

Application de la théorie effective des invariants à l'hyperbolicité au sens de Kobayashi et à la dégénérescence algébrique au sens de Green-Griffiths

JOËL MERKER

DMA, École Normale Supérieure, Paris

www.dma.ens.fr/~merker/

I. Énoncé des conjectures

II. Jets de Green-Griffiths

III. Jets de Demainly-Semple

IV. Décompositions de Schur

V. Calculs asymptotiques de caractéristiques d'Euler

VI. Polynômes invariants, crochets et bi-invariants

VII. Contre-exemple cruel

VIII. Algorithme général

IX. Algèbres d'invariants explicites : $n = \kappa = 4$; $n = 2, \kappa = 5$

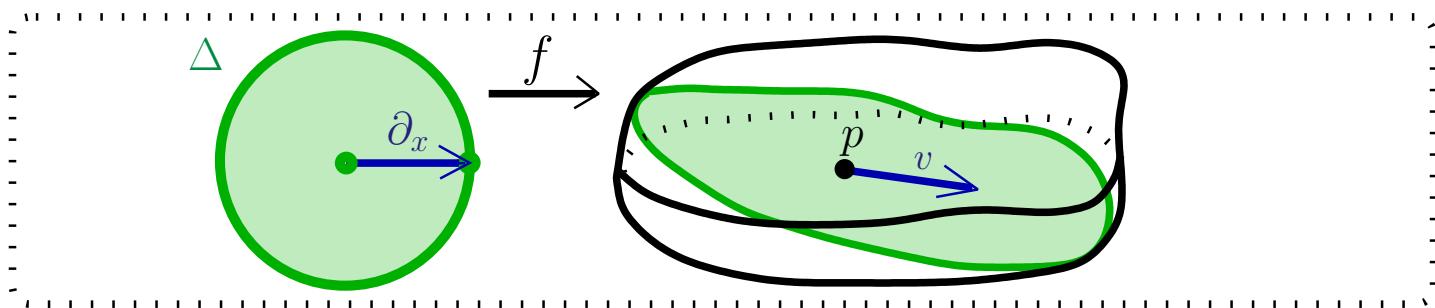
Journée de Géométrie Complexe

Mardi 4 novembre 2008 – Université de Paris 6

I – Énoncé des conjectures

- **Métrique infinitésimale de Kobayashi-Royden :** Soient M une variété complexe, p un point de M . On définit la pseudo-norme $\text{Kob}_p(v)$ d'un vecteur $v \in T_p M$ comme inversement proportionnelle à la « taille infinitésimale » des « plus grands » disques holomorphes passant par (p, v) :

$$\text{Kob}_p(v) := \inf \left\{ \alpha : \exists f : \Delta \rightarrow M, f(0) = p, f_*(\partial_x) = \frac{v}{\alpha} \right\}$$



- La variété M est dite **hyperbolique** (au sens de Kobayashi) si la pseudodistance intégrée :

$$\inf_{\gamma:p \rightarrow q} \int_0^1 \text{Kob}_{\gamma(t)}(\gamma'(t)) dt =: \text{pseudodist}_{\text{Kob}}(p, q)$$

(qui satisfait automatiquement l'inégalité du triangle) place à distance finie toutes les paires de points distincts :

$$\text{pseudodist}_{\text{Kob}}(p, q) > \quad \text{dès que} \quad p \neq q.$$

- **Théorème de Brody (1978) :** Une hypersurface projective algébrique $X^n \subset \mathbb{P}^{n+1}(\mathbb{C})$ est hyperbolique au sens de Kobayashi *si et seulement si* toute courbe holomorphe entière $f : \mathbb{C} \rightarrow X$ est **constante**.

- **Conjecture d'hyperbolicité de Kobayashi (1970) :** Une hypersurface projective lisse $X^n \subset \mathbb{P}^{n+1}(\mathbb{C})$ est hyperbolique si $\deg X \geq 2n + 1$, pourvu qu'elle soit générique.

- **Degré optimal :** $[2n + 1]$.

- **Conjecture de dégénérescence algébrique de Green-Griffiths :** Si l'hypersurface projective algébrique $X^n \subset \mathbb{P}^{n+1}(\mathbb{C})$ est générique de degré $d \geq n + 3$, alors il existe un sous-ensemble algébrique propre $Y \subset X$ tel que toute courbe holomorphe entière non constante $f : \mathbb{C} \rightarrow X$ est nécessairement intégralement contenue dans Y , à savoir : $f(\mathbb{C}) \subset Y$.

