vraiment le :

$$A = A$$

absolu de l'Algèbre.

Réponse no. 1 : Qui pense abstrait ?

FLAGRANT DÉLIT DE MÉTAPHYSIQUE

Subsumer ? Trop abstrait ? Sauve qui peut ! J'entends déjà qu'on s'écrie : excès de pédantisme, vocabulaire scolastique, langue philosophique obscure. Car « métaphysique », lance Hegel, « ainsi qu'« abstrait », et à peu de chose près aussi, « penser », est le mot devant lequel chacun plus ou moins fuit, comme on détale devant un pestiféré ».

SUBSUMER = ENGLOBER UNE CATÉGORIE D'ÉTANTS [MATHÉMATIQUES] MULTIPLES

Le « A » qui « **subsume un genre possible du divers** [rapporte, réfère à un espèce, à un genre ; établit un rapport de l'objet à l'essence à laquelle il appartient], c'est donc bien le « A » archétypal de la pensée mathématique susceptible d'héberger, sous un seul symbole choisi arbitrairement, tout une catégorie multiple d'êtres mathématiques rassemblés par une propriété définitionnelle commune. Acte de pensée universel : se représenter un objet quelconque spécifique : « Soit A une algèbre associative et commutative, *etc.* » ; « Soit G un groupe de Lie compact connexe semi-simple, *etc.* » ; « Soit X un espace analytique normal $(n-1)$-complet, *etc.* », en un mot et en un seul :

« Soit A un « objet » mathématique défini mais général et quelconque »,

incipit mathématique absolu plus chargé de métaphysique *tue* que ne l'est l'existence des objets sensibles.

HEGEL À LA RESCOUSSE

Concrétude imparable de l'abstraction : voilà ci-dessous un exemple ironique et grinçant qui rappelle à merveille la capacité *effrayante* que la conscience a de *projeter brutalement* tout objet de jugement dans l'espace bipolarisé le plus étroit qui soit : celui du « oui » ou du « non », du « bon » ou du « mauvais », du « bien » ou du « mal ».

Mais pourrions-nous faire des mathématiques sans jongler perpétuellement avec le « plus » et le « moins » de l'instinct rationnel ? Pourrions-nous nous passer de hiérarchiser, d'attribuer des médailles (olympiques) au compte-goutte, de classer, de reclasser et de déclasser les universités et

les laboratoires, de désigner officiellement quelques « meilleurs », et d'exprimer le tout dans la novlangue immédiatement intuitive des chiffres et des indicateurs, des indices d'impact, et autres critères de Shangaï ? Non ! Plus forte que tout, l'*abstraction qui projette*, c'est un acte primal de *subsomption et d'englobement* qui est essentiel à notre survie dans un monde qui ne cesse de se complexifier.

SUBSUMER, C'EST ABSTRAIRE, ET TOUT LE MONDE LE FAIT

« Éh la vieille, vos œufs sont pourris ! », dit l'acheteuse à la marchande. « Quoi, répliqua celle-ci, mes œufs pourris ? Pour moi, c'est elle qui est pourrie ! Me dire ça de mes œufs ! Elle ! Les poux n'ont-ils pas dévoré votre père sur un chemin de campagne, votre mère ne s'est-elle pas enfuie avec les Français et votre grand-mère n'est-elle pas morte à l'hospice ? Qu'elle s'achète pour son foulard de pacotille une chemise convenable ! Son foulard et ses bonnets, on sait bien d'où elle les tient ! Sans les officiers, certaines ne seraient pas aussi bien nippées et, si les « Madames » faisaient plus attention à leur ménage, plus d'une croupirait derrière les barreaux ! Qu'elle commence déjà par repriser les trous de ses bas ! » Bref, elle ne tisse aucun bon fil sur elle. **Elle pense abstraitement en la <u>subsumant</u> [und subsumiert sie] tout uniment** — avec son foulard, ses bonnets, sa chemise, *etc.*, ses doigts et d'autres parties, son père et sa famille entière — **sous le crime d'avoir trouvé ses œufs pourris** ; tout en elle se trouve de part en part coloré par ces œufs pourris, tandis que ces officiers dont la marchande parlait — si tant est, ce dont on peut douter, qu'il y ait eu quoi que ce soit à propos — ont pu parvenir à voir en elle de tout autres choses. »

Georg Wilhelm Friedrich Hegel, Qui pense abstrait ? [Wer denkt abstract ?], 1807. Édition bilingue accompagnée d'une notice et d'un essai sur l'exotérisme hégélien, par Ari Simhon, Hermann Éditions (depuis 1876), Paris, 2007, 176 pp.

MATHÉMATICIENS, REFUSONS D'ÊTRE « SUBSUMÉS » DE LA SORTE !

Que vise le site Images des Mathématiques ? puisqu'il s'inscrit dans le contexte d'une volonté étatique appuyée de « réformer » le système universaliste du savoir scientifique, tant dans sa pérennisation que dans sa créativité ? Sortie des tours d'ivoire, adresses au Grand Public, « justifications » vis-à-vis de la société, vulgarisation, échange, partage, et attraction des jeunes esprits : le but est de créer et d'entretenir un antidote médiatique à la « subsomption-de-la-marchande-aux-œufs-pourris », et de répondre si possible au même moment à trois objections trop populaires :

Objection no. 1 : « Mais voyons, toutes ces mathématiques abstraites et déconnectées de la réalité, sont-elles *utiles* ? À quoi peuvent-elles donc bien *servir* ? »

Objection no. 2 : « Je vois, c'est un peu comme l'art en quelque sorte, les mathématiciens sont des artistes ».

Objection no. 3 [prétendûment fatale] : « Mais quand même, l'art est accessible à bien des gens. Je ne suis pas sûr qu'il en soit de même de vos groupes et espace p-adiques… ».

PHILOSOPHER ?

Mais ce n'est pas là que le bât blesse le plus cruellement. À quelque niveau que ce soit, plus personne dans nos sociétés « internetisées » n'est, ne se sent, ou ne peut être en charge de répondre sérieusement à la question : D'où venons-nous ? Que faisons-nous ? Où allons-nous ? Quelles sont les racines métaphysiques de la pensée mathématique ? Triste sort d'impuissance qui nous est réservé présentement, quand l'on pense à l'alliance ancestrale entre la mathématique et la philosophie !

« Explosion » des mathématique, abondance, profusion, confusion, et saturation de l'information : ce ne sont que des excuses ! Au contraire, penser — philosopher ? — reste éternellement nécessaire. Et seule la fréquentation des grands textes littéraires et philosophiques *dans lesquels toutes ces questions sont ardemment remuées* permet de surnager au jour le jour. Il nous faut alors mettre aussi au point une artillerie (lourde ?) de *stratagèmes argumentatifs imparables* afin de convaincre les jeunes esprits que la pensée est une mer navigable dans laquelle on slalome entre les errances passées afin de se construire une sagesse possible.

LA CLOCHE DE NIETZSCHE

« Il ne suffit pas que tu comprennes dans quelle ignorance vivent l'homme et l'animal ; il faut encore que tu aies la volonté d'ignorance et que tu en fasses l'apprentissage. Il est nécessaire pour toi que tu comprennes que sans ce genre d'ignorance la vie elle-même serait impossible, qu'elle est une condition nécessaire pour que le vivant se conserve et prospère : une grande, une solide cloche d'ignorance doit t'enclore de toutes parts. »

Friedrich NIETZSCHE, *Fragments posthumes, Été-automne 1884, 26 [294], Paris, Gallimard, vol. X, 1982, p. 254.*

Réponse no. 2 : Prendre garde aux questions philosophiques déjà traitées !

Chère Michelle,

non non, cela ne passe au-dessus de la tête de personne. Ce que je dis est très simple. Je dis qu'on effleure, sur le site IDM, des questions trop difficiles, et qu'on ne peut pas se dispenser de se ressourcer régulièrement – quand on guerroie avec ces questions – aux grandes pensées littéraires et philosophiques.

Sinon, ce serait un peu comme si une communauté donnée, par exemple une communauté spéciale d'historiens des mathématiques, se mettait à recréer un espace de recherche en mathématiques en étudiant des questions qu'elle croie "ouvertes", alors qu'au sein de la communauté des mathématiciens professionnels, tout le monde sait fort bien que ces questions-là sont résolues depuis des siècles.

Ils nous feraient rire, de tels historiens des mathématiques, n'est-ce pas !

Deuxième réponse aujourd'hui, il y en aura d'autres, tant les questions que tu m'adresses sont nombreuses et délicates. C'est très précieux de pouvoir bénéficier d'interactions, merci.

Amitiés,

Joël

Réponse no. 3 : Corollaire métaphysique sur le calcul

Circulations conceptuelles fluides

Une tradition choisit de *contourner* les calculs. C'est-à-dire : de *ne pas faire* certains calculs. Ou de se les déclarer consensuellement comme n'étant pas faisables, pas exhibables. Et de se convaincre en privé par des tentatives avortées que tel est bien le cas. C'est un peu comme s'habituer à circuler en voiture sur des routes goudronnées : pourquoi s'imposerait-on de se lancer hors-sentier et pieds-nus à travers champs et dans la montagne hostile ?

Hilbert et Gromov

Rien jusqu'à présent n'a contredit la conviction qu'exprimait Hilbert en 1900 : *tout problème mathématique est résoluble mathématiquement*. Gromov va encorer plus loin : *We solve our problems essentially as fast as we state them. It took, probably, a couple of thousand brain-hours to state the Fermat theorem and mere instance (compared to* $\exp 2000$*) to solve it, no more than* 10^5 *brain-hours.*

Corollaire : *aucun calcul n'est infaisable*.

Explorer librement et sauvagement afin de mieux appréhender l'ouverture

Ce n'est que dans l'*a posteriori* de l'exploration libre et sauvage que certaines branches de calculs ébauchés pourront être envisagées comme superflues par rapport à tout objectif prédéfini, par exemple démontrer une conjecture. L'ouverture mathématique, c'est magnétique : on peut et on *doit* calculer dans toutes les directions possibles. Partout, des portes attirent, partout, des connexions sont possibles. Mais alors, comment embrasser tout cela ?

Parabole du Grand Master Mind Universel des Mathématiques

ENTRELACEMENTS

Au jeu du Master Mind, pourquoi la programmation de syllogismes de recherche est-elle si difficile à implémenter, demande Xavier Caruso ? Pourquoi la méthode « brutale » de recherche-élimination dans le dictionnaire est-elle plus performante ? Ces interrogations s'inscrivent dans un problème philosophique plus général qui va s'accentuer et se complexifier considérablement dans l'avenir : comment donc en effet, dans les cinq prochaines décennies, va-t-on *voir se positionner les unes vis-à-vis des autres*, d'un côté les activités humaines de la pensée, et de l'autre côte les machines électroniques sans pensée ? Problème très difficile, et avec internet tout autour de nous, qui d'entre nous ne réfléchit pas *chaque jour* à ce problème, ne serait-ce qu'*inconsciemment* ?

SIMPLICITÉS

Mais quant au Master Mind, ce jeu très attrayant auquel, adolescents et mathématiciens débutants, nous avons tous excellé, voici quelques observations que l'on pourra qualifier de *simples*. [By the way, un colloque intitulé :

Simplicity as an Epistemological Value in Scientific Practice www.paris-iea.fr

aura lieu le 8 et le 9 janvier à l'Institut d'Étude Avancées de Paris. Avis aux amateurs de concepts généraux !]

GOOGLE N'A PAS DE CERVELLE PROPRE

Premièrement, notre cerveau est clairement incapable de passer en revue en un dixième de seconde les ~ 2400 mots du Petit Robert, de sélectionner seulement ceux qui ont cinq lettres, et ensuite, à chaque réponse que donnera le meneur de jeu à l'une des questions-test que nous lui poserions, de reparcourir à nouveau tous les mots restants de cinq lettres et au même moment en un dix-millième de seconde pour chaque mot, ou bien d'éliminer le mot qui est lu, ou bien de le conserver en fonction d'un critère prédéfini et constant. D'ailleurs, notre cerveau n'est pas du tout programmé pour exécuter de telles tâches qui sont fondamentalement mécaniques. Qui songerait en effet à prendre le départ d'un 10 000 mètres en compétition avec un TGV Est sur le couloir de gauche ?

HÉRITIERS DE MILLIONS DE MILLIARDS DE GESTES

La méthode « simple » n'est donc pas si simple : il y a encore moins d'une cinquantaine d'années, elle aurait été impensable ! Notre pratique des ordinateurs méconnaît habituellement le fait que ces machines compressées jusqu'aux échelles microscopiques du monde physique local qui nous est acessible ont été construites, pensées, améliorées sur un temps extrêment long, avec la contribution de milliers, voire de dizaines de milliers d'ingénieurs-informaticiens. Le geste si simple aujourd'hui pour le jeune programmateur en herbe : « donnez-moi toutes les décimales de π jusqu'à la 10001-ème » contient en lui **plusieurs dizaines de millions** de gestes lents, difficiles et hésitants des concepteurs de machines étalés sur presque un siècle, sans compter l'accélération de la convergence des séries et le raffinement des algorithmes. Lukas a consacré presque 20 ans de sa vie à calculer les ~ 26 premières décimales de π avec la méthode d'exhaustion d'Archimède. Son nom en allemagne est resté attaché à la demi-circonférence du cercle unité, mais que dire l'étudiant lambda qui s'émerveille d'un prétendu pouvoir magique sur Maple, sur Mathematica ou sur n'importe quel *software* de calcul électronique, sinon qu'il est bien *naïf* de croire que son destin est fondamentalement différent des mathématiciens qui calculaient à la main ? En effet, tout est seulement une question d'*échelle*, les mathématiques sont infinies, et l'utilisation des calculateurs électroniques ne fait que repousser la limite du faisable. La recherche en mathématique est réellement un chantier inépuisable, et fort heureusement !

FAUST DU TEMPS LONG

Impossible de ne pas citer Hegel ici.

« C'est là assurément un temps *fort long*, et la longueur du temps que requiert l'esprit pour se procurer la philosophie est ce qui peut *ébranler*. J'ai dit au commencement que notre philosophie d'*aujourd'hui* n'est pas autre chose que le *résultat* du travail de tous les siècles. »

Stop ! Avons-nous bien lu cette phrase ? Lisons-la, relisons-la, méditons-la, et reméditons-la ! *Moment, please* ! **It's so good, it's so great to read that !**

« Il faut savoir, quand on est frappé d'un temps si long, que cette longueur de temps a été utilisée pour acquérir ces concepts–non tant jadis que maintenant. Il faut savoir en général que l'état du monde, d'un peuple, dépend du concept qu'il possède de lui-même ; **le royaume de l'esprit n'est pas comme un champignon qui pousse en une nuit** ; qu'il y ait eu besoin d'un temps si long ne frappe que lorsqu'on ne connaît pas la nature et l'importance de la philosophie et qu'on n'y prête pas attention [...] »

G.W.F. Hegel *Leçons sur l'histoire de la philosophie*, Introduction, Bibliographie, Philosophie Orientale, Traduction de Gilles Marmasse, Paris, Librairie philosophie J. Vrin, 2004, 207 pp.

Mirages de la mémoire englobante

Deuxièmement, notre être biologique est principalement structuré pour se mouvoir dans un univers d'options exponentielles en se posant des questions pour décider de chaque acte. Cela aussi, c'est le fruit d'un temps long, mais en fait extrêment plus long que celui de l'Histoire, puisque la structuration du vivant remonte au-delà de la préhistoire, à plus d'un milliard d'années. Donc la méthode syllogistique que nous aimons tous au Master Mind, celle que nous a transmise l'Évolution (ou le Créateur), c'est en fait la plus puissante, car elle seule permet de surmonter le mur exponentiel des examens exhaustifs. Mais pour le Master Mind, il y a un petit mirage : en fait, depuis disons deux décennies, nos ordinateurs sont déjà assez puissants pour lire 50 000 mots en une fraction de seconde. C'est presque de la triche, c'est un peu comme si l'on demandait à une automobile de faire 100 mètres dans la rue : trop fastoche ! Mais il en est tout à fait autrement pour, disons, le problème du voyageur de commerce (P versus NP), ou encore provisoirement, pour le go, après qu'en été 1997, *Deep Blue* a battu Kasparov *mais avec l'aide très substantielle d'une mise en mémoire de milliers de parties jouées auparavant par des humains*, un peu comme le dictionnaire fini de mots possibles pour le Master Mind. Pour terminer ces remarques spontanées, certains logicistes auraient bien aimé dans les premières années du vingtième siècle ramener l'arithmétique à un examen de toutes les formules que l'on peut écrire en langage formel pour ne conserver que celles qui fournissent de vrais théorèmes, mais cette idée est en fait tristement stupide : il y a déjà beaucoup plus de combinaisons possibles $\sim 26^{80}$ de 26 lettres *dans une seule ligne* que d'atomes ($\ll 10^{100}$) dans tout l'univers observable ! 50 000 mots, ce n'est rien, maintenant, mais 26^{80} restera éternellement au-delà d'une borne supérieure raisonnable.

Parabole du Grand Master Mind Universel des Mathématiques

La recherche en mathématiques, c'est poser indéfiniment ses pions multicolores afin de tester ses idées devant le Grand Inconnu qui résiste.

Conclusion de ces observations

Donc au total, la proposition de Xavier Caruso : programmer des syllogismes subtils pour jouer au Master Mind, cette proposition reste de très

loin la meilleure idée, et c'est bien pour ces raisons profondes que la vie et la société ne peuvent se dispenser de brillants chercheurs en mathématiques.

ÉPI-PROVOCATOLOGUE

Re-terminons une seconde fois en citant une provocation pénétrante d'un célèbre GéoMaître, qui ne sera pas–isn't it ?–complètement hors-sujet.

Mikhail Gromov : *Think of those computers playing chess. They certainly play better than maybe one or two people in the world, but we still can play chess because we like it.*

Rémi Langevin : *Right.*

Mikhail Gromov : *It changes completely the attitude towards chess. I do not think chess will exist seriously in another thirty years. Computers do it better, it is not interesting. Imagine if that happens to mathematics. If computers do it really better it would be some different kind of mathematics maybe.*

Poincaré en 1908 dans son allocution « L'avenir des mathématiques » au Congrès International des Mathématiciens n'avouait-il pas aussi qu'il n'était qu'un joueur d'échecs de niveau très moyen ?

Mathématiques et société ? Outil de liberté !

Avenir ?

Mardi 1er et mercredi 2 décembre dernier : colloque exceptionnel « Mathématiques à venir », grand moment d'universel. Hésitations de notre époque, fin du consensus sur la valeur de la « Science », remise en cause de la place autrefois incontestable des « savants », fin des valeurs de l'esprit pur en soi et pour soi, bref, héritiers d'un passé trop complexe et conscients des incertitudes de l'avenir, que devons-nous faire ?

Évolution et complexification

M'est venue l'« idée-constatation » toute simple : les sciences, et en particulier les mathématiques, ont évolué *trop vite* par rapport au reste de la « société », et ce, depuis le dix-neuvième siècle, avec un effet d'explosion récent que nous connaissons tous. Alors plutôt que de tenter seulement de nous « justifier »vis-à-vis de la société — ne le faisons-nous pas déjà suffisamment vis-à-vis des comités d'évaluation, des revues, et de la rigueur mathématique elle-même —, montrons aussi à tous ceux que nous rencontrons que les mathématiques sont un formidable *outil de liberté*, comme Adrien Douady aimait à le dire.

Liberté, individuation, tolérance

Oui, un outil de liberté, d'individuation et de tolérance grâce auquel la société *progresse* à travers chacun d'entre nous. Un outil de liberté idéal ou appliqué par lequel nous savons nous dégager régulièrement de la routine, des embouteillages et des corvées répétitives. C'est cela aussi, les mathématiques, des moments intenses de liberté, de rêverie et de satisfaction intellectuelle renouvelée.

La vie comme œuvre : littérature et mathématiques — libres parcours

Dans ses cours au Collège de France des années 1978–1979 et 1979–1980 présentés et annotés par Nathalie Léger (Seuil, Paris, 2003), Roland Barthes propose, pour l'écrivain — pour le mathématicien aussi — de « faire de sa vie une œuvre, d'en faire *son* Œuvre » et il expose toutes les difficultés qu'on peut avoir à entrelacer le travail de la pensée à la vie commune de tous les jours.

Nous emprunterons à Barthes sa démarche et reproduirons quelques citations étonnantes qu'il a butinées dans le corpus classique de la littérature française ; nous en insèrerons aussi d'autres, récolte de nos propres lectures.

VIVRE POUR ÉCRIRE

Certains peuvent penser que l'art est la forme de vie de ceux qui en réalité ne vivent pas. Pourtant, un poète ne doit pas renoncer à la vie ; tout au plus est-ce la vie qui se charge de l'éviter.

Antoni TABUCCHI, citant de mémoire Eugenio MONTALE.

En mathématiques, comme en littérature, la plus grande partie du temps de travail journalier consiste à *écrire*, ou plus exactement à *œuvrer pour écrire*, à *œuvrer* pour coucher ses idées sur le papier, à mettre en forme ses résultats pour les transmettre dans un langage « lisible ». Or rien n'est plus difficile que d'*écrire*, en mathématiques, surtout si l'objectif principal est de *bien* écrire. Car en mathématiques, un *art poétique syncrétique* doit gouverner la mise en forme dans son ensemble (définitions, lemmes, propositions, théorèmes, calculs, illustrations, légendes, *etc.*), de manière à satisfaire simultanément une exigence d'élégance « littéraire », c'est-à-dire une recherche de la distinction dans le langage de l'esprit ou encore une quête du raffinement dans la pensée visible, tout en respectant absolument le devoir de rigueur scientifique et de précision technique.

Ce qui aggrave, chez Flaubert, la souffrance de l'enfantement littéraire, c'est qu'il porte jusqu'à l'extrême les conséquences de ses théories de l'art objectif et poursuit avec acharnement un style « qui serait rythmé comme le vers et précis comme le langage des sciences ». Georges DUMESNIL.

ÊTRE RÉSOLUMENT LECT-ACTEUR

Ces deux exigences presque antagonistes : viser la limpidité littéraire, et expliciter toute la technicité mathématique, travaillent donc le style dans ses hésitations permanentes. Binôme de torsion, ces deux contraintes sous-tendent ainsi la phrase en gestation jusqu'à des formulations plus ou moins stabilisées. Pour accentuer la difficulté d'être satisfait de ce que l'on écrit

(car on ne l'est jamais), l'« électronisation » des textes transforme potentiellement chaque lecteur en « *lect-acteur* » susceptible de remodeler par lui-même toute phrase que son désir d'absolu dans la pensée lui fera voir comme imparfaite. Chez certains écrivains, le caractère provisoire et instable des formulations est le premier moteur de l'écriture, toujours fuyante. Leur regard pénétrant détricote malgré eux presque toutes les toiles inachevées.

Ainsi donc à tout le moins, concision, précision, correction, rigueur, justesse, élégance, intuition, et vérité mathématique : tous ces critères doivent être remplis en cohérence. Et c'est précisément là que destin d'écrivain et destin de mathématicien se rejoignent singulièrement : dans l'*œuvrer* de l'écriture, exposé aux hésitations, aux affres, et aux découragements. Que nous dit Flaubert de cet état ?

« Le Christ de la littérature »

La tête me tourne et la gorge me brûle d'avoir cherché, bûché, creusé, retourné, farfouillé et hurlé, de cent mille façons différentes, une phrase qui vient enfin de se finir. Elle est bonne, j'en réponds ; mais ça n'a pas été sans mal ! Gustave Flaubert, Lettre à Louise Colet, 25-26 mars 1854.

Voilà trois semaines que je suis à écrire dix pages ! Je passe des journées entières à changer des répétitions de mots, à éviter des assonances. Le même, à la même, 20 avril 1853.

Flaubert regardait la refonte et la difficulté comme les signes mêmes du talent. Il faisait deux pages par semaine, vingt-cinq pages en six semaines, vingt-sept pages en deux mois. Il s'applaudissait d'avoir terminé en quatre semaines quinze pages et, de juillet à fin novembre, une scène. À chaque instant, dans ses lettres, on relève de pareils aveux. Il y a des milliers de pages, toutes noires de ratures, où on lit jusqu'à huit ou dix rédactions d'un même passage. On reste anéanti devant ce qu'un tel labeur représente de patience, de volonté, d'obstination, et, il faut le dire aussi, de résistance physique. Antoine Albalat.

Algèbres coralliaires

Mais la partie la plus excitante de l'activité de recherche, c'est celle où l'on *cherche*, le moment de la rêverie libre, des figures multicolores, des calculs bourgeonnants, des tentatives nouvelles, et des intuitions *fluides*. Pour qui sait jongler avec les équilibres subtils de la pensée, chercher, c'est, la plupart du temps, *trouver à coup sûr*, trouver quelque chose de neuf, soupçonner des pistes, discerner des idées, entrevoir des résultats nouveaux, rêver de théories systématiques, même s'il ne s'agit pas, évidemment, du

Saint-Graal ou de l'hypothèse de Riemann. Grande plongée dans les profondeurs indéfinies des mathématiques : le corps est fait pour bouger, le cerveau pour explorer. En chasse de formes symboliques : coquillages multiformes, mollusques, poulpes, poissons multicolores, papillons exotiques, éléphants véloces, pattes de dinosaures, gorges de la Lienne, *etc.*

Au cœur du globe, dans les eaux chaudes de la ligne et sur leur fond volcanique, la mer surabonde de vie à ce point de ne pouvoir, ce semble, équilibrer ses créations. Elle dépasse la vie végétale. Ses enfantements du premier coup vont jusqu'à la vie animée. Mais ces animaux se parent d'un étrange luxe botanique, des livrées splendides d'une flore excentrique et luxuriante. Vous voyez à perte de vue des fleurs, des plantes, des arbustes ; vous les jugez tels aux formes, aux couleurs. Et ces plantes ont des mouvements ; ces arbustes sont irritables, ces fleurs frémissent d'une sensibilité naissante, où va poindre la volonté. Jules MICHELET, La Mer, IV, Fleur de sang.

GROWING FORESTS OF COMPUTATIONAL POLYPS

For us, the challenge is to control everything in a sea of signs. Computations are to be organized like a living giant coral tree, all part of which should be clearly visible in a transparent fluid of thought, and permanently subject to corrections. Indeed, it often happens that going through a problem involving massive formal computations, some disharmony or some incoherency is discovered. Then one has to inspect every living atom in the preceding branches of the growing coral tree of computations until some very tiny or ridiculous mistake is found. In addition to making easy the reading, a perfectly rigorous way of writing the formal identities which respects a large amount of virtual conventions facilitates to reorganize rapidly the coral tree after a mistake has been found. The accumulation of new virtual conventions, all of which we cannot speak, constitutes another coral metatree and another profound collection of tricks. J.M., Acta Appl. Math. 2006.

CONQUÉRIR DES INTUITIONS VISIONNAIRES

Ainsi le mathématicien travaille-t-il en quelque sorte à se *rendre visionnaire*, à créer pour lui-même une certaine forme d'« attraction-propulsion » de sa propre pensée *vers* l'Inconnu, comme l'exprime par exemple Rimbaud dans sa *Lettre du Voyant* (à Georges Izambard, le 13 mai 1871). La recherche en mathématiques, c'est aussi cela : une poïétique imaginative (provoquée) de la mentalisation conceptuelle.

Maintenant, je m'encrapule le plus possible. Pourquoi ? Je veux être poète, et je travaille à me rendre voyant *: vous ne comprendrez pas du tout et je ne saurais presque vous expliquer.*

BABEL IDÉALE

Soit un après-midi, soit une journée ou soit même une semaine tout entière que l'on avait libérée pour se lancer dans le travail libre et plein de bonheurs espérés, par exemple : pour travailler à la rédaction d'une démonstration, pour avancer un calcul de longue haleine, ou mieux encore — plaisir mathématique suprême — pour se mettre à lire en parallèle plusieurs ouvrages que l'on déploie sur son bureau en compagnie de plusieurs articles sélectionnés que l'on désagrafe méticuleusement et que l'on étend aussi devant soi. Nous commençons alors à pénétrer un sujet inconnu en comparant *comme un stratège* les discours que ces diverses sources lues en diachronie parviennent à élaborer face aux « résistances mathématiques fertiles ».

Dans ces fragments de Tour de Babel que nous échantillonnons comme un enfant surpris par leur beauté minérale, et que nous commençons alors à déchiffrer en rêvant légèrement, lentement, les signes très problématiques de la réalité idéale des mathématiques se révèlent progressivement à nous, quelle que soit l'époque à laquelle ont vécu leurs divers auteurs, maintenant si proches de nous en pensée à travers leurs siècles lointains.

Presque comme s'il s'agissait de délicieux filets de féra du Lac de Joux « servis sur table » à l'Hôtel-Restaurant *Les Trois Suisses* aux Bioux dans la Vallée de Joux, ces textes ouverts écrits par des mathématiciens qui ne se sont jamais connus se parleront aujourd'hui devant nous — pour nous seulement — et ils se répondront sur cette table-là, ce sera la magie, et ce sera splendide comme un survol aérien du lac de Joux saisi par l'embâcle, un jour de grand beau temps, après une 39ème *Traversée du Massacre* réussie.

HAINE DU COURRIEL : L'ADDICTION CONSENTIE

Mais voilà : tout perturbe et fait obstacle. Car hélas, il se produit souvent un ou plusieurs événements qui brisent sans pitié de tels projets d'émancipation idéale de la connaissance. « *Pour une poignée d'électrons indésirables* » et comme dans une scène de mauvais western, voilà que notre « boîte de mails » dégaine et se rappelle à nous.

PREMIER EXEMPLE DE TEMPS INTERCEPTÉ

Un courriel reçu ce jour-même annonce l'acceptation d'un article que l'on avait soumis pour publication il y a plus de 15 mois, mais sous réserve de modifications. Cette fois-ci, outre les inévitables micro-corrections

pointilleuses, le rapporteur se fend, quant à un lemme central, d'une heureuse suggestion de réorganisation et d'amélioration. « Mince alors, qu'est-ce qu'il est perspicace, ce rapporteur-là ! Qu'il en soit remercié. »

Toutefois, cet heureux événement imprévu va bien nous contraindre à consommer quelques jours de travail afin de réorganiser l'article ! Heureuse nouvelle, certes, mais ce projet de publication vieux d'un an et demi n'est-il pas aujourd'hui devenu un trublion indésirable ? Un rejeton qu'on avait oublié ? Ne s'insinue-t-il pas aujourd'hui dans une autre idylle mathématique à peine naissante qui semblait tout juste commencer ? La raison « raisonnable » voudrait que la semaine que l'on avait libérée soit en fait intégralement consacrée à la reprise de cet article . . . mais d'autres « soucis » se déclarent du même coup et ils briseront sans plus de pitié ce sous-projet qui aurait quand même pu devenir quelque peu désirable malgré tout.

Deuxième exemple de temps retranché

Un vrai courrier en papier et sous enveloppe ambrée émanant des *Mathematical Reviews* soumet à la recension un magnifique article de Gregor Fels et Wilhelm Kaup qui classifie les hypersurfaces uniformément Levi-dégénérées de $\mathbb{C}^3$, *via* une approche « théorie algébrique de Lie à la main », sans passer par la construction d'une connexion au sens d'Élie Cartan. Quatre-vingt deux pages à *Acta Mathematica*. C'est un honneur, on se démènera pour rédiger une recension à la hauteur du résultat. Mais combien de jours seront intégralement consacrés à cette tâche essentiellement secondaire ? Cinq jours, dix jours ? Où loger ce temps-là ? Quand donc débloquer ces jours ? Quel retard feront-ils prendre sur l'*œuvre* en cours qui n'arrive même plus à démarrer ?

Troisième exemple de tentation à la dispersion

Invitation en juillet 2009 au Japon, encore par courriel. Mais au mois de juillet, dans l'idéal, c'est la solitude fertile, le rêve de réalisation, la joie d'une production continue. Que décider ?

Quatrième exemple : le devoir kantien du séminariste

Un autre courriel confirme un exposé (annoncé sous réserve il y a deux mois) de Mikhael Gromov à l'*École des Hautes Études en Sciences Sociales*, et cela, dans trois jours précisément ! Impossible de le manquer ! Toutefois, avec l'accumulation de ces perturbations, toutes les prévisions de travail, maintenant compromises, sont à revoir.

Cinquième exemple : monocratie trouble-fête par omnidespotisme

« Last but not least », cet après-midi, il faudra (encore) manifester. Impératif catégorique, sommation à la mobilisation. Pour l'honneur, pour la dignité, pour défendre cette liberté de pensée si chèrement acquise, depuis le siècle des Lumières, sur toutes les gouvernances. Mais cette liberté est de plus en plus clairement menacée par un effet de mode ultra-consumériste et anti-intellectualiste entretenu par les tensions ubiquitaires de la compétition économique internationale.

Votre discours contient des contrevérités flagrantes, des généralisations abusives, des simplifications outrancières, des effets de rhétorique douteux, qui laissent perplexe tout scientifique. Vous parlez de l'importance de l'évaluation, mais la manière dont vous arrivez à vos conclusions est précisément le type de raisonnement hâtif et tendancieux contre lequel tout scientifique et évaluateur rigoureux se doit de lutter. Wendelin Werner.

Prédation procréatrice versus prédation destructrice

Cette compétition économique est certes aussi naturelle, animale et sauvage que le monde écologique des écosystèmes eux-mêmes (qui sont durablement menacés). Mais elle est incapable (pour l'instant) de se structurer autrement que par des liens de (d'auto-)prédation forte.

Faites donc plutôt des mathématiques ! L'espace de prédation y est infini *sans qu'on n'y détruise rien*, le gibier y sera toujours magnifique, et Internet relaiera toutes vos découvertes.

En mathématiques, la « prédation » est procréatrice, jamais destructrice.

Et comme le disait notre cher et regretté Adrien Douady :

« Les mathématiques doivent être un outil de liberté »,

n'en déplaise à toutes ces rhétoriques flamboyantes et dirigistes qui s'insinuent dans nos journées de travail et polluent nos méditations, alors que ce dont elles « parlent » :

- défis transversaux et stratégie nationale de recherche et d'innovation ;
- comités de pilotage de la politique scientifique ;
- être proactif (*sic*) dans la montée en puissance des acteurs de site que sont les universités et clarifier le périmètre d'action du CNRS ;
- avoir un outil stratégique de vision prospective des besoins en termes de détection et de gestion (sic) des talents ;
- ce partenariat stratégique devra aussi être plus sélectif (on commence à comprendre) . . .

est infiniment plus simple que ce contre quoi notre esprit de mathématicien et de penseur se débat tous les jours. Oui, nous mathématiciens, nous penseurs, nous combattants de la connaissance abstraite, devons réaffirmer haut et fort l'autonomie absolue du monde idéal que nous construisons sans relâche.

« Abriter une aristocratie intellectuelle qui ne soit pas cooptée par la naissance ou par l'argent »

Rendre des comptes à la Société ? Nous, les plus haut perchés, alpinistes aux sommets de l'intelligence, alors que ni la finance internationale ni la gabegie footballistique ne rendent *absolument aucun « compte »* à la Société qu'elles dépecent ?

Le point de vue techno-populiste s'exhibe désormais sans complexe et souhaite réconcilier deux spiritualités : celle de l'épicier du coin et du chef comptable — « un sou est un sou » — et la spiritualité administrative — *autrefois un peu plus ambitieuse — de l'inspecteur des finances.*

Ces deux spiritualités marchent désormais main dans la main, sûre de leur bon droit, distribuant des ultimatums : « À quoi servez-vous ? Vous devriez avoir honte d'être aussi abstraits, aussi élitistes », agacées, sinon exaspérées, par toute activité qui ne se laisse pas enfermer dans un horizon borné de chef comptable et apparaît donc comme un défi insupportable à la misère du « pragmatisme *» contemporain dont aime à se réclamer le techno-populisme. Nous touchons ici un point sensible de sa tartuferie : se sentir insulté par tout ce qui le dépasse et dénoncer comme « élitiste » toute démarche un tant soi peu éloignée des affairements de l'« homme de la rue » — de ce qu'il est convenu d'appeler le « sérieux de la vie » — et de la niaiserie de son « vouloir-communiquer ».*

C'est pourquoi, pour nos « démocrates » techno-populistes, l'enseignement coûte toujours trop cher puisque de toute manière la crétinisation par la communication remplace avantageusement la caporalisation d'antan.

Une connaissance même sommaire de pays comme l'Allemagne, l'Angleterre ou la France montre pourtant que les périodes les plus brillantes de leur histoire ont toujours résulté d'une capacité à aménager des espaces à l'abri des pressions de la demande sociale immédiate, des hiérarchies en place, et donc aptes à recueillir de nouveaux talents sans distinction de classe, bref à abriter une aristocratie intellectuelle qui ne soit pas cooptée par la naissance ou l'argent. Gilles Châtelet, Vivre et penser comme des porcs, de l'incitation à l'envie et à l'ennui dans les démocraties-marché, 1998.

Interlude allusif

Rivalité, conflit entre le monde, la vie et l'Œuvre. Distraction, divertissement, diversion, dérangement, déconcentration : en permanence, le non-essentiel s'immisce dans les vrais travaux d'envergure. Le blog : la glu. Internet : l'engrenage futile ? C'est là toute l'opposition (dialectique) entre occupation fondamentale et perturbation discontinue de la pensée. Une échappatoire est-elle possible ? Tour d'ivoire, isolement, méditation ? Leurre que tout cela ?

Vita Nova

L'idée de l'*œuvre*, dit Roland Barthes, est liée à l'idée d'une rupture radicale de la vie, d'une Novation du Genre de Vie, de l'Organisation d'une vie nouvelle : Vita Nova, ou Vita Nuova. Fantasme de rupture, se libérer, changer de vie (mathématique), se débarrasser des celulles mortes, éliminer les piles d'articles obsolètes, purger ses étagères, sélectionner ses livres, rajeunir ses lectures, s'offrir des semaines de méditations inédites, créer en soi et pour soi de la nouveauté, totale, grandiose, absolue.