- **Degré optimal :** $[n + 3]$, ce qui correspond à demander que X soit **de type général**, à savoir :

$$h^0(X, K_X^{\otimes m}) \sim c \cdot m^n,$$

pour une certaine constante $c > 0$ (K_X fibré canonique).

- **Conditions suffisantes sur le degré d** d'une hypersurface $X^n \subset \mathbb{P}^{n+1}(\mathbb{C})$ afin que toute courbe entière à valeurs dans X soit *algébriquement dégénérée* :

Theorem. (DEMAILLY-EL GOUL 2000) *En dimension $n = 2$ avec $X^2 \subset \mathbb{P}^3(\mathbb{C})$ (très) générique de degré $d \geq 21$.*

Theorem. (PAUN 2008) À nouveau en dimension $n = 2$ avec $X^2 \subset \mathbb{P}^3(\mathbb{C})$ (très) générique de degré $d \geq 18$.

- **Observation :** Dans le cas $n = 2$ des surfaces, le degré optimal attendu vaut : $d \geq 5$, et ainsi les résultats actuels sont encore loin d'atteindre la conjecture de Kobayashi, même en dimension $n = 2$.
- **En dimension $n = 3$:**

Theorem. (ROUSSEAU 2007) Pour la dimension juste supérieure $n = 3$ avec $X^3 \subset \mathbb{P}^4(\mathbb{C})$ générique, on a dégénérescence des courbes entières en degré $d \geq 593$.

- **Observation :** Cette borne inférieure sur le degré est vraiment très loin de $n + 3 = 6$! Comme la suivante :
- **Résultat effectif en dimension quelconque :**

Theorem. (DIVERIO-M.-ROUSSEAU, oct. 2008) En dimension quelconque $n \geq 2$ avec $X^n \subset \mathbb{P}^{n+1}(\mathbb{C})$ générique, on a dégénérescence algébrique de toutes les courbes entières en degré :

$$d \geq n^{(n+1)^{(n+5)}}.$$

Les calculs sur ordinateur « bloquent » pour $n \geq 6$, mais ils donnent de meilleures bornes pour $n \leq 5$.

II – Jets de Green-Griffiths

- **Notations :**

$n = \text{dimension}$

$d = \text{degré}$

κ ou $k = \text{ordre des jets}$

- **Immédiatement :** Différentier par rapport à $\zeta \in \mathbb{C}$ la contrainte initiale $f : \mathbb{C} \rightarrow X$:

$$P(f_0(\zeta), f_1(\zeta), \dots, f_n(\zeta)) = 0$$

où $P(Z_0, Z_1, \dots, Z_{n+1}) = 0$ désigne une équation homogène de $X^n \subset \mathbb{P}^{n+1}(\mathbb{C})$.

κ ou $k = \text{un tel ordre quelconque de dérivation}$

- **Stratégie de preuve (Siu, Demailly) :**

□ **Étape I :** Montrer que le jet d'ordre κ de toute courbe entière $f : \mathbb{C} \rightarrow X^n$ doit satisfaire des **équations algébriques globales**. On travaille principalement avec le fibré $E_\kappa^{GG} T_X^*$ des jets de **jets Green-Griffiths** ou bien avec le fibré $E_\kappa^{DS} T_X^*$ des **jets de Demailly-Semple**.

- **Lemme d'Ahlfors-Schwarz :** Si $A \rightarrow X$ est un fibré ample quelconque et s'il existe des sections non nulles de $E_{\kappa,m}^{\bullet,\bullet} T_X^* \otimes A^{-1}$, alors elles canalisent nécessairement les applications entières non constantes : ce sont elles, les équations différentielles algébriques globales ! **But :**

Construire des sections de $E_{\kappa,m}^{\bullet,\bullet} T_X^* \otimes A^{-1}$

- **Jets de Green-Griffiths en général** : Dans une carte locale centrée en un point $x \in X$, on regarde les disques holomorphes passant par x :

$$f : (\mathbb{D}, 0) \rightarrow (X, x) \simeq (\mathbb{C}^n, 0)$$

qui bien sûr ont n composantes :

$$(f_1(\zeta), f_2(\zeta), \dots, f_n(\zeta)),$$

et au-dessus du point x , on considère les polynômes en les variables de jets $f_i^{(\lambda)}$ du type suivant :

$$\sum_{\substack{\mathbf{m}=a_1+2a_2+\cdots+\kappa a_\kappa}} \text{coeff} \cdot (f')^{a_1} (f'')^{a_2} \cdots (f^{(\kappa)})^{a_\kappa}.$$

qui sont homogènes d'un certain poids \mathbf{m} fixé relativement à la dilatation de jets :

$$\delta \cdot (f'_{i_1}, f''_{i_2}, \dots, f^{(\kappa)}_{i_\kappa}) := (\delta f'_{i_1}, \delta^2 f''_{i_2}, \dots, \delta^\kappa f^{(\kappa)}_{i_\kappa}),$$

d'où pour la mnémotechnique :