Rompre intellectuellement avec l'ancienne vie, c'est s'imaginer, au prix d'un arrachement total et à condition de faire choix d'une solitude fertile, que l'on pourra produire de la pensée à plein régime, que l'on pourra écrire des textes à plein temps. Empiler librement des montagnes de manuscrits !

Autre sous-fantasme de Rupture de Vie : faire ses adieux ; c'est ce que fit réellement Proust avant d'entrer en retraite pour se consacrer à son Roman ; le 27 novembre 1909, il loua trois loges au Théâtre des Variétés pour la représentation du Circuit*, comédie de Feydeau et de Croisset, et y invita ses amis, en forme marquée d'adieu :* fête *pour entrer dans un livre — et non pour sa publication.* *Roland* Barthes*, op. cit. p. 283.*

Exercice intercalaire

Pour quelles raisons profondes aucun texte de mathématiques ne passe-t-il au rang de classique immortel qui est universellement lu, étudié et référencé ? Mathématiques, soyez jalouses de la littérature !

À l'écart de l'agitation : temps lisse, rêverie, méditation

Ce qui est désiré dans la *Vita Nova* associée à la réalisation de l'Œuvre, dit Roland Barthes, c'est une très grande lissité de la temporalité quotidienne. Discipline de la régularité indéfinie du temps d'action orienté vers l'écriture. Contre toutes les tentations de mondanité, de convivialité et de communication, l'écrivain doit donc se lier à un temps propre et sans aspérité, sans dérangement. Il doit opter pour le temps ouvert et dilatoire contre

la tentation de pactiser avec le temps planifié et fermé. Ce temps d'un ordre nouveau, créé en protection, sera réservé au pour-soi de la pensée entièrement consacrée à l'œuvre. Car la non-agitation du temps est absolument essentielle à l'agir tectonique de la méditation métaphysique. L'écrivain doit chercher à s'enchaîner à un devoir d'écrire qui le dépasse. Temps lisse donc, sans butée, sans échéance, sans rendez-vous, sans « choses à faire », dit Roland Barthes, et sans rien qui viendrait compromettre *La Chose* à faire.

Un an ou deux de solitude dans un coin de la terre suffiraient à l'achèvement de mes Mémoires *; mais je n'ai eu de repos que durant les neuf mois où j'ai dormi la vie* [expression admirable] *dans le sein de ma mère : il est probable que je ne retrouverai ce repos avant-naître que dans les entrailles de notre mère commune après-mourir.* CHÂTEAUBRIAND, « Préface testamentaire », Mémoires d'Outre-tombe.

Souvent je me jette dans un petit bateau que le receveur m'avait appris à mener avec une seule rame ; je m'avançais en pleine eau. Le moment où je dérivais me donnait une joie qui allait jusqu'au tressaillement, et dont il m'est impossible de dire ni de bien comprendre la cause, si ce n'était peut-être une félicitation secrète d'être en cet état hors de l'atteinte des méchants. Jean-Jacques ROUSSEAU, Île Saint-Pierre, Lac de Bienne.

CANEVAS DE VISIONS

Voici comment Pierre-Marc de Biasi (Génétique littéraire, ITEM, CNRS, ENS) décrit la manière dont Flaubert travaillait par rêveries dirigées et projections imagées afin de créer un *canevas de visions* préparatoires à son travail de la prose.

L'écrivain projette mentalement son histoire, enchaîne les séquences, dresse les décors, forme des hypothèses sur la psychologie de ses personnages et la structure du récit. Au cours de cette période qui peut durer quelques jours ou quelques semaines, Flaubert « travaille » généralement allongé sur son lit, confortablement installé sur le dos, les yeux au plafond : c'est ce qu'il appelle « rêvasser ». De temps en temps, il se lève d'un bond pour prendre une ou deux notes télégraphiques sur un détail aperçu ou sur une expression qui lui est venue et qu'il ne voudrait pas oublier, ou pour aller consulter un ouvrage — texte ou iconographie — dans lequel, il en est sûr, se trouve un élément essentiel pour valider ou relancer sa rêverie. Puis il retourne s'allonger, ou se carre dans son fauteuil, devant la croisée, les yeux noyés dans le lointain, en laissant se reconstituer derrière ses pupilles la familière procession des images. Le travail de conception se poursuit, et Flaubert reprend inlassablement ses séances de projection mentale jusqu'à

ce qu'il parvienne à voir nettement se dérouler le « film » du récit, plan après plan, séquences après séquences.

Place maintenant au combat indéfini de l'écriture

Telle de la limaille de fer aimantée, l'Idée qui s'in-forme vibrionne, irradiée toujours d'imperfections morphologiques. Des polypes de questions se hérissent, s'enracinent et se nourrissent du décalage perpétuel qui les déchire. Chacune des poussières métalliques qui constituent une phrase exige plusieurs opérations de chirurgie scripturale, jamais définitives, toujours soumises à révision. Sans nécessairement produire des virtualités d'ordre supérieur dans les moments de gestation, *l'électronisation des textes décuple leurs dislocations*.

Des dizaines de petits drapeaux pulvérulents, désarticulés et en partie invisibles palpitent sous le spectre zénonien du discontinu absolu des syllabes. Quel que soit le support, c'est en poussant une à une lentement des billes de mercure éclatées que la pensée bascule vers de l'irréversible orchestré. Avec ce stylet infime qui laboure le clavier, l'esprit en chrsysalide concocte ses métamorphoses.

Acupuncture querelleuse

Dès le stade embryonnaire, cribler le texte écrit de fléchettes interrogatives, questionner, attaquer, reprendre, et toujours : *s'insatisfaire*, jusqu'à ce que mots et symboles mathématiques se transforment en une multiplicité organique de petits détonateurs maîtrisés qui éclatent en une pétarade continue d'explosions intuitives.

Virtualités par maintien des indécisions

À la plume, au stylo ou sur clavier chaque lettre, chaque mot, chaque groupe, chaque phrase, chaque paragraphe doit rester « nu d'indécision ». Des tiroirs amovibles ensorcelés palpitent dans tout texte en gestation. Ratures, brassages, coupes, refontes, reprises, pivotements : ni l'écriture ni les registres informatiques ne sont assez puissants pour corporéiser les virtualités de l'écriture. Seule notre « cervelle » corporéise cette complexité. La rature lutte contre et avec l'aide du temps.

Un jour de séminaire, au square Rapp, Barthes avait prononcé cette formule limpide et énigmatique : « la littérature, c'est la rature ». […]

À la fiction du génie qui produit dans l'instant et sans effort par la seule mise en œuvre de ses facultés, la rature oppose les réalités d'un travail intellectuel qui implique l'effort et la durée : un investissement dans le temps, un processus de recherche et de transformation qui reconnaît l'existence de problèmes à résoudre et de difficultés à surmonter, une représentation de

l'activité artistique dans laquelle la dimension technique et érudite occupe, à côté du talent personnel et de l'intuition, une place non négligable.

Pierre-Marc de BIASI, Qu'est-ce qu'une rature ?

PIOCHER FURIEUSEMENT

Maintenant que j'en ai fini avec Félicité, Hérodias *se présente et je* v o i s *(nettement, comme je* v o i s *la Seine) la surface de la mer Morte scintiller au soleil. Hérode et sa femme sont sur un balcon d'où l'on découvre les tuiles dorées du Temple. Il me tarde de m'y mettre et de piocher furieusement cet automne . . .*

Gustave FLAUBERT, Lettre à Caroline, 17 août 1876.

Meditationes Algebraicæ

PROLOGUE

En 1782, le mathématicien anglais Edward Waring publie la troisième édition de ses *Meditationes Algebricæ*. Waring était l'un des mathématiciens les plus profonds du 18ème siècle, et ses travaux précurseurs en combinatoire anticipent largement la théorie moderne des partitions et des fonctions symétriques (Young, Serret, Ferrers, Schur, Mac Mahon, Kostka, Littlewood). Il a surtout travaillé sur la résolution des équations algébriques, la théorie des nombres, l'approximation des racines, les dénombrements, l'interpolation, les sections coniques et la cinématique.

On peut éprouver une certaine « attirance d'algébriste amateur » pour les travaux de Waring, car il s'y déploie des calculs libres, systématiques et foisonnants. En aventurier des arborescences algébriques et des arabesques combinatoires, Waring poursuit ses inspirations inductives ; il s'arme pour cela d'un flair tout particulier qui lui permet de soulever certains problèmes gratuits et originaux, et de les résoudre pour le seul plaisir d'exprimer sa virtuosité de calculateur distingué.

TROIS OBJECTIFS

Dans ce billet à durée de vie éphémère et qui n'est consacré ni à la dynamique polychromo-symbolique ni à la géométrie vidéo-animée, mon objectif sera de susciter des images mentales et des « *meditationes* », en dégageant trois axes d'exposition :

(1) motiver, exposer et expliquer dans un langage moderne la formule combinatoire *close* dite *de Waring* qui exprime explicitement les sommes dites *de Newton* (*voir* ci-dessous) au moyen des fonctions symétriques dites *élémentaires* (ce premier axe se voudra accessible à un élève du secondaire) ;

(2) formuler des commentaires philosophiques généraux sur la nature du calcul formel en mathématiques et sur le rapport complexe que nous entretenons avec celui-ci (paragraphes intercalaires) ;

(3) retranscrire, analyser, et commenter la démarche même de Waring et la manière dont il *pense* le théorème combinatoire qu'il a découvert (ce ne sera pas de l'histoire des mathématiques).

Contribuer sans figures, sans diagrammes et sans illustrations au site *Image des mathématiques*, c'est peut-être une gageure. Peu de thématiques algébriques se prêtent en effet à la vulgarisation, et il est bien malaisé de

transmettre à l'écrit toutes les intuitions fantastiques qui naissent dans le giron multicolore des manuscrits secrets des grands calculateurs.

Pour rédiger ce texte, je me suis servi de la traduction anglaise [11] par Dennis WEEKS de la troisième édition latine des *Meditationes Algebricæ*. Quel titre séduisant !

GUIDE DE LECTURE

L'amateur de textes de vulgarisation qui ne connaît pas les formules de Waring (ou qui ne s'en souvient plus) abordera ce texte d'une manière linéaire. Le curieux-pressé lira seulement les commentaires intercalaires, ou se reportera directement à la fin du billet, partie la plus originale. Le philosophe des mathématiques méditera, dialoguera, et rêvera peut-être. L'historien enfin pardonnera à l'auteur — il l'espère — ses insuffisances en matière documentaire.

POLYNÔMES INVARIANTS PAR PERMUTATION DES VARIABLES

Soit $\mathbb{K}$ un corps commutatif de caractéristique nulle, que l'on peut supposer être le corps des nombres rationnels $\mathbb{Q}$ pour fixer (concrètement) les idées. Soient $(x_1, x_2, \ldots, x_n)$ des variables formelles commutatives, que l'on peut supposer appartenir à $\mathbb{R}$ ou à $\mathbb{C}$ pour fixer les idées.

On considère l'algèbre, notée $\mathbb{K}[x_1, \ldots, x_n]$, de tous les polynômes :

$$P(x) = \sum_{\text{finie}} P_{\alpha_1,\ldots,\alpha_n} \cdot (x_1)^{\alpha_1} \cdots (x_n)^{\alpha_n},$$

à coefficients $P_{\alpha_1,\ldots,\alpha_n} \in \mathbb{K}$, qui sont sommes finies arbitraires de monômes $(x_1)^{\alpha_1} \cdots (x_n)^{\alpha_n}$ dont tous les exposants $\alpha_1, \ldots, \alpha_n$ sont bien sûr supposés positifs.

Une *permutation* de l'ensemble $\{1, 2, \ldots, n\}$ des n premiers entiers naturels est une bijection quelconque :

$$\sigma : \{1, 2, \ldots, n\} \longrightarrow \{1, 2, \ldots, n\},$$

de cet ensemble ; ainsi l'ensemble $\{\sigma(1), \sigma(2), \ldots, \sigma(n)\}$ est le même que $\{1, 2, \ldots, n\}$, à ceci près que ses termes, intervertis par σ, sont écrits dans un ordre différent. C'est le changement d'ordre qui constitue l'essence de la permutation.

Une double liste à deux lignes représente fidèlement l'action d'une permutation : l'image d'un élément est tout simplement située à sa verticale :

$$\begin{matrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 \\ 4 & 5 & 2 & 3 & 1. \end{matrix}$$

La collection, notée $\mathfrak{S}_n$, de toutes ces permutations σ, forme un *groupe* pour la composition entre applications de $\{1, \ldots, n\}$:

$$\tau \circ \sigma \in \mathfrak{S}_n \quad \text{pour tous } \sigma,\ \tau \in \mathfrak{S}_n;$$

la permutation identité appartient évidemment à $\mathfrak{S}_n$ et l'inverse (en tant qu'application) σ^{-1} d'une permutation σ est aussi clairement une permutation.

Le cardinal de $\mathfrak{S}_n$, à savoir le nombre de permutations σ distinctes de $\{1, 2, \ldots, n\}$, est égal au nombre, appelé *factorielle de* n :

$$n! := n \cdot (n-1) \cdots 2 \cdot 1,$$

qui est le produit de tous les entiers de 1 allant jusqu'à n. En effet, par une permutation σ quelconque, l'élément 1 peut prendre n valeurs distinctes dans $\{1, 2, \ldots, n\}$, et ensuite l'élément 2 peut prendre les $(n-1)$ valeurs restantes, puis il reste $(n-2)$ valeurs pour l'élément 3, *etc.*

Le groupe $\mathfrak{S}_n$ *agit* alors sur les variables $x = (x_1, \ldots, x_n)$ en permutant leurs indices inférieurs :

$$x^\sigma = (x_1, x_2, \ldots, x_n)^\sigma := \big(x_{\sigma(1)}, x_{\sigma(2)}, \ldots, x_{\sigma(n)}\big)$$

et par extension, cette action transforme chaque polynôme $P(x)$ en le polynôme :

$$P^\sigma(x) := \sum_{\text{finie}} P_{\alpha_1,\ldots,\alpha_n} \big(x_{\sigma(1)}\big)^{\alpha_1} \cdots \big(x_{\sigma(n)}\big)^{\alpha_n}.$$

Ainsi les permutations de $\mathfrak{S}_n$ agissent-elles *aussi* sur $\mathbb{K}[x_1, \ldots, x_n]$.

Tout polynôme $P^\sigma(x)$ sur lequel a agi une permutation $\sigma \in \mathfrak{S}_n$ peut se réécrire sous la forme :

$$\boxed{P^\sigma(x) = \sum_{\text{finie}} P_{\alpha_{\sigma(1)},\ldots,\alpha_{\sigma(n)}}\, x_1^{\alpha_1} \cdots x_n^{\alpha_n}},$$

où σ agit maintenant sur les indices inférieurs $\alpha_1, \ldots, \alpha_n$ des coefficients $P_{\alpha_1,\ldots,\alpha_n}$ de P. En effet :

$$\begin{aligned} P^\sigma(x) &= \sum_{\text{finie}} P_{\alpha_1,\ldots,\alpha_n} \cdot (x_{\sigma(1)})^{\alpha_1} \cdots (x_{\sigma(n)})^{\alpha_n} \\ &= \sum_{\text{finie}} P_{\alpha_1,\ldots,\alpha_n} \cdot (x_1)^{\alpha_{\sigma^{-1}(1)}} \cdots (x_n)^{\alpha_{\sigma^{-1}(n)}} \qquad [\text{poser } \sigma(k) = k'] \\ &= \sum_{\text{finie}} P_{\beta_{\sigma(1)},\ldots,\beta_{\sigma(n)}} \cdot (x_1)^{\beta_1} \cdots (x_n)^{\beta_n} \qquad [\text{poser } \alpha_{\sigma^{-1}(k')} := \beta_{k'}]. \end{aligned}$$

Maintenant, lorsque deux polynômes :

$$P(x) = \sum_{\text{finie}} P_{\alpha_1,\ldots,\alpha_n}\, x_1^{\alpha_1} \cdots x_n^{\alpha_n} \qquad \text{et} \qquad R(x) = \sum_{\text{finie}} R_{\alpha_1,\ldots,\alpha_n}\, x_1^{\alpha_1} \cdots x_n^{\alpha_n}$$

ont tous leurs coefficients égaux, c'est-à-dire $P_\alpha = R_\alpha$ quel que soit $\alpha \in \mathbb{N}^n$, on dit qu'ils sont *identiquement égaux*, ce que l'on écrit :

$$P(x) \equiv R(x).$$

Définition. Un polynôme $P(x)$ est dit *complètement symétrique*, ou (terminologie équivalente) $\mathfrak{S}_n$*-invariant* si l'on a

$$P^\sigma(x) \equiv P(x)$$

pour toute permutation $\sigma \in \mathfrak{S}_n$. De manière équivalente :

$$P_{\alpha_{\sigma(1)},\dots,\alpha_{\sigma(n)}} = P_{\alpha_1,\dots,\alpha_n} \quad \text{pour tous } \alpha_1, \dots, \alpha_n.$$

Historiquement, les premiers exemples de polynômes complètement symétriques proviennent du très célèbre problème de la résolution des équations algébriques. Évoquons-le en quelques mots.

Fonctions symétriques élémentaires

Lorsqu'un polynôme à une variable de degré n et à coefficients dans $\mathbb{K}$:

$$p(t) = t^n + a_1 t^{n-1} + \cdots + a_{n-1} t + a_n$$

dont le coefficient directeur est égal à 1, admet n racines $x_1, x_2, \dots, x_n$ dans $\mathbb{K}$, on démontre aisément qu'il s'identifie au produit de tous les facteurs $(t - x_i)$ possibles de degré 1 :

$$p(t) \equiv (t - x_1)(t - x_2) \cdots (t - x_n),$$

et un tel produit scindé montre alors visiblement que ces x_i sont les racines de p.

Maintenant, lorsqu'on développe ce produit, certaines fonctions universelles des x_i, connues depuis le quinzième siècle apparaissent naturellement. Par exemple, le coefficient de t^{n-1} est égal à :

$$-x_1 - x_2 - \cdots - x_n,$$

et c'est clairement un polynôme complètement symétrique en les x_i ; ensuite, le coefficient de t^{n-2} est égal à :

$$\begin{aligned} x_1x_2 + x_1x_3 + \cdots + x_1x_n \\ + x_2x_3 + \cdots + x_2x_n \\ \cdots\cdots\cdots \\ + x_{n-1}x_n, \end{aligned}$$

et il est lui aussi complètement symétrique. En toute généralité, le coefficient de t^{n-k} est égal à $(-1)^k \mathsf{s}_k$ où la *k-ième fonction symétrique élémentaire* :

$$\mathsf{s}_k = \mathsf{s}_k(x_1, \dots, x_n) := \sum_{1 \leqslant i_1 < i_2 < \cdots < i_k \leqslant n} x_{i_1} x_{i_2} \cdots x_{i_k},$$

est définie en prenant la somme de tous les produits possibles de k termes x_i distincts, écrits par ordre croissant d'indices (grâce à la commutativité de la multiplication entre variables). En particulier à la fin pour $k = n$, on a $\mathsf{s}_n(x) = x_1 x_2 \cdots x_n$ sans aucune somme, puisque les inégalités $1 \leqslant i_1 < \cdots < i_n \leqslant n$ ne sont satisfaites que pour le seul choix $i_1 = 1, \ldots, i_n = n$. Tous ces polynômes $\mathsf{s}_k(x)$ sont complètement symétriques.

En développant donc le produit en question, on obtient ainsi :

$$p(t) = t^n - \mathsf{s}_1\, t^{n-1} + \mathsf{s}_2\, t^{n-2} - \mathsf{s}_3\, t^{n-3} + \cdots + (-1)^n\, \mathsf{s}_n\, t^0.$$

Par exemple, pour $k = 3$:

$$\mathsf{s}_3 = x_1 x_2 x_3 + x_1 x_2 x_4 + \cdots + x_{n-2} x_{n-1} x_n.$$

Paradoxe : étudier les polynômes à une variable nécessite d'élaborer une théorie des polynômes à plusieurs variables, mais là n'est pas notre propos — puisque nous allons seulement nous concentrer sur un chapitre spécial de la combinatoire des fonctions symétriques.

Fonctions des racines d'un polynôme

Dans son célèbre mémoire [5] intitulé *Réflexions sur la résolution algébrique des équations*, Lagrange a exposé, repensé et unifié toutes les méthodes de résolution des équations algébriques dues à ses prédécesseurs : Scipione del Ferreo, Tartaglia, Cardan, Tschirnaus, Wallis, Cramer, Ferrari, Descartes, Bézout, Euler. Par la recherche d'une systématicité harmonieuse, le secret espoir de Lagrange était de pouvoir deviner la forme d'une certaine fonction algébrique inconnue $\mathrm{Inc}_L(x_1, x_2, x_3, x_4, x_5)$ des cinq racines complexes d'un polynôme général $t^5 + a_1 t^4 + a_2 t^3 + a_3 t^2 + a_4 t + a_5$ de degré cinq, afin de pouvoir trouver les formules de résolution que bien des géomètres quêtaient ardemment à cette époque[12].

Pour l'exercice de pensée, tentons ici de faire abstraction des travaux de Ruffini, d'Abel et de Galois qui devaient démontrer ultérieurement l'inanité d'une telle entreprise. Tentons donc de nous glisser dans l'esprit d'un mathématicien de la fin du 18ème siècle comme Lagrange ou Euler, pour qui le calcul libre et ambitieux, envisagé comme *exploration pure*, est la « bonne » manière de faire de la recherche en mathématiques.

D'un point de vue philosophique, c'est toujours de cette manière-là que nous dirigeons notre pensée face à toute question mathématique ouverte.

[12] À ma connaissance, c'est Charles Hermite qui le premier aurait fait voir en 1840, en faisant abstraction des travaux de Ruffini, d'Abel et de Galois, dans le tout premier article de mathématiques qu'il a publié alors qu'il était encore élève au Lycée Louis-le-Grand, que les recherches de Lagrange ne pouvaient fournir des résolvantes de degré inférieur à cinq, comme Lagrange lui-même l'avait pressenti.

- Élaguer, unifier, simplifier.
- Progresser du connu vers l'inconnu.
- Réorganiser inlassablement les calculs.
- Chercher à dévoiler les harmonies sous-jacentes.
- Rendre visible l'invisible.
- Et surtout : attendre l'instant crucial où l'*œil de la pensée* devine en un instant les structures générales.

Toujours est-il que Lagrange est parvenu, pour les équations de degré 2, 3 et 4, à rendre limpides les raisons pour lesquelles elles sont résolubles par radicaux, en toute généralité.

Par exemple, les formules, dites *de Cardan*, qui produisent les trois racines complexes x_1, x_2, x_3 d'un polynôme $t^3 + a_1 t^2 + a_2 t + a_3$ dont les coefficients rationnels a_1, a_2, a_3 sont généraux, reposent sur la fameuse *résolvante de Lagrange* :

$$\big(x_1 + j\, x_2 + j^2\, x_3\big)^3,$$

où $j := e^{2\pi i/3}$ (qui satisfait $j^3 = 1$) est racine troisième *primitive* de l'unité. Lorsqu'on permute de toutes les manières possibles les trois variables x_1, x_2, x_3 que cette résolvante incorpore, elle ne prend que *deux* valeurs différentes[13]. Lagrange démontre alors qu'elle est nécessairement solution d'une équation du *deuxième* degré, équation que l'on sait déjà (depuis longtemps) être résoluble par radicaux en toute généralité.

Pour l'équation générale de degré 4, Lagrange considère deux types de résolvantes :

$$x_1x_2 + x_3x_4 \qquad \text{ou} \qquad (x_1 + x_2)(x_3 + x_4)$$

qui ne prennent que *trois* (< 4) valeurs lorsqu'on permute de manière arbitraire x_1, x_2, x_3, x_4. Comme Lagrange l'a mis en lumière, c'est pour cette raison que Ferrari a pu ramener la résolution des équations de degré 4 à celles de degré 3, elles-mêmes résolubles par radicaux d'après ce qui vient d'être rappelé.

Existe-t-il alors des fonctions algébriques naturelles des cinq racines x_1, x_2, x_3, x_4, x_5 de l'équation générale $t^5 + a_1t^4 + a_2t^3 + a_3t^2 + a_4t + a_5 = 0$ qui ne prennent que quatre valeurs distinctes ? « Stratégie de la mer qui monte », disait Grothendieck : repenser, englober, unifier, deviner, et enfin : *trouver* — telle est la méthode universelle. Néanmoins, après des tentatives qui sont restées lettre morte dans ses manuscrits, Lagrange soupçonnait déjà

[13] Ici dans ce résumé seulement, nous court-circuitons les détails et nous sous-entendons quelques arguments. Le lecteur intéressé pourra se reporter aux références choisies qui sont mentionnées à la fin de ce paragraphe.

l'impossibilité d'une telle fonction hypothétique — mais nous n'en dirons pas plus.

Sur ce chapitre passionnant de l'histoire et de la philosophie des mathématiques dont nous allons maintenant nous écarter, nous recommandons les références [1, 2, 3, 4, 5, 7, 10].

THÉORÈME DE LAGRANGE

Avant d'élaborer sa théorie des résolvantes arbitraires, Lagrange énonçait déjà, au début du Chapitre 4 de son mémoire prolifique, un théorème fondamental concernant les fonctions qui ne prennent qu'*une seule* valeur différente lorsqu'on permute toutes ses variables $x_1, x_2, \ldots, x_n$. C'est cet énoncé basique que nous prendrons comme point de départ.

Théorème. *Soit $P = P(x_1, \ldots, x_n) \in \mathbb{K}[x_1, \ldots, x_n]$ un polynôme complètement symétrique par permutation de ses variables, à savoir qui satisfait :*

$$P\big(x_{\sigma(1)}, x_{\sigma(2)}, \ldots, x_{\sigma(n)}\big) \equiv P(x_1, x_2, \ldots, x_n)$$

pour toute permutation σ de l'ensemble $\{1, 2, \ldots, n\}$. Alors il existe un unique polynôme $Q = Q(s_1, \ldots, s_n)$ (dépendant de P) en n variables $(s_1, \ldots, s_n)$ tel que P se représente, via *la composition à gauche par Q, comme fonction polynomiale des fonctions symétriques élémentaires,* i.e. *tel que l'égalité :*

$$P(x_1, \ldots, x_n) \equiv Q\big(\mathsf{s}_1(x_1, \ldots, x_n), \ldots, \mathsf{s}_n(x_1, \ldots, x_n)\big)$$

soit identiquement satisfaite dans $\mathbb{K}\big[x_1, \ldots, x_n\big]$.

De nombreuses références (*voir* par exemple [1, 8]) offrent des démonstrations concises de cet énoncé. Ici, nous l'admettrons sans le redémontrer, car les démonstrations en question, imparfaites en un certain sens, passent sous silence bien des questions qui ne peuvent être résolues qu'avec la théorie des partitions, des tableaux de Young et des nombres de Kostka.

ANALYSE A POSTERIORI DU THÉORÈME DE LAGRANGE

Tout polynôme complètement symétrique s'écrit donc comme une certaine expression rationnelle en les fonctions symétriques élémentaires $\mathsf{s}_k(x)$. Cet énoncé transfère ainsi la $\mathfrak{S}_n$-invariance du polynôme $P = \sum P_{\alpha_1,\ldots,\alpha_n}\, x_1^{\alpha_1} \cdots x_n^{\alpha_n}$, laquelle recouvrait de manière opaque un (très) grand nombre de relations d'égalité entre les coefficients de ses monômes :

$$P_{\alpha_{\sigma(1)},\ldots,\alpha_{\sigma(n)}} = P_{\alpha_1,\ldots,\alpha_n},$$

vers *une représentation qui met parfaitement en lumière cette invariance* : on vérifie en effet immédiatement — après admission du théorème — que

l'action sur P d'une permutation $\sigma \in \mathfrak{S}_n$ quelconque :

$$\begin{aligned}\big(P(x_1,\ldots,x_n)\big)^\sigma &= \big[Q(\mathsf{s}_1(x),\ldots,\mathsf{s}_n(x))\big]^\sigma \\ &= Q\big(\mathsf{s}_1^\sigma(x),\ldots,\mathsf{s}_n^\sigma(x)\big) \\ &\equiv Q\big(\mathsf{s}_1(x),\ldots,\mathsf{s}_n(x)\big) \\ &= P(x_1,\ldots,x_n)\end{aligned}$$

laisse visiblement P invariant pour la seule et simple raison que les fonctions symétriques élémentaires elles-mêmes sont évidemment invariantes :

$$\big(\mathsf{s}_k(x)\big)^\sigma \equiv \mathsf{s}_k(x).$$

COMMENTAIRE PHILOSOPHIQUE

La compréhension adéquate de tout énoncé mathématique requiert toujours une « *perception métaphysique* » du gain synthétique qu'il produit. En fait, la conclusion d'un théorème fournit à la pensée comme une augmentation de sa propre énergie potentielle, parce qu'une information éclairante se substitue à l'ouverture des définitions initiales. Dans toute théorie, les hésitations de l'intuition, les imprécisions de la perception, et l'opacité des champs d'investigation s'estompent peu à peu grâce aux lemmes, grâce aux propositions et grâce aux théorèmes.

Tout théorème implique un acte de reconnaissance a posteriori *de l'évidence qu'il propose.*

Ce n'est en effet que dans l'*a posteriori* des conclusions véridiques que l'on est autorisé à lire la confirmation indubitable d'une simplicité attendue *a priori*. Dans ces moments-là, il n'est plus nécessaire de mobiliser la perplexité dialectique, pourtant essentielle à d'autres moments, lorsqu'il s'agit de progresser dans l'Obscur qui résiste.

L'harmonie formelle et la complétude symbolique dont font preuve les fonctions symétriques élémentaires $\mathsf{s}_k(x)$ pouvaient en effet laisser présager qu'elles seules sont invariables par rapport à l'action complète du groupe $\mathfrak{S}_n$ de permutations, et qu'il n'y a « pas d'autres » fonctions complètement symétriques. Le théorème rend raison d'une telle anticipation, même lorsqu'elle est recréée *a posteriori* pour les besoins de l'analyse. Souvent, l'esprit du conjectural détermine sa position par rapport à l'inconnu en invoquant l'action de certains principes de raison suffisante. Les métaphysiques leibniziennes vivent toujours au cœur de la recherche mathématique contemporaine, telle était l'une des thèses de Heidegger dans son ouvrage *Le principe de raison*.

FORMULES DE NEWTON

Considérons maintenant un exemple très classique de fonction complètement symétrique, la somme des puissances k-ièmes de toutes les variables x_i :

$$\mathsf{N}_k = \mathsf{N}_k(x) := x_1^k + x_2^k + \cdots + x_n^k,$$

appelées *sommes de Newton*, où $k \geqslant 1$ est un entier quelconque. Par convention, il est naturel de définir aussi $\mathsf{N}_0 := n$, puisque $x_1^0 + \cdots + x_n^0 = 1 + \cdots + 1 = n$. Ainsi pour $k = 1, 2, 3$, ces sommes s'écrivent :

$$\begin{aligned}
\mathsf{N}_1 &= x_1 + x_2 + \cdots + x_n \\
\mathsf{N}_2 &= x_1^2 + x_2^2 + \cdots + x_n^2 \\
\mathsf{N}_3 &= x_1^3 + x_2^3 + \cdots + x_n^3.
\end{aligned}$$

Visiblement, ces $\mathsf{N}_k(x)$ sont complètement symétriques :

$$x_{\sigma(1)}^k + x_{\sigma(2)}^k + \cdots + x_{\sigma(n)}^k \equiv x_1^k + x_2^k + \cdots + x_n^k,$$

parce qu'une permutation quelconque σ des indices inférieurs change seulement l'ordre d'apparition des x_i^k, et parce que l'addition de plusieurs termes peut s'effectuer dans n'importe quel ordre.

Question. *Que donne le théorème de Lagrange pour les sommes de Newton* ? Autrement dit : *Comment exprimer explicitement les sommes de Newton au moyen des fonctions symétriques élémentaires* ?

COMMENTAIRE SPÉCULATIF

À cette question, on serait tenté de répondre : inspectons tout simplement la démonstration du théorème de Lagrange, telle qu'on la trouve dans les références citées, regardons comment elle fonctionne, analysons ce qu'elle donne, et avec un peu de chance, nous constaterons qu'elle répond complètement à la question posée.

Malheureusement, les démonstrations citées ne descendent pas assez profondément dans la réalité mathématique pour être en mesure d'expliciter la dépendance précise des N_k en fonction des s_l. Pour répondre à la question, une recherche spécifique est en fait nécessaire. En mathématiques, nombreux sont les « théorèmes » séduisants qui semblent répondre de manière satisfaisante à tout un ordre de questions, et qui néanmoins travaillent furtivement à des niveaux partiels et incomplets. La première aptitude que doivent posséder aussi bien l'amateur que le professionnel, c'est ce *flair absolu de l'ouverture*.

DEUX EXEMPLES TRÈS ÉLÉMENTAIRES

Tout d'abord, il est évident que :

$$\mathsf{N}_1 = \mathsf{s}_1 = x_1 + \cdots + x_n.$$

Ensuite, pour réduire N_2 en fonction de s_1 et s_2, il suffit de remobiliser l'astuce connue qui consiste à faire apparaître un carré :

$$\begin{aligned} x_1^2 + \cdots + x_n^2 &= \big(x_1 + \cdots + x_n\big)^2 - 2\big(x_1x_2 + \cdots + x_{n-1}x_n\big) \\ &= (\mathsf{s}_1)^2 - 2\,\mathsf{s}_2, \end{aligned}$$

et le tour est joué. Pour N_3, une telle approche fonctionne aussi (exercice). Mais nous allons envisager le problème d'une manière beaucoup plus systématique.

RÉCURRENCES OUVERTES

Newton lui-même a écrit des formules de récurrence qui permettent de calculer *pas à pas* les N_k en fonction des s_l. On doit distinguer les cas, suivant que l'ordre k de l'exponentiation dans N_k est plus petit, ou plus grand que le nombre n des variables.

Proposition. *Lorsque $k \leqslant n$, la k-ième somme de Newton N_k s'exprime comme suit en fonction des $\mathsf{N}_{k'}$ d'ordre $k' \leqslant k-1$ et des fonctions symétriques élémentaires :*

$$\mathsf{N}_k = \mathsf{s}_1\,\mathsf{N}_{k-1} - \mathsf{s}_2\,\mathsf{N}_{k-2} + \cdots + (-1)^{k-2}\,\mathsf{s}_{k-1}\,\mathsf{N}_1 + (-1)^{k-1}\,\mathsf{s}_k \cdot k$$

(noter que le dernier terme est k, et non pas $\mathsf{N}_0 = n$ comme on pourrait le supputer).

Lorsque $k \geqslant n$, la k-ième somme de Newton N_k s'exprime différemment, par une formule tronquée au n-ième terme :

$$\mathsf{N}_k = \mathsf{s}_1\,\mathsf{N}_{k-1} - \mathsf{s}_2\,\mathsf{N}_{k-2} + \cdots + (-1)^{n-2}\,\mathsf{s}_{n-1}\,\mathsf{N}_{k-n+1} + (-1)^{n-1}\,\mathsf{s}_n\,\mathsf{N}_{k-n}.$$

On notera aussi que pour $k = n$, les deux formules s'identifient, puisque leurs deux termes ultimes coïncident alors. Tout comme le théorème, cette proposition sera admise (*voir* [1], p. 166). Dans un instant, nous démontrerons complètement un énoncé beaucoup plus significatif.

Ainsi par exemple, lorsque le nombre n de variables est supposé être $\geqslant 4$, on a :

$$\begin{aligned} \mathsf{N}_1 &= \mathsf{s}_1 \\ \mathsf{N}_2 &= \mathsf{s}_1\,\mathsf{N}_1 - \mathsf{s}_2 \cdot 2 \\ \mathsf{N}_3 &= \mathsf{s}_1\,\mathsf{N}_2 - \mathsf{s}_2\,\mathsf{N}_1 + \mathsf{s}_3 \cdot 3 \\ \mathsf{N}_4 &= \mathsf{s}_1\,\mathsf{N}_3 - \mathsf{s}_2\,\mathsf{N}_2 + \mathsf{s}_3\,\mathsf{N}_1 - \mathsf{s}_4 \cdot 4, \end{aligned}$$

et puisque le but est de représenter les sommes de Newton en fonction des s_l, on est immédiatement incité à insérer pas à pas ces formules les unes dans les autres, ce qui donne, en détaillant toutes les étapes de calcul :

$$\begin{aligned}
\mathsf{N}_2 &= \mathsf{s}_1 \cdot \mathsf{s}_1 - \mathsf{s}_2 \cdot 2 = \big(\mathsf{s}_1\big)^2 - 2\,\mathsf{s}_2 \\
\mathsf{N}_3 &= \mathsf{s}_1\big[(\mathsf{s}_1)^2 - 2\,\mathsf{s}_2\big] - \mathsf{s}_2 \cdot \mathsf{s}_1 + \mathsf{s}_3 \cdot 3 \\
&= (\mathsf{s}_1)^3 - 3\,\mathsf{s}_1\,\mathsf{s}_2 + 3\mathsf{s}_3 \\
\mathsf{N}_4 &= \mathsf{s}_1\big[(\mathsf{s}_1)^3 - 3\,\mathsf{s}_1\,\mathsf{s}_2 + 3\,\mathsf{s}_3\big] - \mathsf{s}_2\big[(\mathsf{s}_1)^2 - 2\,\mathsf{s}_2\big] + \mathsf{s}_3 \cdot \mathsf{s}_1 - \mathsf{s}_4 \cdot 4 \\
&= (\mathsf{s}_1)^4 - 4\,(\mathsf{s}_1)^2\mathsf{s}_2 + 4\,\mathsf{s}_3\,\mathsf{s}_1 + 2(\mathsf{s}_2)^2 - 4\,\mathsf{s}_4.
\end{aligned}$$

Formules de Waring

Théorème. (Waring) *Pour tout entier $k \geqslant 1$, la k-ième somme de Newton s'exprime comme suit au moyen des fonctions symétriques élémentaires :*

$$\mathsf{N}_k = k\cdot \sum_{i_1+2i_2+\cdots+ni_n=k} \frac{(-1)^{i_2+2i_3+\cdots+(n-1)i_n}}{i_1+i_2+\cdots+i_n}\,\frac{(i_1+i_2+\cdots+i_n)!}{i_1!\,i_2!\,\cdots\,i_n!}\,(\mathsf{s}_1)^{i_1}(\mathsf{s}_2)^{i_2}\cdots(\mathsf{s}_n)^{i_n}$$

Commentaire mathématico-philosophique

Voilà donc la réponse attendue. Par rapport aux formules de Newton, les formules de Waring présentent en effet un avantage considérable : pour connaître une somme N_k, il n'est plus nécessaire d'effectuer de très nombreuses substitutions et de lourds calculs à partir des longues formules inductives fournies par la Proposition ci-dessus. Newton obtenait ses formules avec des arguments relativement aisés, et ce faisant, laissait en fait ouvert un problème qui aurait éventuellement pu cacher des difficultés calculatoires insurmontables. La formule de Waring *ferme* les récurrences ouvertes que Newton avait déc-ouvertes.