\mathbf{m} = **poids** = nombre total (fixé) de « primes »

Lemma. (GREEN-GRIFFITHS 1980) *Ceci s'organise en un fibré vectoriel $E_{k,m}^{GG} T_X^*$ sur $X^n \subset \mathbb{P}^{n+1}(\mathbb{C})$ qui est isomorphe à la somme directe :*

$$\bigoplus_{\ell_1+2\ell_2+\cdots+k\ell_k=\mathbf{m}} \text{Sym}^{\ell_1} T_X^* \otimes \text{Sym}^{\ell_2} T_X^* \otimes \cdots \otimes \text{Sym}^{\ell_k} T_X^*.$$

Theorem. (M., oct. 2008) *Décomposition explicite du fibré de Green-Griffiths $E_{k,m}^{GG} T_X^*$ en somme directe de fibrés de Schur.*

• Caractéristique d'Euler du fibré de Green-Griffiths :

$$\chi(X, \mathsf{E}_{k,m}^{GG} T_X^*) = \frac{m^{(k+1)n-1}}{(k!)^n ((k+1)n-1)! n!} \left((-\mathbf{c}_1)^n (\log k)^n + \right. \\ \left. + O((\log k)^{\mathbf{n}-1}) \right) + O(m^{(k+1)n-2}),$$

où $\mathbf{c}_1 = \mathbf{c}_1(T_X)$ est la première classe de Chern de T_X , et plus généralement, les classes de Chern de T_X s'expriment comme suit en fonction du degré d de X :

$$\begin{cases} \mathbf{c}_1 = -h(d-n-2) \\ \mathbf{c}_2 = h^2(d^2 - \mathbf{C}_{n+2}^1 d + \mathbf{C}_{n+2}^2) \\ \mathbf{c}_3 = -h^3(d^3 - \mathbf{C}_{n+2}^1 d^2 + \mathbf{C}_{n+2}^2 d - \mathbf{C}_{n+2}^3) \\ \dots \\ \mathbf{c}_n = (-1)^n h^n (d^n - \mathbf{C}_{n+2}^1 d^{n-1} + \dots + (-1)^n \mathbf{C}_{n+2}^n). \end{cases}$$

où $h = \mathbf{c}_1(\mathcal{O}_{\mathbb{P}^{n+1}}(1))$ satisfait $h^n = d = \deg X$.

• Observation : La caractéristique d'Euler ci-dessus croît comme :

$$\text{Constante}_{k,m} (-\mathbf{c}_1)^n + \text{reste négligeable} \\ = \text{Constante}_{k,m} d (d-n-2)^n + \dots$$

et donc d'un point de vue asymptotique, pourvu seulement que X soit de type général, *i.e.* pourvu seulement que $d \geq n+3$, cette caractéristique devient positive dès que k et m sont assez grands.

- **Rappel** : Mais surtout, on veut des équations différentielles algébriques, *i.e.* des sections, *i.e.* «du h^0 », et comme par définition on a :

$$\chi = h^0 - h^1 + h^2 - h^3 + h^4 - \cdots + (-1)^n h^n,$$

en écrivant alors la minoration triviale :

$$\begin{aligned} h^0 &= \chi + h^1 - h^2 + h^3 - h^4 + \cdots - (-1)^n h^n \\ &\geq \chi - h^2 - h^4 - \cdots \end{aligned}$$

il suffirait par exemple, pour avoir des sections du fibré de jets, de démontrer la :

- **Conjecture accessible actuellement** : Si $X^n \subset \mathbb{P}^{n+1}(\mathbb{C})$ est de type général, *i.e.* de degré $d \geq n + 3$, alors les dimensions $h_{k,m}^{2i}$ des *cohomologies paires* :

$$H^{2i}(X, \mathsf{E}_{k,m}^{G,G} T_X^*)$$

du fibré de jets croissent (infiniment) **moins vite** que sa caractéristique :

$$\chi_{k,m} \gg h_{k,m}^{2i} \quad \text{pour } k \text{ et } m \text{ grands.}$$

Si cela était démontrablement vrai, on déduirait en effet de notre minoration triviale :

$$h_{k,m}^0 \geq \text{grand } \chi_{k,m} - \text{petit reste} > 0.$$

- **État de l'art** : Eu égard à cette stratégie, les résultats les plus récents, confinés aux petites dimensions, n'atteignent pas le degré optimal $d \geq n + 3$ parce que la **complexité algébrique** explose avec l'ordre k des jets.