Qu'appelle-t-on ici *fermer une récurrence* ? Sans élaborer d'analyse générale, voici seulement un exemple très simple. Il est bien connu que les formules inductives *ouvertes* :

$$\tbinom{n-1}{p-1} + \tbinom{n-1}{p} = \tbinom{n}{p}, \qquad \tbinom{1}{1} = 1,$$

qui permettent de calculer pas à pas les nombres binomiaux de Pascal (lesquels s'organisent en un triangle harmonieux) peuvent être remplacées par la formule *close* :

$$\tbinom{n}{p} = \tfrac{n!}{p!\,(n-p)!}$$

qui donne directement la valeur de ces nombres *sans avoir à reparcourir tous les calculs intermédiaires*, seulement indiqués par les formules de récurrence. La dialectique entre formules ouvertes et formules closes est ubiquitaire en mathématiques : elle manifeste la protension permanente qu'a l'irréversible-synthétique à se réaliser.

C'est Waring qui accomplira *réellement* le travail qui était laissé en suspens par Newton. Sans utiliser la Proposition ci-dessus et avant de voir comment Waring lui-même l'a utilisée, démontrons le théorème en utilisant un argument élégant qui repose sur la série formelle de la fonction logarithme. Mais juste auparavant, donnons une application.

EXEMPLE

En particulier, pour $k = 5$ et un nombre $n \geqslant 1$ quelconque de variables, il y a exactement 7 solutions entières à l'équation $i_1+2i_2+3i_3+4i_4+5i_5 = 5$, à savoir :

$$(i_1, i_2, i_3, i_4, i_5) = (5,0,0,0,0), \quad \text{ou } (3,1,0,0,0), \quad \text{ou } (2,0,1,0,0),$$
$$\text{ou } (1,2,0,0,0), \quad \text{ou } (1,0,0,1,0), \quad \text{ou } (0,1,1,0,0), \quad \text{ou } (0,0,0,0,1),$$

et par conséquent, une application directe de la formule de Waring donne N_5 *sans avoir à passer par le calcul de* N_4, N_3, N_2, N_1 :

$$\begin{aligned}\mathsf{N}_5 &= 5\Big[\tfrac{1}{5}\,\tfrac{5!}{5}\,(\mathsf{s}_1)^5 - \tfrac{1}{4}\,\tfrac{4!}{3!\,1!}\,(\mathsf{s}_1)^3\,\mathsf{s}_2 + \tfrac{1}{3}\,\tfrac{3!}{2!\,1!}\,(\mathsf{s}_1)^2\,\mathsf{s}_3 + \tfrac{1}{3}\,\tfrac{3!}{1!\,2!}\,\mathsf{s}_1(\mathsf{s}_2)^2 - \\ &\qquad - \tfrac{1}{2}\,\tfrac{2!}{1!\,1!}\,\mathsf{s}_1\,\mathsf{s}_4 - \tfrac{1}{2}\,\tfrac{2!}{1!\,1!}\,\mathsf{s}_2\,\mathsf{s}_3 + \tfrac{1}{1}\,\tfrac{1!}{1!}\,\mathsf{s}_5\Big] \\ &= (\mathsf{s}_1)^5 - 5\,(\mathsf{s}_1)^3\,\mathsf{s}_2 + 5\,(\mathsf{s}_1)^2\,\mathsf{s}_3 + 5\,\mathsf{s}_1(\mathsf{s}_2)^2 - 5\,\mathsf{s}_1\,\mathsf{s}_4 + 5\,\mathsf{s}_5.\end{aligned}$$

DÉMONSTRATION MODERNE DES FORMULES DE WARING

Pour la démonstration, partons maintenant du développement formel (standard) d'un polynôme qui est le produit de facteurs du premier degré :

$$(X-x_1)(X-x_2)\cdots(X-x_n) = X^n - \mathsf{s}_1\,X^{n-1} + \cdots + (-1)^{n-1}\mathsf{s}_{n-1}X + (-1)^n\mathsf{s}_n.$$

Rappelons à nouveau que le membre de droite fait naturellement apparaître les fonctions symétriques élémentaires, puisque par exemple, lorsque l'on développe ce produit, le coefficient de X^{n-1} s'obtient en prenant de toutes les manières possibles le terme constant $-x_k$ dans un seul facteur, ce qui donne $-x_1 - \cdots - x_n = \mathsf{s}_1$; le coefficient de X^{n-2} s'obtient en prenant de toutes les manières possible le terme constant dans *deux* facteurs distincts, *etc.* ; à la fin, le coefficient de X^0 est égal à $(-x_1)(-x_2)\cdots(-x_n) = (-1)^n\mathsf{s}_n$.

Dans cette identité basique, posons maintenant $X := \frac{1}{Y}$, multiplions-la par Y^n :

$$\begin{aligned} Y^n\Big(\frac{1}{Y} - x_1\Big)\Big(\frac{1}{Y} - x_2\Big)\cdots\Big(\frac{1}{Y} - x_n\Big) &= \\ = Y^n\bigg[\Big(\frac{1}{Y}\Big)^n - \mathsf{s}_1\Big(\frac{1}{Y}\Big)^{n-1} + \cdots + (-1)^{n-1}\mathsf{s}_{n-1}\frac{1}{Y} + (-1)^n\mathsf{s}_n\bigg], \end{aligned}$$

et distribuons équitablement une simple puissance Y^1 sur chacun des facteurs à gauche pour obtenir une sympathique identité :

$$\boxed{(1 - x_1Y)(1 - x_2Y)\cdots(1 - x_nY) = 1 - \mathsf{s}_1Y + \cdots + (-1)^{n-1}\mathsf{s}_{n-1}Y^{n-1} + (-1)^n\mathsf{s}_nY^n},$$

qui sera notre point de départ fondamental.

Appliquons pour commencer le logarithme, vu comme série formelle :

$$\begin{aligned} \log(1 - T) &= -T - \frac{T^2}{2} - \cdots - -\frac{T^k}{k} - \cdots \\ &= -\sum_{k\geqslant 1}\frac{T^k}{k} \end{aligned}$$

à chacun des deux membres de cette identité encadrée, en utilisant bien sûr la propriété magique $\log\big(a_1a_2\cdots a_n\big) = \log a_1 + \log a_2 + \cdots + \log a_n$ qu'a le logarithme de « transsubstantialiser » la multiplication en addition, ce qui nous donne :

$$\begin{aligned} \log(1 - x_1Y) + \log(1 - x_2Y) + \cdots + \log(1 - x_nY) &= \\ &= -\sum_{k\geqslant 1}\frac{x_1^kY^k}{k} - \sum_{k\geqslant 1}\frac{x_2^kY^k}{k} - \cdots - \sum_{k\geqslant 1}\frac{x_n^kY^k}{k} \\ &= -\sum_{k\geqslant 1}\frac{1}{k}\Big(x_1^k + x_2^k + \cdots + x_n^k\Big)Y^k \\ &= -\sum_{k\geqslant 1}\frac{1}{k}\,\mathsf{N}_k\,Y^k. \end{aligned}$$

Ainsi obtenons-nous presque gratuitement une série formelle indexée par les puissances Y^k de la variable Y dont les coefficients sont exactement (au facteur $-\frac{1}{k}$ près) les sommes de Newton $\mathsf{N}_k(x)$ que nous cherchons à représenter au moyen des fonctions symétriques élémentaires $\mathsf{s}_l(x)$.

Or par ailleurs, le membre de droite de l'identité de départ que nous avons encadrée ne comprend que ces $\mathsf{s}_l(x)$. Appliquons donc maintenant le logarithme formel aussi à ce membre de droite en utilisant une deuxième fois la

formule générale $\log\big[1-U\big]=-\sum_{i\geqslant 1}\frac{U^i}{i}$ pour obtenir :

$$\log\Big[1-\mathsf{s}_1Y+\cdots+(-1)^n\mathsf{s}_nY^n\Big]=\log\Big[1-\big(\mathsf{s}_1Y+\cdots+(-1)^n\mathsf{s}_nY^n\big)\Big]$$
$$=-\sum_{i\geqslant 1}\frac{1}{i}\big(\mathsf{s}_1Y-\mathsf{s}_2Y+\cdots+(-1)^{n-1}\mathsf{s}_nY^n\big)^i.$$

Il est clair maintenant qu'afin d'atteindre la formule de de Waring annoncée dans le théorème, il va nous suffire de développer toutes ces puissances $\big(\mathsf{s}_1Y-\mathsf{s}_2Y^2+\cdots\big)^i$ d'ordre i et de réorganiser tous les termes obtenus en une série $\sum_{k\geqslant 1}\mathsf{coeff}\cdot Y^k$ dont les termes « coeff » seront justement ceux que nous recherchons.

À cette fin, dans la formule classique du multinôme (elle aussi due à Newton) :

$$\big(Z_1+Z_2+\cdots+Z_n\big)^i=\sum_{i_1+i_2+\cdots+i_n=i}\frac{(i_1+i_2+\cdots+i_n)!}{i_1!\,i_2!\,\ldots\,i_n!}\big(Z_1\big)^{i_1}\big(Z_2\big)^{i_2}\cdots\big(Z_n\big)^{i_n}$$

remplaçons tout simplement $Z_1:=\mathsf{s}_1Y$, $Z_2:=-\mathsf{s}_2Y^2$, …, $Z_n:=(-1)^{n-1}\mathsf{s}_nY^n$, ce qui nous permet de poursuivre comme suit le calcul que nous avons laissé en suspens il y a un instant :

$$=-\sum_{i\geqslant 1}\frac{1}{i}\sum_{i_1+i_2+\cdots+i_n=i}\frac{(i_1+i_2+\cdots+i_n)!}{i_1!\,i_2!\,\cdots\,i_n!}\cdot$$
$$\cdot\,(\mathsf{s}_1)^{i_1}(-\mathsf{s}_2)^{i_2}\cdots\big((-1)^{n-1}\mathsf{s}_n\big)^{i_n}\cdot Y^{i_1+2i_2+\cdots+ni_n}$$
$$=-\sum_{i\geqslant 1}\sum_{i_1+i_2+\cdots+i_n=i}Y^{i_1+2i_2+\cdots+ni_n}\cdot\frac{(-1)^{i_2+2i_3+\cdots+(n-1)i_n}}{i_1+i_2+\cdots+i_n}\cdot$$
$$\cdot\,\frac{(i_1+i_2+\cdots+i_n)!}{i_1!\,i_2!\,\cdots\,i_n!}\cdot(\mathsf{s}_1)^{i_1}(\mathsf{s}_2)^{i_2}\cdots(\mathsf{s}_n)^{i_n};$$

à la deuxième ligne, nous réorganisons les termes en déplaçant la puissance de Y au début et en rassemblant toutes les puissances de -1.

Pour terminer, il nous faut encore transformer cette double somme en collectant, pour tout Y^k qui peut apparaître ici, le coefficient qui lui correspond. Ainsi un tel entier k doit être égal à :

$$k=i_1+2i_2+\cdots+ni_n;$$

il est $\geqslant 1$, puisque l'un des i_j au moins est $\geqslant 1$, et l'on doit considérer tous les n-uplets $(i_1,i_2,\ldots,i_n)$ tels que $i_1+2i_2+\cdots+ni_n=k$. Par conséquent, notre double somme précédente se transforme tout simplement en :

$$=-\sum_{k\geqslant 1}Y^k\sum_{i_1+2i_2+\cdots+ni_n=k}\frac{(-1)^{i_2+2i_3+\cdots+(n-1)i_n}}{i_1+i_2+\cdots+i_n}\cdot\frac{(i_1+i_2+\cdots+i_n)!}{i_1!\,i_2!\,\cdots\,i_n!}\cdot(\mathsf{s}_1)^{i_1}(\mathsf{s}_2)^{i_2}\cdots(\mathsf{s}_n)^{i_n},$$

et pour conclure la démonstration du théorème, il nous suffit juste d'identifier le coefficient de Y^k dans cette formule au coefficient $-\frac{1}{k}\,\mathsf{N}_k$ de Y^k dans la première formule que nous avons obtenue plus haut (noter la neutralisation des signes « $-$ »). Voilà démonstration « moderne et directe » du théorème de Waring achevée ! □

L'ÉNONCÉ DU THÉORÈME PAR WARING LUI-MÊME : PERPLEXITÉ ?

Le Chapitre 1 des *Meditationes Algebricæ* de Waring qui s'intitule : « *Une méthode pour trouver une équation dont les racines sont une fonction algébrique quelconque des racines d'une équation donnée* » commence par un premier problème qu'accompagne sa solution.

Problème 1. *Soient* $\alpha, \beta, \gamma, \delta, \varepsilon, \dots$ *les racines d'une équation donnée :*

$$x^n - p\,x^{n-1} + q\,x^{n-2} - r\,x^{n-3} + s\,x^{n-4} - t\,x^{n-5} + v\,x^{n-6} - w\,x^{n-7} + z\,x^{n-8} - \cdots = 0.$$

Trouver la somme $\alpha^m + \beta^m + \gamma^m + \delta^m + \varepsilon^m + \cdots$.

La somme demandée, écrit Waring, sera égale à :

$$p^m - mq\,p^{m-2} + mr\,p^{m-3} + \left\{\begin{array}{l} +\,ms \\ +\,\frac{m(m-3)}{2}\,q^2 \end{array}\right\} p^{m-4} +$$

$$+ \left\{\begin{array}{l} +\,mt \\ -\,m(m-4)\,qr \end{array}\right\} p^{m-5} + \left\{\begin{array}{l} -\,mv \\ +\,m(m-5)\,qs \\ +\,\frac{m(m-5)}{2}\,r^2 \\ -\,\frac{m(m-5)(m-4)}{2\cdot 3}\,q^3 \end{array}\right\} p^{m-6} +$$

$$+ \left\{\begin{array}{l} +\,mw \\ -\,m(m-6)\,qt \\ -\,m(m-6)\,rs \\ +\,\frac{m(m-6)(m-5)}{2}\,q^2 r \end{array}\right\} p^{m-7} + \left\{\begin{array}{l} -\,mz \\ +\,m(m-7)\,qv \\ +\,m(m-7)\,rt \\ -\,\frac{m(m-7)(m-6)}{2}\,q^2 s \\ -\,\frac{m(m-7)(m-6)}{2\cdot 3}\,qr^2 \\ +\,\frac{m(m-7)(m-6)(m-5)}{2\cdot 3\cdot 4}\,q^4 \end{array}\right\} p^{m-8} + \cdots .$$

S'agit-il vraiment du même théorème ? Pourquoi tant de lettres ? Waring n'utilise-t-il pas des indices ? Et ces grandes accolades ? Comment expliquer l'apparition chaotique des signes $-$ et $+$?

Cette série obéit à une double règle, écrit Waring, l'une concernant les produits littéraux, et l'autre concernant les *unciae*, ou coefficients numériques. Le lecteur est alors invité à *regarder la formule* pour y deviner toutes les structures combinatoires. Plutôt que de démontrer directement la formule, et plutôt que de la comprimer symboliquement, comme on aurait choisi de le faire pour n'importe quelle présentation moderne, Waring va au contraire *déployer et amplifier sa formule*, il va l'expliquer en la *décrivant sous plusieurs angles* afin que ses lecteurs puissent l'*embrasser mentalement* comme par l'effet d'une *géométrie descriptive* des structures algébriques.

Pour la partie littérale, dit Waring, la règle est la suivante : les termes entre accolades qui sont associés à une puissance donnée :

$$p^{m-u}$$

du premier coefficient p, où l'entier u est successivement égal à $1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, \ldots$, comprennent *tous* les produits littéraux possibles des autres coefficients (lettres) $q, r, q, t, v, w, \ldots$ du polynôme en question, les produits qui apparaissent devant notamment respecter une certaine règle d'homogénéité qui est spécifiquement définie comme suit.

By the exponents of the coefficients of the given equation, I mean the numbers designating their distance from the first term of the equation, namely, the exponent of the coefficient q *is* 2 *; of* r, 3 *; of* s, 4 *; of* t, 5 *; and so on — and in consequence, that the exponent of any power of the coefficient* q, *such as* q^{μ}, *shall be* 2μ *; the exponent of any power of* r, *say* r^{ν}, *shall be* 3ν *; the exponent of* s^{π} *shall be* 4π *; the exponent of* t^{ρ} *shall be* 5ρ *; and likewise for all the rest of them.*

Every literal product which can be so composed from the sum u *must be adjoined to the power* p^{m-u}. [11], p. 2.

Autrement dit, dans les accolades, on doit inscrire *tous* les produits possibles :

$$q^{\mu} r^{\nu} s^{\pi} t^{\rho} v^{\sigma} w^{\tau} \cdots$$

dont l'homogénéité $2\mu + 3\nu + 4\pi + 5\rho + 6\sigma + 7\tau + \cdots$ soit égale au défaut u par rapport à m de l'exposant $m - u$ de p dans le facteur de laison p^{m-u}.

Par exemple, pour l'accolade attachée à p^{m-6}, puisqu'on a les quatre seules décompositions :

$$6 = 6 = 2 + 4 = 3 + 3 = 2 + 2 + 2,$$

quatre monômes exactement doivent apparaître : v, qs, r^2, q^3. Les décompositions possibles de u en somme de nombres entiers $\geqslant 2$ affirment ainsi un *principe métaphysique de genèse littérale*. En résumé :

For the literal parts the rule is this : to form the product of the exponents of each individual coefficient of the given equation, with their respective powers, joining them symbolically to the quantity p, such that they sum up to u, where p^{m-u} is the power of p to which the products of these letters will be adjoined.

REMARQUES INTERCALAIRES

Dans ses manuscrits de recherche, pour une raison qui tient peut-être aux hasards de son parcours dans les principes organisateurs idéaux des mathématiques, Waring a collecté les résultats en fonction des puissances de p. Un premier moment d'exploration a consisté à appliquer sans réfléchir les formules de Newton jusqu'à un niveau élevé de complexité. Tous ces engagements : la foi décidée en l'induction, la confiance métaphysique à l'égard des principes rationnel, les postulats implicites quant à la préexistence d'harmonies littérales, exigent un tel travail de déploiement symbolique.

Fait symptomatique qui a tout pour nous séduire, Waring tient, dans la publication de ses travaux, à *conserver rigoureusement* toute la substance symbolique qu'il a créée et explicitée patiemment à la main. Même si cela peut sembler superflu pour les stricts besoins de l'exposition et de la transmission du savoir, Waring tient en effet à faire embrasser aussi à son lecteur les totalités presque incompressibles de l'induction mathématique. Pas de sécateur pour la sève algébrique.

Détail encore plus symptomatique, même lorsqu'il s'agit de de lister des séquences évidentes telles que $k = 1, 2, \ldots$ ou encore $2i_2 + 3i_3 + \cdots$, écritures que l'usage contemporain tronque habituellement dès le deuxième ou le troisième terme, Waring dévidera longuement tous ces minces fils d'Ariane qui sont autant d'incitations à entrer dans les labyrinthes indéfinis du calcul. Preuves que les intentions d'écriture sont bien présentes :

• le polynôme étudié est écrit dans l'énoncé du Problème 1 jusqu'à la profondeur -8 des exposants de x ;

• les monômes qui apparaissent entre accolades sont désignés par $q^{\mu}r^{\nu}s^{\pi}t^{\rho}v^{\sigma}w^{\tau}\cdots$ jusqu'à une longueur six ; à comparer à l'écriture moderne $x_1^{\alpha_1}\cdots x_n^{\alpha_n}$, qui n'est que de longueur deux.

C'est ainsi qu'on mobilise le mieux l'intuition (si imparfaite) de l'infini, en se conformant, par allusions suivies et images amplifiées, à sa générativité propre.

À l'opposé, le logiciel de calcul formel à qui l'on commande en quelques lignes d'effectuer les opérations de substitution, même s'il séduit par la production instantanée du résultat, est totalement incapable (du moins à

notre époque) de cette réflexivité mémorielle de la pensée qui nous permet d'embrasser descriptivement toutes les règles de formation combinatoire.

UNCIAE

Deux mystères restent à éclaircir : quels sont les coefficients des monômes $\left\{\text{coeff } q^\mu r^\nu s^\pi t^\rho v^\sigma w^\tau \cdots \right\} p^{m-u}$? Et quels sont leurs signes ?

Of the numerical coefficients, or unciae, the rule is this : for each literal product $p^{m-u}\, q^\mu r^\nu s^\pi t^\rho v^\sigma w^\tau \cdots$ *the coefficient will be a fraction, whose numerator is*

$$m(m-u+1)(m-u+2)(m-u+3)(m-u+4)(m-u+5)(m-u+6)\cdots$$

(in which the number of factors is equal to the sum of the indices, i.e. $\mu + \nu+\rho+\sigma+\tau+\cdots$*), and whose denominator is a product of factorials of the indices* μ, ν, π, ρ etc. *respectively. More explicitly, in our working example the coefficient of the litteral product* $p^{m-u}\, q^\mu r^\nu s^\pi t^\rho \cdots$ *will be*

$$\frac{m(m-u+1)(m-u+2)(m-u+3)(m-u+4)\cdots(m-u+\mu+\nu+\pi+\rho+\sigma+\cdots-1)}{\mu!\ \nu!\ \pi!\ \rho!\ \cdots}.$$

To the coefficient of the literal product is affixed a sign which will be positive or negative, when u *is an even number, according as the sum* $\mu + \nu+\pi+\rho+\sigma+\cdots$ *is even or odd, and the opposite sign will be affixed when* u *is an odd number ; more generally, the sign will be positive or negative according as the sum* $u + \mu + \nu + \pi + \rho + \cdots$ *is even or odd.*

CIRCULATION, GÉNÉRALISATION, COMPRÉHENSION

Cette fois-ci, toutes les règles sont dévoilées. On comprend instantanément que la *descriptive algébrique* offerte par Waring à son lecteur lui permet maintenant de calculer chacune des accolades adjointes à une puissance de p, par exemple (exercice d'application triviale) la prochaine puissance p^{m-9} — juste pour le plaisir de faire naître sous sa plume tous les monômes avec leurs coefficients entiers qui ne présentent maintenant plus aucun mystère.

Joie de savoir la réponse, bonheur de connaître les règles, sentiment d'être dans le secret des calculs.

La démonstration qu'en donne Waring, si elle n'était pas agrémentée de son souci de disposer les termes sur de longues lignes tabulaires qui remplissent tout une page, ne serait qu'une triste récurrence sur l'exposant m, en partant des formules (imparfaites) de Newton. Si nous ne nous engageons pas ici plus avant dans l'analyse d'une telle démonstration, mentionnons toutefois que Waring a réellement accompli le travail de fermeture des récurrences newtoniennes et que l'on peut s'imaginer que les trois règles

qu'il décrit, ils les a d'abord *devinées* en creusant ses calculs jusqu'à une certaine profondeur.

Comprendre la formule ici, ce n'est certainement pas (seulement) la démontrer. En mathématique, il existe un niveau multi-transversal de compréhension, comme une espèce de « vision gestaltiste » des équations qui ne se soucierait pas des fondements, des rigorisations arides, et des démonstrations minutieuses. Encadrés dans la dialectique du vrai et du faux par une rigueur spéculative qui est leur secret, Waring, Gauss, Hermite, puis Ramanujan et d'autres ont su se constituer un *maillage de visions* qui leur permettait de percevoir les nœuds de la réalité mathématique.

QUESTION

Comment l'Algèbre pourrait-elle briser les barreaux de la successivité temporelle ?

RÉFÉRENCES

[1] ARNAUDIÈS, J.-M. ; LELONG-FERRAND, J. : *Cours de mathématiques. Tome 1. Algèbre*. Troisième édition. 1er Cycle Universitaire. Classes Préparatoires. Mathématiques. Dunod, Paris, 1977. x+534 pp.

[2] AYOUB, *Paolo Ruffini's contributions to the quintic*, Arch. Hist. Exact Sci. **23** (1980/81), no. 3, 253–277.

[3] EDWARDS, H. : *Galois theory*. Graduate Texts in Mathematics, 101. Springer-Verlag, New York, 1984. xiii+152 pp.

[4] ESCOFIER, J.-P. : *Galois theory*. Graduate Texts in Mathematics, 204. Springer-Verlag, New York, 2001. xiv+280 pp.

[5] LAGRANGE, J.-L. : *Réflexions sur la résolution algébrique des équations*, Mémoires de l'Académie de Berlin de 1770–1771. Œuvres, tome III, Section II, pp. 205–424, Gauthier-Villars, Paris, 1867–1912.

[6] MACDONALD, I.G. : *Symmetric functions and Hall polynomials*. Second edition. With contributions by A. Zelevinsky. Oxford Mathematical Monographs. Oxford Science Publications. The Clarendon Press, Oxford University Press, New York, 1995. x+475 pp.

[7] SERRET, J.-A. : *Cours d'algèbre supérieure*, 2 vol., 4ème éd., Gauthier-Villars, Paris, 1877.

[8] STURMFELS, B. : *Algorithms in invariant theory*, Texts and Monographs in Symbolic Computation, Springer-Verlag, Vienna, 1993, vi+197 pp.

[9] TIGNOL, J.-P. : *Leçons sur la théorie des équations*. Monographies de Mathématique, 1. Université Catholique de Louvain, Institut de Mathématique Pure et Appliquée, Louvain-La-Neuve, 1980. 250 pp.

[10] VUILLEMIN, J. : *La philosophie de l'algèbre*, Presses Universitaires de France, Collection Épiméthée, Paris, 1962.

[11] WARING, E. : *Meditationes Algebricæ*, an English translation of the work of Edward Waring by Dennis Weeks, American Math. Soc., Providence, 1991.

Conjectures et aventures mathématiques

- **Delightful waves at the Fields Institute** ..... **68.**
- **Explication (presque élémentaire) de la conjecture de Green-Griffiths** ..... **68.**
- **Naviguer dans l'infini du calcul comme un poisson dans l'eau** ..... **69.**
- **Énoncé effectif pour la dégénérescence algébrique** ..... **70.**
- **Vendredi 14 novembre : pari osé et fou** ..... **71.**
- **Samedi 15 novembre : vol Air France 0352 Paris–Toronto** ..... **71.**
- **Dimanche 16 novembre : la peur au ventre** ..... **72.**
- **Lundi 17 novembre : grand soulagement !** ..... **72.**
- **Mardi 18 novembre : joie mathématique absolue** ..... **73.**
- **Discussions avec Siu : reigne sans partage de la métaphysique spéculative** .... **75.**
- **Qui n'expose pas ne s'expose pas et se repose** ..... **77.**
- **Vendredi 21 novembre : refusons de nous présenter à l'oral de rattrapage** .... **77.**
- **Manuscrits sélectionnés et opérateur $\mathcal{R}^+$ de Joël** ..... **78.**

• **Delightful waves at the Fields Institute.** Dans ce premier billet écrit sur l'invitation d'Étienne Ghys pour intervenir dans le nouveau site interactif du CNRS intitulé *Images des Mathématiques*, je voudrais relater l'histoire très récente d'une aventure mathématique délectable qui s'est déroulée au *Fields Institute* à Toronto, au Canada, lors de la conférence :

> "[A true story from the] Workshop Complex Hyperbolic Geometry and Related Topics, Fields Institute, Toronto, Canada, 17-21 November 2008".

Par ce témoignage riche en surprises et en rebondissements, je voudrais dire qu'à certaines occasions rarissimes, on s'amuse en mathématiques comme de grands enfants, et comme dirait Sartre, on jouit d'un « bonheur sans maître, ni collier, parfait », "because there is a real joy in practicing mathematics".

À Ragnar Sigurdsson qui fut l'un de ses élèves, Lars Hörmander confiait en privé que les moments de réussite en mathématiques, les moments où l'on a le sentiment d'avoir démontré un beau théorème, ou d'avoir eu une idée fondamentale, ces moments-là sont très rares dans une vie de mathématicien, et donc : " you really have to *enjoy* such moments ".

• **Explication (presque élémentaire) de la conjecture de Green-Griffiths.** La Conjecture de Green-Griffiths (1979) énonce que la plupart des variétés complexes X, à savoir celles qui sont dites « de type général », ont la propriété suivante : toute application holomorphe $f : \mathbb{C} \to X$ non constante doit nécessairement avoir son image $f(\mathbb{C})$ contenue dans une certaine sous-variété Y de X propre et stricte, cette sous-variété Y étant d'ailleurs autorisée à avoir des singularités, pourvu qu'elle soit de dimension inférieure à celle de X, telle est la conjecture.

Ici, l'objet unidimensionnel $f(\mathbb{C})$ envoyé dans X peut être vu intuitivement comme un filament lancé dans la variété X pour en tester la complexité, la dimension de X étant *a priori* très grande.

En fait, il existe des variétés unidimensionnelles, alias *surfaces de Riemann*, qui sont dites « spéciales » parce qu'elles peuvent héberger des images $f(\mathbb{C})$ non constantes, ce sont les surfaces de Riemann de genre égal à 0 (sphère) ou à 1 (tore), alors que les surfaces de Riemann dites « générales » forcent les images $f(\mathbb{C})$ contenues dans celles-ci à être *constantes*, donc dégénérées, et ce sont les surfaces de Riemann de genre $g \geqslant 2$. Ainsi la conjecture dit en particulier que toutes les surfaces de Riemann de genre égal à 0 ou à 1 qui sont « cachées » dans une variété de type général X, et qui sont donc « spéciales » d'après ce qui vient d'être dit, devraient nécessairement être « canalisées » dans un certain sous-objet strict Y de X.

En d'autres termes, *ce qui est spécial ne peut pas être partout distribué dans le général*, tel est donc le « principe métaphysique » élémentaire et plein de bon sens qui inspire cette conjecture.

D'ailleurs, la conjecture peut être renforcée de la manière suivante : si X est une variété *projective*, et si X est encore un peu plus générale, alors les images $f(\mathbb{C})$ doivent nécessairement toutes être constantes : *avec un peu plus de généralité, on élimine entièrement tout ce qui est spécial*.

Cettte deuxième conjecture a été formulée pour la première fois par le mathématicien japonais Shoshichi Kobayashi en 1970, l'année de ma naissance. En fait, c'est dans le cas où X est projective, *i.e.* contenue dans un espace projectif complexe $\P^{n+1}(\mathbb{C})$, que les deux conjectures sont les plus significatives, parce que l'on peut produire très facilement de très nombreux exemples de telles variétés X : il suffit en effet, dans des coordonnées homogènes $[z_0 : z_1 : \cdots : z_n : z_{n+1}]$ sur l'espace projectif $\P^{n+1}(\mathbb{C})$, de prendre n'importe quel polynôme

$$\begin{aligned} P &= P(z_0, z_1, \ldots, z_n, z_{n+1}) \\ &= \sum_{a_0+a_1+\cdots+a_n+a_{n+1}=d} \mathsf{Coeff}_{a_0,a_1,\ldots,a_n,a_{n+1}} \cdot z_0^{a_0} z_1^{a_1} \cdots z_n^{a_n} z_{n+1}^{a_{n+1}} \end{aligned}$$

homogène d'un certain degré fixé $d \geqslant 1$ à coefficients complexes $\mathsf{Coeff}_{a_0,a_1,\ldots,a_n,a_{n+1}} \in \mathbb{C}$ pour obtenir une variété X (peut-être avec des singularités) qui est une hypersurface, *i.e.* est de dimension n. Les variétés projectives de codimension quelconque sont alors définies par un nombre fini de telles équations polynomiales.

Notons immédiatement qu'il y a *a priori* un nombre gigantesque de coefficients arbitraires $\mathsf{Coeff}_{a_0,a_1,\ldots,a_n,a_{n+1}} \in \mathbb{C}$, donc un très, très grand nombre de telles variétés X.

• **Naviguer dans l'infini du calcul comme un poisson dans l'eau.** Par conséquent, s'il nous est permis de nous inspirer du langage philosophique d'Albert Lautman (1908–1944), ces innombrables polynômes que l'on pourrait écrire automatiquement sur des logiciels de calcul formel fournissent aux mathématiques un *principe fondamental de générativité symbolique*, ils garantissent un *principe autonome de genèse de la réalité abstraite*, et ils prouvent *de facto* l'existence d'un *réservoir indéfini de réalité mathématique*, pour reprendre une expression fétiche d'Alain Connes.

Alors l'hypothèse que X est une variété lisse (*i.e.* sans singularités) sera satisfaite pour presque tous les choix de coefficients, et l'hypothèse qu'elle est de type général sera satisfaite lorsque les degrés des polynômes en question seront tous suffisamment grands. Le général, c'est ce qui est de très grand degré, et c'est donc ce qui est *a priori* le plus complexe. Peut-on parler de ce qui est le plus complexe ? *Oui*, certains théorèmes peuvent et savent le dire, comme nous allons le voir dans un instant.

En résumé, avec les conjectures de Green-Griffiths (1979) et de Kobayashi (1970), on a donc affaire à deux énoncés qui sont absolument typiques, par leur difficulté et par leur profondeur, de la « mathématique anticipatrice », celle qui, en se basant sur quelques idées de bon sens, propose comme défi aux générations futures l'exploration d'objets mathématiques que tout le monde sait, en raison de leur très grande complexité, « impensables dans leur totalité ». Et sur les routes tracées dans la jungle obscure de l'Inconnu, tous les mathématiciens savent que la « réalité explorée » qui se construit sous leurs pas hésitants promet toujours de merveilleuses découvertes imprévisibles et enthousiasmantes.

• **Énoncé effectif pour la dégénérescence algébrique.** Voyons maintenant comment une solution a été donnée très récemment, dans le cas des hypersurfaces projectives de grand degré, à la conjecture de Green-Griffiths.

Théorème (DIVERIO-MERKER-ROUSSEAU)**.** *En dimension $n \geqslant 2$ arbitraire, la plupart des hypersurfaces projectives $X^n \subset \P^{n+1}(\mathbb{C})$ de l'espace projectif complexe contiennent un sous-ensemble algébrique strict $Y \subset X$ de dimension $\leqslant n-1$ qui absorbe intégralement l'image de toute application holomorphe non constante $f : \mathbb{C} \to X$, à savoir : on doit alors nécessairement avoir $f(\mathbb{C}) \subset Y$, pourvu que le degré $d = \deg X$ satisfasse la minoration effective :*

$$d \geqslant n^{(n+1)^{n+5}}$$

exprimée en fonction de la dimension n de X seulement.

En dimension n arbitraire, c'est le premier énoncé jamais obtenu dans cette direction.

L'annonce de ce résultat est parue le lundi 17 novembre 2008 à 00h00 sur le site américain de prépublications `arxiv.org` hébergé à Cornell University. Les curieux pourront donc consulter l'adresse internet arxiv.org/abs/0811.2346, pour y contempler ("in zapping style") les calculs très systématiques qui accouchent de cette borne doublement exponentielle $n^{(n+1)^{n+5}}$. Cinquante pages, *my Lord*, plus de cinquante pages de calculs très délicats !

Or ce fameux lundi en question coïncidait avec le premier jour de la conférence intitulée :

Workshop on Complex Hyperbolic Geometry and Related Topics, Fields Institute, Toronto, Canada, 17-21 November 2008

Pendant le semestre July-December 2008, Yum-Tong Siu du département de mathématiques de l'Université de Harvard à Boston était l'invité spécial des très prestigieuses *Distinguished Lecture Series*. Citons en passant l'intitulé de ses leçons :

Multiplier Ideal Sheaves – an Interface Between Analysis and Algebraic Geometry. THEMATIC PROGRAM ON ARITHMETIC GEOMETRY, HYPERBOLIC GEOMETRY AND RELATED TOPICS, JULY-DECEMBER 2008.

• **Vendredi 14 novembre : pari osé et fou.** Mais revenons-en maintenant à notre joli théorème. Deux jours et demi auparavant, le vendredi 14 novembre vers 16h, heure de Paris, le texte complet avait déjà été soumis — pari osé et fou ! — électroniquement à `arxiv.org`. Or les envois effectués peu de temps avant le week-end ne paraissent sur `arxiv.org` que le lundi de la semaine suivante. Qu'allait-il se passer entre-temps ? Le ventre d'`arxiv` allait-il « recracher » le texte comme prévu ?