III – Jets de Demailly-Semple

- **Conjecture (Demailly 1997) :** De manière similaire, la caractéristique d’Euler du fibré de Demailly-Semple $E_{k,m}^{DS} T_X^*$ (un sous-fibré du fibré de Green-Griffiths redéfini ci-dessous) devrait faire saillir aussi $(-c_1)^n$. Plus précisément, sachant *a priori* que cette caractéristique doit s’exprimer comme polynôme homogène :

$$\chi(X, E_{k,m}^{DS} T_X^*) = \sum_{\lambda_1+2\lambda_2+\dots+k\lambda_k=n} \text{coeff} \cdot (c_1)^{\lambda_1} (c_2)^{\lambda_2} \dots (c_n)^{\lambda_n}$$

de degré n en les classes de Chern dont les coefficients :

$$\text{coeff}_{k,m}^{\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_n}$$

sont rationnels, on s’attend, lorsque $k \rightarrow \infty$, à ce que le coefficient de $(c_1)^n$ ci-dessus domine asymptotiquement tous les autres, à savoir :

$$\lim_{k \rightarrow \infty} \frac{(-1)^n \text{coeff}_{k,m}^{n,0,\dots,0}}{\text{coeff}_{k,m}^{\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_n}} = +\infty.$$

Ainsi, comme pour le fibré de Green-Griffiths, la caractéristique d’Euler du fibré de Demailly-Semple devrait croître vers l’infini avec l’ordre des jets.

- **Conjecture tout aussi inaccessible actuellement :** De même, les dimensions des cohomologies paires $h^{2i}(X, E_{k,m}^{DS} T_X^*)$ devraient devenir négligeables par rapport à la caractéristique, lorsque k tend vers l’infini.

- **Fibré de Demainly-Semple** : Pour un poids m fixé, on demande de surcroît l'**invariance par reparamétrisation** à la source, \mathbb{C} . En termes plus précis, dans une carte locale et au-dessus d'un point $x \in X$, on considère les polynômes $P = P(j^\kappa f)$ en le jet d'ordre κ :

$$j^\kappa f := (f'_1, \dots, f'_n, f''_1, \dots, f''_n, \dots, f_1^{(\kappa)}, \dots, f_n^{(\kappa)})$$

d'un disque holomorphe

$$f = (f_1, f_2, \dots, f_n) : \mathbb{D} \rightarrow X,$$

satisfaisant :

$$P(j^\kappa(f \circ \phi)) = (\phi')^m P((j^\kappa f) \circ \phi),$$

pour toute **reparamétrisation à la source** $U \xrightarrow{\phi} \phi(U) \subset \mathbb{D}$, où $m \geq 1$ est un entier qui sera appelé le **poids** de P .

- Ceci s'organise en un fibré, quand $x \in X$ varie.
- **Graduation** : $E_{\kappa,m}^{DS} T_X^* = \oplus_m (E_{\kappa,m}^{DS} T_X^*)$.
- **Question ouverte** : Comprendre la structure algébrique de ce fibré pour les jets d'ordre élevé.
- **Fait** : Le fibré de Demainly-Semple a des **propriétés de positivité** légèrement meilleures que le fibré de Green-Griffiths. En particulier, en petite dimension et pour des ordres de jets petits, la caractéristiques d'Euler de $E_{k,m}^{DS} T_X^*$ est positive à partir d'un degré $\deg X$ légèrement plus bas que pour $E_{k,m}^{GG} T_X^*$.

IV – Décompositions de Schur

- **Fibrés de Schur :** Soit $X^n \subset \mathbb{P}^{n+1}(\mathbb{C})$ une hypersurface projective algébrique lisse. Classiquement, on a les fibrés vectoriels holomorphes suivants sur X :

- T_X^* ;
- $\Lambda^k T_X^*$ (théorie de Hodge) ;
- $K_X := \Lambda^n T_X^*$ le fibré canonique ;
- $K_X^{\otimes m}$ ses puissances symétriques (plurigenres) ;
- $\text{Sym}^k T_X^*$ (k -genre cotangentiel) ;

Ce sont tous des cas particuliers des **fibrés de Schur** :

$$\Gamma^{(\ell_1, \ell_2, \dots, \ell_n)} T_X^*,$$

qui sont paramétrés par n entiers décroissants :

$$\ell_1 \geq \ell_2 \geq \cdots \geq \ell_n \geq 0,$$

et l'on retrouve notamment :

$$\Lambda^k T_X^* = \Gamma^{(1, \dots, 1, 0, \dots, 0)} T_X^* \quad \text{avec } k \text{ fois 1;}$$

$$\text{Sym}^k T_X^* = \Gamma^{(k, 0, \dots, 0)} T_X^*.$$

- **Brève définition :** En fait, les fibrés de Schur apparaissent quand on décompose en représentations irréductibles de $\text{GL}_n(\mathbb{C})$ les puissances tensorielles :

$$\underbrace{T_X^* \otimes \cdots \otimes T_X^*}_{r \text{ fois}} = \bigoplus_{(\ell)} \left[\Gamma^{(\ell_1, \dots, \ell_n)} T_X^* \right]^{\oplus N(\ell)},$$

avec $\ell_1 \geq \cdots \geq \ell_n$ où $N(\ell)$ est une certaine multiplicité.

- **Théorie des représentations** : Toute représentation (action) de $\mathrm{GL}_n(\mathbb{C})$ peut s'écrire comme une certaine somme directe de représentations de Schur, lesquelles constituent la liste de **toutes** les représentations **irréductibles** possibles de $\mathrm{GL}_n(\mathbb{C})$.
- **Fait général offert à la géométrie complexe** : **Tout fibré vectoriel holomorphe** E sur X , sur les fibres duquel on peut faire agir $\mathrm{GL}_n(\mathbb{C})$, doit en principe se **décomposer comme une certaine somme directe de fibrés de Schur**, qui s'avèrent ainsi être les briques élémentaires avec lesquelles on peut reconstituer tout fibré dans l'anneau de Grothendieck.

$$E \simeq \bigoplus_{\text{certains } (\ell)} \left[\Gamma^{(\ell_1, \dots, \ell_n)} T_X^* \right]^{\text{certaines multiplicités}}$$

- **Question ouverte centrale** : Posséder à l'avance une théorie complète des cohomologies :

$$H^i(X, \Gamma^{(\ell_1, \ell_2, \dots, \ell_n)} T_X^*),$$

ou détenir au moins des inégalités asymptotiques optimales sur les nombres $h^i = \dim H^i$.

- **Résultats connus** : Certains théorèmes d'annulation dus à Brückmann et ses co-auteurs, et à Demainly, Manivel, mais les théorèmes d'annulation ne nous renseignent que sur la partie la plus accessible des cohomologies.

- Pour nos deux fibrés de différentielles de jets :

- $E_{\kappa,m}^{GG} T_X^*$ de Green-Griffiths, et :
- $E_{\kappa,m}^{DS} T_X^*$ de Demailly-Semple,

on devrait avoir *a priori* accès à une décomposition en fibrés de Schur, **mais même cela n'est pas encore connu en toute généralité.**

Résumé des objectifs

I. On veut des sections de ces fibrés :

$$h^0(X, E_{k,m}^{\bullet,\bullet} T_X^*) > 0,$$

et les théorèmes diront qu'on possède effectivement des sections pourvu que le degré d de X soit suffisamment grand. Par exemple :

Theorem. (ROUSSEAU 2006) *Pour $X^3 \subset \mathbb{P}^4(\mathbb{C})$, on a des sections de $E_{3,m}^{DS} T_X^*$ en degré $d \geq 97$.*

Theorem. (DIVERIO 2007) *Sans étudier complètement la structure algébrique des invariants de Demailly-Semple, on a des sections :*

$$\dim X = 3 \quad \text{en degré } d \geq 74$$

$$\dim X = 4 \quad \text{en degré } d \geq 298$$

$$\dim X = 5 \quad \text{en degré } d \geq 1222,$$

les cas suivants n'étant pas accessibles aux ordinateurs de bureau.