• **Samedi 15 novembre : vol Air France 0352 Paris-Toronto.** Le samedi 15 novembre, Simone Diverio et Joël Merker se retrouvent dans le Vol Air France 0352 qui les conduit de Paris à Toronto. Inquiétude : l'introduction, trop minimaliste, rédigée dans la précipitation par manque de temps, sera lue telle quelle le lundi. Seuls de longs calculs d'élimination apparaissent dans cette première version longue (57 pages) et préliminaire de l'article, l'aspect qui s'en dégage est plutôt « technique », aucun rappel géométrique n'y est effectué, et de surcroît, la version qui dort dans un lit bouillant d'électrons ce week-end va jaillir lundi, alors qu'elle admet comme prérequis trois articles, un de chaque auteur, et ce, sans aucun rappel. Ce n'est qu'une semaine plus tard que nous aurons la confirmation qu'il fallait annoncer la démonstration complète *au moment même de la conférence*, avant même d'avoir le temps de polir l'ouvrage, avant même de peaufiner une

version impeccable qui pourrait être soumise à un grand journal de mathématiques.

• **Dimanche 16 novembre : la peur au ventre.** À Toronto le dimanche, une fébrilité psychologique s'empare de chacun de trois auteurs. Erwan Rousseau, invité deux mois au *Fields Institute*, était déjà présent au Canada depuis trois semaines. Par courrier électronique, il avait déjà informé Simone Diverio et Joël Merker que le titre de l'intervention de Yum-Tong Siu n'était autre que :

Hyperbolicity of generic hypersurfaces of high degree,

c'est-à-dire : Siu parlera exactement du même sujet, et nous serons donc explicitement en compétition avec le grand génie !

Tous les spécialistes savent que Siu annonce une démonstration des conjectures de Green-Griffiths et de Kobayashi pour les hypersurfaces (sans borne effective toutefois) depuis bientôt plus de cinq années, et qu'en 2004, il a publié six pages (seulement !) afin de décrire une stratégie de preuve, mais ces pages sont denses, résumées et elliptiques. En fait, dans ce « message » volontairement tronqué, Siu fait référence à un gros manuscrit de 80 pages sur lequel il prend appui, mais qu'il n'a jamais fait circuler. Qu'adviendrait-il de nous si jamais son manuscrit secret renfermait de bien meilleurs résultats que ceux que nous annonçons, et si jamais — ô comble de l'inquiétude ! — ce preprint gardé sous le manteau devait paraître lui aussi lundi sur `arxiv.org` ?

L'anxiété croît, un risque a été pris, l'enjeu mathématique est de taille.

Après un déjeuner rapide des trois auteurs stressés, la ville encombrée d'une manifestation sportive et musicale semble vouloir bloquer leur retour à l'hôtel. Rigolades coincées dans la foule-obstacle, mais il faut revenir au plus vite à l'hôtel, il faut réécrire à trois, ensemble, directement sur l'ordinateur portable une meilleure introduction minimaliste, et il faut renvoyer au plus vite la nouvelle version sur `arxiv.org`, avant la nuit, avant lundi.

Mais après quatre heures et demi de travail et de batailles stylistiques, quelle déception ! En consultant plus à fond le site `arxiv.org`, nous apprenons que la version du vendredi pourrait fort bien être distribuée telle quelle le lundi, avant que le site `arxiv.org` ne la remplace officiellement mardi par la nouvelle version qui comporte l'introduction que nous venons d'amender avec force éclats de rire, en jouant avec les mots comme des enfants.

• **Lundi 17 novembre : grand soulagement !** Mais lundi heureusement, dans la fébrilité accentuée par la prise de risque, l'oracle `arxiv.org` fait

déjà apparaître notre version 2 sur la page de téléchargement. *Alea jacta est*, c'est le grand saut !

Avant le début de la première intervention orale, Nessim Sibony félicite brièvement Erwan Rousseau. Au déjeuner, Gerd Dethloff nous conseille d'aller parler quelques minutes avec Siu avant son exposé. Siu est déjà au courant, mais il n'a aucun temps à nous consacrer avant son exposé. La pression est contagieuse, et chacun remobilise ses forces dans son propre camp.

Et à la fin d'après-midi, pendant son exposé d'une heure que nous craignons tant, Siu consacre trente minutes à décrire des idées remontant à Bloch et à Clemens. D'après lui, ce sont les deux seules idées qui aient jamais existé dans le sujet, et il les utilise dans sa « démonstration » annoncée des conjectures de Green-Griffiths et de Kobayashi. Dans la deuxième moitié de son exposé, il poursuit ensuite sur l'hyperbolicité générique des espaces de modules.

Grand soulagement ! De l'avis de tous les auditeurs spécialistes de la question, l'exposé de Siu n'a montré aucune nouveauté par rapport à ses interventions des années 2002 à 2004 ; qui plus est, Siu semble ne plus être véritablement intéressé par le sujet en ce moment, il se consacre surtout à la mise en place d'un algorithme de Kohn effectif, en relation avec sa grande idée des idéaux multiplicateurs en géométrie algébrique, dont les principes métaphysiques remontent à Kohn et à Skoda, que Siu admite indéfectiblement.

Victoire : notre résultat tient donc debout ! c'est le premier résultat effectif annoncé avec une démonstration complète et vérifiable. Nos techniques « marient » d'ailleurs les travaux fins de Demailly avec les idées initiales de Siu, dont on sait qu'ils sont deux concurrents prestigieux en géométrie algébrique complexe, mais nous surmontons aussi de très nombreux obstacles combinatoires et calculatoires pour atteindre l'effectivité.

• **Mardi 18 novembre : joie mathématique absolue.** En appliquant l'idée de Clemens considérablement généralisée, la dernière partie de notre démonstration repose sur l'existence de champs de vecteurs méromorphes à pôle d'ordre contrôlé sur l'espace des jets verticaux d'ordre n sur l'hypersurface universelle. En dimension n arbitraire, Joël Merker (arxiv.org/abs/0805.3987/) avait obtenu en juin 2008 une construction explicite de tels champs de vecteurs et avait déduit un ordre effectif des pôles égal à $\frac{n^2+5n}{2}$, généralisant des résultats de Clemens, Voisin, Paŭn et Rousseau, alors que dans les six pages que Siu a publiées en 2004, une proposition non effective est énoncée, sans aucune indication de preuve.

Toutefois, l'engendrement par des champs de vecteurs méromorphes globaux n'est valable qu'en dehors d'un mauvais sous-ensemble algébrique Σ de l'espace des jets. À cause de ce Σ intempestif, on ne peut malheureusement pas espérer obtenir la dégénérescence algébrique *forte* des courbes holomorphes entières $f\colon \mathbb{C} \to X$, *i.e.* $f(\mathbb{C}) \subset Y \subsetneqq X$ avec Y indépendant de f, parce que la condition $j^n f \subset \Sigma$ dont on doit tenir compte à la fin des raisonnements (clarifiés par Paŭn et par Rousseau) implique que l'image $f(\mathbb{C})$ est contenue dans une section hyperplane de X, l'hyperplan en question dépendant en général de f.

La version de notre travail sur `arxiv.org` n'annonce d'ailleurs que la dégérescence algébrique *faible* de $f(\mathbb{C})$, *i.e.* ce qu'on appelle la conjecture de Green-Griffiths *faible* : Y dépend *a priori* de f. Et jusqu'à présent, dans les travaux de Paŭn (2005) et de Rousseau (2007), Σ dépendait de f. Et que diable trouve-t-on dans les 80 pages secrètes de Siu ? Qu'arrive-t-il vraiment à faire, lui ?

La veille au restaurant le soir, Simone Diverio avait fait observer que pour le Σ des travaux cités, la condition $j^n f(\mathbb{C}) \subset \Sigma$ implique en fait que l'image $f(\mathbb{C})$ est contenue dans une section de X de codimension égale à deux. Chance : le résultat d'Erwan Rousseau 2007 en dimension $n = 3$ se renforçait d'un seul coup.

Mardi 18 novembre à 08h45, Joël Merker annonce à Simone Diverio et à Erwan Rousseau qu'après avoir réfléchi dix minutes la veille au soir, il peut prétendre démontrer que la condition $j^n f(\mathbb{C}) \subset \Sigma$ implique en fait que l'image $f(\mathbb{C})$ est contenue dans une droite, ce qui donnera alors Green-Griffiths « *fort* ».

Mais à 10h, après avoir assisté à l'exposé de Steve Zelditch, très lourde déception : ce que dit Joël Merker est trivialement faux. Simone Diverio, Joël Merker et Erwan Rousseau ont chacun réfléchi pendant l'exposé et ils s'en sont tous trois rendus compte.

L'erreur de Joël est vraiment stupide : l'ensemble Σ en question est défini comme lieu des zéros de tous les mineurs de taille $n \times n$ d'une matrice de taille $n \times (n+1)$, et ce lieu n'est que de codimension égale à 2. Cette observation s'identifie d'ailleurs à ce que disait déjà Simone Diverio. Joël a revérifié cela en dimension $n = 3$ par un calcul négligé effectué à la sauvette en diagonale sur un bout de papier, il a trouvé que Σ est de dimension 1, et il a extrapolé qu'il devait en être de même en toute dimension $n \geqslant 3$. Même les plus puissantes machines à calcul formel peuvent se tromper !

Mais entretemps, pendant cette même heure d'écoute buissonnière, Joël Merker avait immédiatement corrigé le tir — tel est l'avantage d'être rompu aux dialectiques de la recherche, ce dont les *vraies* machines sont

par nature incapables, parce qu'elles sont *inertes* et n'ont donc pas le pouvoir de *décision* propre au règne animal.

En examinant la construction des champs de vecteurs méromorphes, on voit en effet sans peine qu'il est possible de satisfaire à la condition d'engendrement en dehors d'un sous-ensemble Σ plus petit, défini par des équations qui comprennent en particulier les n équations suivantes :

$$0 = \begin{vmatrix} f_i' & (f_i^2)' & (f_i^3)' & \cdots & (f_i^n)' \\ f_i'' & (f_i^2)'' & (f_i^3)'' & \cdots & (f_i^n)'' \\ f_i''' & (f_i^2)''' & (f_i^3)''' & \cdots & (f_i^n)''' \\ \cdot\cdot & \cdot\cdot & \cdot\cdot & \cdots & \cdot\cdot \\ f_i^{(n)} & (f_i^2)^{(n)} & (f_i^3)^{(n)} & \cdots & (f_i^n)^{(n)} \end{vmatrix} = 1!\,2!\,3!\,\cdots\,n!\,\big(f_i'\big)^{\frac{n(n+1)}{2}}$$

$$(i = 1 \cdots n),$$

et alors si $j^n f \subset \Sigma$, on en déduit immédiatement que $f_i' = 0$ pour tout $i = 1, \ldots, n$, d'où f est constante ! Il n'est même plus nécessaire de parler de section hyperplane !

Par cette seule observation effectuée presque sans effort, d'un seul coup, le théorème paru sur `arxiv.org` la veille se transformait alors en une réponse à la conjecture de Green-Griffiths *forte* pour les hypersurfaces !

Quelques heures après, la nouvelle semble déjà circuler dans les couloirs. Gerd Dethloff nous conseille alors d'actualiser rapidement la version sur `arxiv.org`, mais nous décidons ensemble de ne pas le faire, afin que le suspens soit maintenu dans les paroles échangées entre spécialistes. En conférence ou en séminaire dans les mois précédents, les géomètres algébristes complexes s'étaient d'ailleurs délectés à nous demander à la fin de nos exposés si la dégénérescence algébrique dépendait de la courbe entière. Maintenant, la prochaine fois que la question sera posée, nous pourrons annoncer :

« On a Green-Griffiths fort en dimension quelconque ! ».

• **Discussions avec Siu : reigne sans partage de la métaphysique spéculative.** Dans les jours qui suivent, Joël Merker parvient à échanger plusieurs fois oralement avec Siu, qui avait clairement manifesté le désir d'une rencontre. Message : « *The Riemann-Roch theorem is just linear algebra* », mais que faut-il entendre ? On croirait une parole de Gromov : provocatrice, déstabilisante, profonde peut-être, mystérieuse en tout cas, mais quand on entrevoit enfin, après des heures ou des jours de réflexion, ce qu'elle pourrait bien vouloir dire, on est ébloui par un tel recul et par une telle puissance philosophique.

A priori donc, l'approche de Siu qui consiste à construire des différentielles de jets explicitement dans un système de coordonnées affines sur

$\P^{n+1}(\mathbb{C})$ n'est pas « juste de l'algèbre linéaire », elle s'annonce comme « *better than Demailly's approach* ». Il ne suffit pas, en effet, d'étudier les caractéristiques d'Euler-Poincaré *via* la formule de Riemann-Roch-Hirzebruch, et d'étudier les dimensions des groupes de cohomologie intermédiaires des fibrés de Schur sur les variétés projectives, car toutes ces données ne fournissent à terme *que* des estimations dimensionnelles. « *Cramer's rule provides explicit jet differentials* », voilà toute la différence entre un Riemann-Roch purement dimensionnel et la géométrie algébrique *effective* qui doit chercher à produire des représentants explicites des classes de cohomologie dans un système de cartes couvrantes.

J'entrevois enfin la confirmation de ce que je soupçonnais depuis des mois : *en évitant volontairement les calculs, la géométrie algébrique s'égare parfois dans l'in-effectivité*. Au vingt-et-unième siècle, les mathématiques effectives du dix-neuvième siècle ne cesseront jamais de ressusciter !

Tombé enfant dans la géométrie algébrique comme Obélix dans une marmite de potion magique, Siu sait tout cela, et c'est pour lui du B.A.-BA. Je revois dans un film mental instantané toutes les pyramides de calculs systématiques de Sophus Lie, et je comprends en un éclair qu'un vaste champ de géométrie algébrique combinatoire et calculatoire est « caché » derrière les conjectures de Green-Griffiths et de Kobayashi. Si seulement Siu pouvait en dire plus ! J'aurais enfin l'impression de comprendre ce qu'est un groupe de cohomologie. Saisir les objets en coordonnées, entrevoir leurs ramifications algébriques, laisser la générativité symbolique se déployer, voilà le vrai bon point de vue !

Mais pourquoi Siu ne nous donne-t-il pas une copie de son preprint de 80 pages ? On les finirait, tous ces calculs qu'il ne parvient pas à finaliser ! Voilà que Siu s'attable, une tasse de thé à la main, m'adresse la parole, et ouvre son épais classeur bleu. Voilà que devant mes yeux ébahis, il feuillette rapidement ses 80 pages. Je vois aussi d'autres preprints tout aussi secrets dans ce classeur bleu et magnétique. Je les a vues, ces 80 pages, et Mihai Paŭn en avait déjà témoigné, mais nul n'a eu encore le droit de les étudier. Et Siu d'ajouter qu'il postera son texte sur `arxiv.org` dans quelques jours. Il dit toujours cela, dit-on.

Notre approche qui utilise pour l'instant la tour de Demailly et se base donc sur un calcul de Riemann-Roch qui n'est effectif qu'à l'égard des dimensions, est donc *a priori* moins puissante que celle de Siu.

Oui, Siu défend l'effectivité. Oui, Siu plus que de nombreux géomètres algébristes « abstraits » est conscient que la réalité mathématique regorge de problèmes algébriques très difficiles. Oui, Siu est une merveilleuse

« machine de guerre », aurait dit Gilles Châtelet, un « monstre sacré vivant des mathématiques ».

C'est presque une révélation — cette rencontre fut une révélation, et de jour en jour, le contact avec Siu s'affirmait. Il devenait de plus en plus clair que Siu estime la puissance de calcul, contrairement aux mathématiciens structuralistes qui ont trahi le génie d'Euler, trahi le génie de Gauss, trahi le génie de Sophus Lie, trahi le génie d'Élie Cartan. Et surtout, la joie s'affirmait en moi de se voir élu membre peut-être d'une *aristocratie mathématique spéculative trans-historique*.

• **Qui n'expose pas ne s'expose pas et se repose.** Comment se faisait-il alors qu'aucun de nous trois n'exposât dans cette conférence ? Bien plus qu'une revanche indirecte face à cette « injustice », l'annonce de lundi sur *arxiv.org* prenait de jour en jour de l'ampleur dans les bruits de couloir. Steven Lu aurait dit en privé à Gerd Dethloff que le résultat était trop beau pour être vrai, qu'il devait certainement être faux. Une erreur serait salvatrice pour tous ceux qui ont essayé de démontrer la conjecture de Green-Griffiths ! Michael McQuillan nous conseille de soumettre le résultat aux Publications Mathématiques de l'IHES. D'autres participants évoquent Annals of Mathematics, Inventiones Mathematicae, mais aucune autre revue qui ne serait pas d'un niveau comparable.

• **Vendredi 21 novembre : refusons de nous présenter à l'oral de rattrapage.** La conférence se terminait vendredi à 12h40. Au milieu de l'après-midi du même jour, Joël Merker discute à l'improviste du résultat en privé avec John Bland, ouvre deux prépublications, évoque le cône nef, la tour de Demailly, la « stratégie des colonnes de Buren », le choix des poids, l'ordre lexicographique inverse, les déterminants de Jacobi-Trudy, les descentes inductives, l'estimation finale, *etc.*

Deux heures plus tard, vers 18h, John Bland (un des organisateurs en poste à Toronto, spécialiste célèbre des équations aux dérivées partielles et de la géométrie CR) propose à Joël Merker de parler le lundi 24 novembre au séminaire du Fields Institute. Inconsidérément, Joël accepte.

Contrariété légitime de Erwan Rousseau, inquiétude sur le délai, retour de Simone à l'Institut, discussion à trois, paroxysme de nervosité, puis après vifs débats et arguties, vers 20h, nous décidons tous trois d'envoyer raisonnablement un courriel à John Bland pour décliner l'offre de se produire oralement. Trop peu de temps pour préparer l'exposé, trop de fatigue, et au fond de nous-mêmes : « si les organisateurs avaient vraiment voulu nous écouter parler, l'un de nous trois au moins aurait dû être invité à la conférence qui vient de s'achever ».

Le samedi matin par courriel, John Bland, Min Ru et Steven Lu tentent à nouveau leur chance : « *but it could very well be an informal talk* ! ». Et le lundi matin, les mêmes réitèrent leurs demandes appuyées.

• **Conclusion.** Ca y est : sans même avoir parlé à la conférence, nous sommes déjà vraiment célèbres. Finalement, Erwan Rousseau sera appelé à parler pendant deux heures sur le sujet le lundi 1 er décembre, devant un large public attiré par la rumeur. Auditoire impressionné, forcément, mais Siu était absent, comme si Vercingétorix avait pressenti Alésia.