Theorem. (M.) *En étudiant complètement la structure des invariants de Demailly-Semple pour les jets d'ordre $\kappa = 4$ en dimensions $n = 3$ ou $n = 4$, des sections pour :*

$$\dim X = 3 \quad \text{en degré } d \geqslant 72;$$

$$\dim X = 4 \quad \text{en degré } d \geqslant 259.$$

(D.M.R.) *On a dégénérescence algébrique pour :*

$$\dim X = 4 \quad \text{en degré } d \geqslant 2432.$$

II. Un théorème de type Ahlfors-Schwarz-Siu-Demailly assurera qu'après tensorisation par l'inverse A^{-1} d'un fibré ample $A \rightarrow X$, toute application holomorphe entière $f : \mathbb{C} \rightarrow X$ devra satisfaire l'équation différentielle algébrique globale correspondante.

III. Un argument de **Siu 2004** permettra de déduire (sans trop de travail supplémentaire) la dégénérescence algébrique des courbes holomorphes entières, quitte à augmenter le degré.

- **En résumé :** C'est la première étape I qui est déterminante : il s'agit, rappelons-le, de décomposer les fibrés de jets comme certaines sommes directes de fibrés de Schur et de récupérer des sections de ces fibrés grâce à une étude séparée de la cohomologie, lorsqu'on accède en partie à cette dernière, notamment en petite dimension et pour des ordres de jets petits — *pour l'instant ! !*

- **Rappel :** Après 18 mois de travail très intense sur la structure des invariants de Demainly-Semple (si complexes), j'ai obtenu récemment en toute dimension $n \geq 2$ et pour les jets d'ordre $\kappa \geq 1$ quelconque :

Theorem. (M., oct. 2008) *Décomposition explicite du fibré de Green-Griffiths $E_{\kappa,m}^{GG} T_X^*$ en somme directe de fibrés de Schur.*

En effet, la théorie des invariants du groupe unipotent et le concept de monôme standard fournissent immédiatement une décomposition de $E_{\kappa,m}^{GG} T_X^*$, presque *ready-made*.

- **Hasards de la recherche :** Retour à Green-Griffiths dans les mois qui viendront, après Demainly-Semple.
- **Demainly 1997 :** Pour $n = k = 2$:

$$E_{2,m}^2 T_X^* = \bigoplus_{a+3b=m} \Gamma^{(a+b, b)} T_X^*.$$

- **Rousseau 2006 :** Pour $n = k = 3$ et $n = 2, k = 3$:

$$E_{3,m}^3 T_X^* = \bigoplus_{a+3b+5c+6d=m} \Gamma^{(a+b+2c+d, b+c+d, d)} T_X^*,$$

$$\text{et : } E_{3,m}^2 T_X^* = \bigoplus_{a+3b+5c=m} \Gamma^{(a+b+2c, b+c)} T_X^*.$$

- **M. 2007 :** Pour $n = 2, k = 4$:

$$E_{4,m}^2 T_X^* = \bigoplus_{a+3b+5c+8e=m} \Gamma^{(a+b+2c+2e, b+c+2e)} T_X^*$$

$$\bigoplus_{7+a+5c+7d+8e=m} \Gamma^{(3+a+2c+3d+2e, 1+c+d+2e)} T_X^*.$$

• Explosion imprévue des invariants de Demailly :

Theorem. Sur une hypersurface $X^4 \subset \mathbb{P}^5(\mathbb{C})$ de dimension $n = 4$, le terme gradué de degré $E_{4,m}^4 T_X^*$ de degré m du fibré complet de Demailly-Semple $E_4^4 T_X^* = \bigoplus_m E_{4,m}^4 T_X^*$ possède la décomposition suivante en fibrés de Schur :

$$E_{4,m}^4 T_X^* = \bigoplus_{\substack{(a,b,\dots,n) \in \mathbb{N}^{14} \setminus (\square_1 \cup \dots \cup \square_{41}) \\ o+3a+\dots+21n+10p=m}}$$



$$\Gamma \left(\begin{matrix} o + a + 2b + 3c + d + 2e + 3f + 2g + 2h + 3i + 4j + 3k + 3l + 4m' + 5n + p \\ a + b + c + d + e + f + 2g + 2h + 2i + 2j + 2k + 3l + 3m' + 3n + p \\ d + e + f + h + i + j + 2k + 2l + 2m' + 2n + p \\ p \end{matrix} \right) T_X^*$$

où les 41 sous-ensembles \square_i , $i = 1, 2, \dots, 41$ de $\mathbb{N}^{14} \ni (a, b, \dots, l, m', n)$ sont :

$$\begin{aligned} & \{a \geq 1, c \geq 1\}, \quad \{a \geq 1, e \geq 1\}, \quad \{a \geq 1, f \geq 1\}, \quad \{a \geq 1, i \geq 1\}, \\ & \{a \geq 1, j \geq 1\}, \quad \{a \geq 1, k \geq 1\}, \quad \{a \geq 1, l \geq 1\}, \quad \{a \geq 1, m' \geq 1\}, \\ & \{a \geq 1, n \geq 1\}, \quad \{b \geq 1, e \geq 1\}, \quad \{b \geq 1, f \geq 1\}, \quad \{b \geq 1, i \geq 1\}, \\ & \{b \geq 1, j \geq 1\}, \quad \{b \geq 1, k \geq 1\}, \quad \{b \geq 1, l \geq 1\}, \quad \{b \geq 1, m' \geq 1\}, \\ & \{b \geq 1, n \geq 1\}, \quad \{c \geq 1, k \geq 1\}, \quad \{c \geq 1, l \geq 1\}, \quad \{c \geq 1, m' \geq 1\}, \\ & \{c \geq 1, n \geq 1\}, \quad \{d \geq 1, f \geq 1\}, \quad \{d \geq 1, i \geq 1\}, \quad \{d \geq 1, j \geq 1\}, \\ & \{d \geq 1, m \geq 1\}, \quad \{d \geq 1, n \geq 1\}, \quad \{e \geq 1, i \geq 1\}, \quad \{e \geq 1, j \geq 1\}, \\ & \{e \geq 1, m' \geq 1\}, \quad \{e \geq 1, n \geq 1\}, \quad \{d \geq 1, g \geq 1, k \geq 1\}, \\ & \{e \geq 1, g \geq 1, k \geq 1\}, \quad \{f \geq 1, g \geq 1, k \geq 1\}, \quad \{g \geq 1, k \geq 2\}, \\ & \{h \geq 1, j \geq 1\}, \quad \{h \geq 1, n \geq 1\}, \quad \{i \geq 2, n \geq 1\}, \\ & \{f \geq 1, h \geq 1, m' \geq 1\}, \quad \{f \geq 1, i \geq 1, m' \geq 1\}, \quad \{f \geq 1, i \geq 1, n \geq 1\}, \\ & \{f \geq 1, l \geq 1, n \geq 1\}. \end{aligned}$$

V – Calculs asymptotiques de caractéristique d’Euler

- **Rappel :** Fibrés de jets = somme de fibrés de Schur.
- **Additivité des caractéristiques :**

$$\chi(E \oplus F) = \chi(E) + \chi(F).$$

- **Caractéristique asymptotique des fibrés de Schur :**

- Dimension $n = 3$:**

$$\begin{aligned} \chi(X, \Gamma^{(\ell_1, \ell_2, \ell_3)} T_X) &= \\ &= \frac{c_1^3 - 2c_1c_2 + c_3}{0! 1! 5!} \begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ \ell_1 & \ell_2 & \ell_3 \\ \ell_1^5 & \ell_2^5 & \ell_3^5 \end{vmatrix} + \frac{c_1c_2 - c_3}{0! 2! 4!} \begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ \ell_1^2 & \ell_2^2 & \ell_3^2 \\ \ell_1^4 & \ell_2^4 & \ell_3^4 \end{vmatrix} + \\ &+ \frac{c_3}{1! 2! 3!} \begin{vmatrix} \ell_1 & \ell_2 & \ell_3 \\ \ell_1^2 & \ell_2^2 & \ell_3^2 \\ \ell_1^3 & \ell_2^3 & \ell_3^3 \end{vmatrix} + O(|\ell|^5). \end{aligned}$$