• **Épilogue.** Au fait, à quelle vitesse s'est donc écrite la version Latex envoyée sur `arxiv.org` le vendredi 14 décembre vers 16h00 ? Six pages ébauchées seulement existaient le 4 décembre, jour d'exposé à Paris 6 sur les invariants de Demailly. Au total, bien qu'aucun manuscrit achevé à l'avance ne secondât l'écriture sur ordinateur et bien qu'il s'avérât nécessaire de finaliser la rédaction en retravaillant régulièrement les détails des preuves au stylo sur des pages blanches, les 57 pages ont été écrites et finalisées en 9 jours, à un rythme de moins de 8 heures par jour de travail en moyenne, *le style témoignant d'une rigueur implacable quant à la lisibilité des calculs*.

Comment écrire plus de 50 pages rhétoriquement tenues en seulement 10 jours ? Secret de fabrication — on y reviendra dans d'autres billets. Disons seulement que les grands et longs calculs doivent être conduits dans l'ivresse et à une vitesse « supersonique ».

• **Manuscrits sélectionnés.** Pour l'instant, sur la page internet :

`www.dma.ens.fr/~merker/Manuscrits/`

le lecteur curieux trouvera les photographies de 11 pages manuscrites parmi les plus cruciales qui ont accompagné les jours ultimes de la rédaction des calculs d'élimination.

• **L'« opérateur $\mathcal{R}^+$ de Joël ».** C'est très simple : c'est l'opérateur qui remplace tous les signes « plus » par des signes « moins ». Tous les enfants vont adorer !

• **Unité des mathématiques.** Cet opérateur sert à *faire faire* de l'Analyse à un problème de Géométrie qui se ramène à de l'Algèbre incontrôlable.

• **Dans la démonstration.** Accessoirement aussi, il est utilisé dans la preuve de notre théorème sus-mentionné.

Lettre à un jeune mathématicien qui débute et qui doute

Paris, le 3 février 2008

Cher Nicolas Bovetto,

Tout d'abord, c'est avec un très grand plaisir que j'ai reçu votre lettre manuscrite, écrite à l'encre bleue, d'une écriture très régulière et agréable à lire, ce qui change des éternels courriers électroniques et documents typographiés qui ont envahi nos correspondances scientifiques. Les deux courtes périodes où nous avons interagi me laissent d'excellents souvenirs, et je regrette fort qu'elles aient été aussi courtes.

Moi-même, je devrais m'excuser de vous répondre sans faire appel à toute la puissance esthétique du geste, trop habitué maintenant que je suis à plonger mes phalanges excitées dans le fluide électronique délicieusement figé que distille LaTeX, ce logiciel universel qui s'est insinué, en deux ou trois décennies, dans la vie intellectuelle et sensitive des mathématiciens. Toutefois, la puissance de feu des stylos reste indépassable (utiliser des couleurs !) ; et après une longue période d'hésitation, de doute, de dégoût, et de laisser-aller en recherche, j'ai solennellement décidé, prenant exemple sur un mathématicien américain distingué dont je contemplais avec admiration l'acuité et la perspicacité, j'ai décidé de prendre des notes manuscrites zélées à tout exposé et à toute conférence, afin d'exploiter pleinement cette puissance d'action extraordinaire qu'ont nos mains après vingt années merveilleuses de formation scolaire. Plutôt périr que de se priver inconsciemment des plaisirs du mouvement ! dussent-ils exiger discipline et abnégation. Prendre scrupuleusement des notes, c'est une manière de transcender toute la douleur que ressent notre cerveau à recevoir ces feux d'artifices de mathématiques incompréhensibles. Et depuis près d'un an et demi que j'habite à Paris, je contemple parfois avec une petite et légère satisfaction la pile de maintenant près de quinze centimètres (bien loin toutefois des hauteurs fantastiques qu'on peut accumuler en une année de scolarité au lycée) de notes diverses, inégales, et quasi-incompréhensibles de séminaire et de conférences que je relirai éventuellement un jour, lorsque j'en aurai besoin pour rédiger un rapport.

Assister à une heure d'exposé, cela produit jusqu'à huit pages de notes manuscrites colorées et pétillantes, fraîches d'une imprégnation magique et très imparfaite à la fois, surtout quand l'exposé a fait défiler une quarantaine de transparents ! Mais à l'opposé, taper une page de mathématiques

déjà bien comprises sous LaTeX, cela peut prendre une journée tout entière ! Et puis les jours qui suivent, afin peut-être d'atteindre l'hypothétique Grand Style dont nous rêvons indéfiniment, toutes les pages encore tièdes sont relues impitoyablement avec le regard fluidifiant du Grand Modificateur, en remobilisant toujours violemment le Grand Tribunal du Surmoi de la Pensée qui seul sait tester et peser et les phrases en se dédoublant jusqu'à chaque virgule d'anticipation.

Telle est la vie de la recherche : piles de papier, renouvellement perpétuel, disparitions, inquiétudes, insatisfactions, aventures silencieuses et solitaires, livres illisibles, sentiments de ne pas « en être », retours harassés sur le ring, nouveaux chocs, *etc.*

Avant de tenter d'en venir au fond de votre lettre, je vais me permettre de préciser quelques points de ma précédente lettre, qui semble-t-il, vous auraient paru très affirmatifs.

« Aller au-delà de l'épuisement physique ou intellectuel afin de basculer au-delà de l'effort », qu'est que cela veut dire ? C'est une idée intuitive très optimiste, je le reconnais, née vaguement d'une petite expérience, principalement sportive, dans l'endurance extrême, où quelque chose se passe qu'on peut appeler basculement « au-delà de l'effort », mais dans des circonstances singulières où les forces se rétrécissent considérablement dans la durée, et où on a l'impression, en baissant exponentiellement de régime, de jouer à saute-mouton par-dessus des ressauts d'obstacle de l'exponentielle décroissante de notre puissance physique. Bien sûr, le mur arrache les ongles, casse les membres, s'oppose, et ensuite nous terrasse ; comme vous l'écrivez, la passion peut pousser la machine au-delà de ses limites pendant un certain temps, mais le prix à payer ensuite est souvent élevé. Un ami à moi qui fut sixième meilleur temps français sur 1500 m il y a une trentaine d'années décrit le corps comme une pile. S'élèver très haut exige ensuite certes de très longs temps de repos. En recherche, corps et cerveaux sont des piles. Trois heures intenses de réflexion épuisent. La journée s'y consume, elle s'y perd, la journée est *perdue* peut-être, et le Grand Surmoi Dévastateur profite alors de notre affaiblissement et de notre piètre déception pour nous achever psychologiquement. L'après-midi commence, mais la journée, cette journée, encore une journée, et d'autres journées encore, seront, on le croit, bien vaines.

Et pourtant, la recherche se nourrit de ces pertes de temps. C'est à la recherche du Temps Perdu que le narrateur, chez Proust, consacre sa merveilleuse activité romanesque, ce temps perdu, fort en émotions, en méditations, en actions, *capital* de nostalgie ultérieure, et aussi, c'est le plus important, de *création*.

Hélas, nul n'explique aux plus jeunes qui entrent dans la danse chaotique de la recherche, un peu après l'âge de vingt ans et après une scolarité brillante, que la régularité des rythmes qui garantit un équilibre psychologique crucial ne s'acquiert que presque par hasard, à force d'auto-discipline raisonnée, laquelle exige notamment une *discipline calculée du repos du cerveau* (j'y reviendrai dans un instant, et je reparlerai de l'au-delà du mur qui est aussi un rêve). Travaillons notre repos afin d'être au top pendant les courtes heures de réflexion intense. Reposons-nous dans les tâches matérielles, reposons-nous dans la rédaction de choses déjà connues, reposons-nous en reposant nos questions mathématiques, posons-les sur la table, laissons-les reposer dans notre tête, laissons-les pourrir toutes seules, rusons par raison en attendant qu'elles se résolvent plus ou moins toutes seules. Mais accumulons et développons le matériel provisoire et les dizaines de micro-questions techniques qui se dévisseront un jour. Il nous faut monter consciemment dans un temps inventé de méditation qui sera une durée mystérieuse et imprévisible d'endurance intellectuelle non délimitée. Voilà ce que je tentais d'exprimer par l'idée de basculement : parfois, la ruse, c'est de relâcher l'effort qui tétanise en conservant par derrière une sorte d'obsession tranquille imprégnée de la tension calculée d'« y » revenir après un grand repos réparateur pendant lequel des molécules de l'inconscient dans notre cervelle nous ordonneront de voir les choses différemment. *Basculer au-delà de l'effort, c'est justement espérer des imprévus libérateurs*. Tous les chercheurs le disent : ça bascule parfois à l'improviste, quand on a relâché l'effort.

Je vous transmets une copie d'un texte de Michèle Vergne (académicienne en mathématiques), remarquable dans sa simplicité, qui décrit de nombreuses situations de découverte imprévue après de longues périodes de souffrance et de vain acharnement. Je vous invite à bien lire et relire ce texte, je suis sûr qu'il sera utile à vos méditations et pourra vous rasséréner en montrant que les inquiétudes s'expriment d'une manière universelle. Chacun trouve alors avantage à se les exprimer intérieurement en cherchant à les contrôler pour progresser tout le temps.

Voilà aussi une chose extraordinairement difficile à atteindre : la conscience d'avancer chaque jour d'un vrai « epsilon » ; la capacité de répartir ses activités de la semaine entre audition d'exposés, enseignement, recherche au

front, recherche d'écriture, rédaction facile, relecture, lecture au front, lecture facile, méditation, rêverie, attente de la solution, ou approfondissement des mystères. Malheureusement, âgé de trente-huit ans ce 5 février, je me sens incapable de vous dire vraiment comment j'ai su atteindre un petit et léger équilibre avec la recherche, surtout eu égard à l'immense inquiétude permanente qui m'habite (et qui vous habite) et dont on ne se sort que de manière transitoire, parce que dès que le travail au front recommence (la vraie recherche, la vraie écriture, la vraie pensée, les vraies questions), on se réengouffre dans le gouffre, on revisite les abysses de ses incapacités et de ses impuissances, on se refait souffrir en se traitant d'incapable, on se repense comme ne méritant jamais d'être là où on est, comme devant seulement être exclu ou jugé. Faire des mathématiques, cela impose une *humiliation permanente*, ce que beaucoup d'entre nous transcendent en s'imposant une auto-flagellation au front. Surtout qu'à notre époque d'explosion incontrôlée, quels sont les repères ? Quelques rares écoles ou structures permettent aux jeunes qui entrent dans ce monde (merveilleux et effrayant à la fois) de prendre un peu leurs bases ; mais la plupart des accès à la recherche imposent une espèce de déracinement perpétuel, un repérage spatio-temporel éclaté. Et en vérité, la recherche est internationale, transhistorique, intergalactique ou presque, dirais-je, en pensant aux chers extra-terrestres inconnus dont les mathématiques sont supérieures aux nôtres, mais qui s'éloignent toujours plus de nous à cause de l'expansion de l'Univers et que nous ne pourrons certainement jamais rencontrer à cause de cela, mais en tout cas, si l'on reste sur Terre, nos amis les plus proches sur un sujet donné vivent peut-être au Japon, en Allemagne ou en Australie, à des époques passées ou futures, et très souvent, nous ne le savons pas encore, et cela fait partie du Grand Éclatement dans lequel nous sommes pris, si déroutant par rapport aux repères familiaux, territoriaux et sociaux dans lesquels nous baignons encore et qui semblent apporter tant d'assise et d'équilibre à ceux qui s'installent dans la vie avec un métier où le but n'est pas de se poser des questions.

Autre élément crucial, très crucial : toutes les questions que vous soulevez sont essentielles. Il ne faut pas les taire. Jamais non plus on ne doit dire qu'on ne peut pas leur apporter de réponses, comme si on se plaçait du point de vue d'un adulte responsable qui explique les choses de la vie à un adolescent avec tout le confort d'une situation sociale et professionnelle stabilisée, ce qui ne montrerait qu'un piètre refus de se confronter à ce type de questions troublant l'aisance d'une vie bien confortable. Au contraire, une chose est certaine : ce qui fait la grandeur intellectuelle d'un penseur, c'est de pouvoir maintenir ouvertes les questions qui font mal, tant sur le plan

de la trajectoire personnelle que pour ce qui concerne les plus grand mystères, parce qu'il y a un *très grand danger* à déraciner un arbre naissant, à trancher un nœud gordien de questions, à choisir une solution de repli, *à vouloir répondre et s'orienter trop rapidement*. Or vous avez une très grande qualité que je vous ai tout de suite reconnue : accepter de se bagarrer avec des questions métaphysiques difficiles. Conservez cette puissance d'interrogation, sans en déduire que les choses se passent mal pour vous si rien ne vient pour l'instant à l'horizon. Le temps viendra. J'ai attendu trente-deux ans avant de parvenir à comprendre que je ne savais vraiment pas écrire. Balzac a « écrivaillé » près de dix ans pour le compte d'autres auteurs, avant de « basculer » vers le génie (c'est cela, aussi, le basculement dont on rêve). Flaubert qui écrivait huit heures par jour pour un quart de page au final en moyenne (dix-huit pages manuscrites pour une page publiée de Madame Bovary !) se lamentait dans *Novembre* de n'avoir pas su, dès son adolescence, se rendre compte que le métier d'écrivain exigeait une mise en souffrance perpétuelle de la phrase et un calcul absolu de la pensée. Toutes les questions et toutes les souffrances muent un jour, *et la très grande vérité, c'est que l'action se relance en permanence à travers questions et souffrances et que* ceux qui ne se rabattent pas sur une solution de repli s'ouvrent des virtualités supérieures.

Revenons maintenant au sport. Toujours participer à des compétitions, cela implique de se lever tôt le dimanche, de s'entraîner, de se confronter, d'accepter de baisser de niveau avec l'âge. Avec ma voix d'entraîneur et mon Surmoi excessif, je disais dans ma précédente lettre : « Ne jamais abandonner, surmonter toutes les épreuves psychologiques [...], faire preuve de souplesse, avoir confiance en l'avenir ». Mais je vais le redire avec un peu plus de métaphysique aujourd'hui : le jeu du temps est immense, la vie est très longue, donc il faut essayer ce qui est difficile, et si cela ne marche pas du premier coup, on recommence, on se relève, on attend patiemment que la gelée prenne, on se dit en baissant la tête que des petits détails s'amélioreront d'une année sur l'autre, parce que le temps encore à vivre est extraordinairement long et généreux.

Ce qui est merveilleux avec les questions difficiles, c'est qu'elles vivent en nous, se métamporphosent et mûrissent, sans pour autant toujours se résoudre. Beaucoup de chercheurs ont péri avant que leur conjecture favorite ne soit résolue ; pensons à la quadrature du cercle ! Deux mille ans d'histoire ! Et au moment où Lindemann en 1882 assèna le coup de grâce : « π est transcendant », la quadrature n'était plus un problème qui assassine.

“Pourquoi faire des mathématiques ? et plus précisément, de la recherche en mathématiques ? Pour qui ? Pour quoi ?” demandez-vous. Questions fortes, puissantes, mystérieuses et que l’on maintient en général dans l’ombre des silences intersubjectifs. Relevons ces questions. Remontons au-dessus d’elles. Tentons de les dominer en les complexifiant. Formulons des questions qui se trouvent en amont. C’est cela, la métaphysique : accepter les mystères et percevoir leur entrelacement. Et ici, en l’occurence, le mystère, c’est que l’homme naît dans un monde où « il y a quelque chose plutôt que rien ». Pourquoi existe-t-il quelque chose plutôt que rien, demandait Leibniz ? On en a des haut-le-cœur. Vous arrivez dans un monde où les actions humaines disponibles sont d’une variété extraordinaire. Parmi elles, il y a les mathématiques. Qui peut expliquer pourquoi il y a les mathématiques ? Personne — soyons humble. Dieu seul serait à la mesure de ces questions. On n’en veut plus, de Dieu. On en reste donc à notre modeste niveau de pensée, et certains rejettent les questions trop métaphysiques. En tout cas, notre période historique s’adonne à l’ivresse de l’action et de la technique. Pour *quoi* participer à cette ivresse ? Pour *quoi* se diriger vers les mathématiques ? J’essaie de dire qu’en fait nous ne sommes pas à la mesure de dire comment il se fait que nous débarquons dans un monde aussi riche et qui nous propose autant de virtualités, que ce soit le monde de la société occidentale, ou le monde abstrait et austère des mathématiques. En tout cas, j’ai une morale modeste et simple vis-à-vis de ces grandes questions : elle consiste à dire que notre corps et notre cerveau sont des machines extraordinairement précieuses, et qu’il faut s’en servir avec élégance, raffinement et honnêteté. De très nombreux “seniors” sont tellement conscients et persuadés que le fait de participer au jeu du monde est la chose la plus importante et précieuse, quelle que soit l’activité dont il s’agit, qu’ils veulent absolument continuer à vivre dans le monde. On accorde trop de place au médiatique, au spectacle, à la compétition, dans nos sociétés, par rapport à la vérité métaphysique de ce que c’est vraiment d’exister et d’agir pour chacun d’entre nous.

Vous ajoutez : « il est peut-être déjà un peu tard pour se poser ce genre de questions même s’il semble très humain de ne s’interroger que face à l’échec ou de ne donner de l’importance aux choses que lorsqu’elles nous concernent . . .. Je n’ai pas de réponses à ces questions, je ne sais pas si elles sont devant, si ce sont elles les véritables récompenses, et si je les aurai jamais . . . »

En mathématiques, vous êtes très, très jeune : vous avez à peine deux ou trois ans. Les gratifications viennent après l’âge de raison, après sept ou dix ans, c’est-à-dire après la thèse de toute façon. Il faut comprendre que le système scolaire merveilleusement structuré offre ses plus brillants élèves

au vide de la complexité du monde après une assez longue période (les plus mauvais élèves sont attirés beaucoup plus vite dans la vie professionnelle). Et la recherche, c'est l'indéfini illimité. Quand vous aviez deux ou trois ans d'âge biologique, vous ne vous êtes certainement pas posé la question de savoir si vous alliez continuer à vivre. Aujourd'hui, vous ne pouvez pas encore vous poser la question si vous voulez arrêter de vivre la recherche, parce que vous commencez à peine, vous n'avez pas encore l'âge !

On vous offre une chance, on vous fait confiance, on attend que ça morde, et on sait que c'est difficile de démarrer, ça mordra un jour, c'est absolument sûr. Moi, ça a mordu pour de vrai à 32 ans, presque six ans après la thèse.

Soyez patient, et surtout, travaillez régulièrement, bien reposé, avec une vie très équilibrée entre les divertissements, les repos et les périodes intenses. La compétition sportive apprend qu'on peut décider de se mobiliser à certaines périodes et de se reposer à d'autres.

Et puis, après la thèse, on peut travailler sur d'autres sujets qu'on préfèrera de beaucoup à celui de la thèse. Les mathématiques sont indéfinies et très accueillantes.

Joël Merker

P.S. : Si vous êtes à Paris, n'hésitez pas à me contacter : 01 43 31 84 57, ou `merker@dma.ens.fr`, quelques jours à l'avance.

P.S. : Votre lettre me laisse croire que vous pourriez m'informer d'autres éléments vous concernant. J'espère que ma réponse, un peu abstraite et générale, ne vous retiendra pas d'en dire plus.