- Dimension $n = 4$:**

$$\begin{aligned} \chi(X, \Gamma^{(\ell_1, \ell_2, \ell_3, \ell_4)} T_X) &= \\ &= \frac{c_1^4 - 3c_1^2c_2 + c_2^2 + 2c_1c_3 - c_4}{0! 1! 2! 7!} \begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ \ell_1 & \ell_2 & \ell_3 & \ell_4 \\ \ell_1^2 & \ell_2^2 & \ell_3^2 & \ell_4^2 \\ \ell_1^7 & \ell_2^7 & \ell_3^7 & \ell_4^7 \end{vmatrix} + \\ &+ \frac{c_1^2c_2 - c_2^2 - c_1c_3 + c_4}{0! 1! 3! 6!} \begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ \ell_1 & \ell_2 & \ell_3 & \ell_4 \\ \ell_1^3 & \ell_2^3 & \ell_3^3 & \ell_4^3 \\ \ell_1^6 & \ell_2^6 & \ell_3^6 & \ell_4^6 \end{vmatrix} + \frac{-c_1c_3 + c_2^2}{0! 1! 4! 5!} \begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ \ell_1 & \ell_2 & \ell_3 & \ell_4 \\ \ell_1^4 & \ell_2^4 & \ell_3^4 & \ell_4^4 \\ \ell_1^5 & \ell_2^5 & \ell_3^5 & \ell_4^5 \end{vmatrix} + \\ &+ \frac{c_1c_3 - c_4}{0! 2! 3! 5!} \begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ \ell_1^2 & \ell_2^2 & \ell_3^2 & \ell_4^2 \\ \ell_1^3 & \ell_2^3 & \ell_3^3 & \ell_4^3 \\ \ell_1^5 & \ell_2^5 & \ell_3^5 & \ell_4^5 \end{vmatrix} + \frac{c_4}{1! 2! 3! 4!} \begin{vmatrix} \ell_1 & \ell_2 & \ell_3 & \ell_4 \\ \ell_1^2 & \ell_2^2 & \ell_3^2 & \ell_4^2 \\ \ell_1^3 & \ell_2^3 & \ell_3^3 & \ell_4^3 \\ \ell_1^4 & \ell_2^4 & \ell_3^4 & \ell_4^4 \end{vmatrix} + O(|\ell|^9). \end{aligned}$$

- **Fibrés duals et caractéristique :**

$$\chi(X, \Gamma^{(\ell_1, \dots, \ell_n)} T_X^*) = (-1)^n \chi(X, \Gamma^{(\ell_1, \dots, \ell_n)} T_X).$$

Theorem. *Les termes d'ordre le plus élevé par rapport à $|\ell| = \max_{1 \leq i \leq n} \ell_i$ dans la caractéristique d'Euler du fibré de Schur $\Gamma^{(\ell_1, \ell_2, \dots, \ell_n)} T_X$ sont homogènes d'ordre $O(|\ell|^{\frac{n(n+1)}{2}})$ et ils sont donnés par une somme de ℓ'_i -déterminants indexés par toutes les partitions $(\lambda_1, \dots, \lambda_n)$ de n :*

$$\begin{aligned} & \chi(X, \Gamma^{(\ell_1, \ell_2, \dots, \ell_n)} T_X) = \\ &= \sum_{\lambda \text{ partition de } n} \frac{C_{\lambda^c}}{(\lambda_1 + n - 1)! \cdots \lambda_n!} \left| \begin{array}{cccc} \ell'_1^{\lambda_1+n-1} & \ell'_2^{\lambda_1+n-1} & \cdots & \ell'_n^{\lambda_1+n-1} \\ \ell'_1^{\lambda_2+n-2} & \ell'_2^{\lambda_2+n-2} & \cdots & \ell'_n^{\lambda_2+n-2} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \ell'_1^{\lambda_n} & \ell'_2^{\lambda_n} & \cdots & \ell'_n^{\lambda_n} \end{array} \right| + \\ & \quad + O\left(|\ell|^{\frac{n(n+1)}{2}-1}\right), \end{aligned}$$

où l'on a posé $\ell'_i := \ell_i + n - i$ avec des coefficients C_{λ^c} qui s'expriment en fonction des classes de Chern $c_k(T_X) = c_k$ de T_X au moyen des déterminants de Jacobi-Trudy qui dépendent de la partition conjuguée λ^c :

$$C_{\lambda^c} = C_{(\lambda_1^c, \dots, \lambda_n^c)} = \left| \begin{array}{ccccc} c_{\lambda_1^c} & c_{\lambda_1^c+1} & c_{\lambda_1^c+2} & \cdots & c_{\lambda_1^c+n-1} \\ c_{\lambda_2^c-1} & c_{\lambda_2^c} & c_{\lambda_2^c+1} & \cdots & c_{\lambda_2^c+n-2} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ c_{\lambda_n^c-n+1} & c_{\lambda_n^c-n+2} & c_{\lambda_n^c-n+3} & \cdots & c_{\lambda_n^c} \end{array} \right|,$$

où par convention $c_k := 0$ pour $k < 0$ ou $k > n$ et où $c_0 := 1$.

- **Approximation des 41 sous-ensembles** : Ne conserver que les familles de sommes de fibrés de Schur qui contribueront en $\mathcal{O}(m^{16})$ dans la caractéristique finale.

- **24 familles (avec multiplicité) de sommes de fibrés de Schur :**

A, B, C, ..., W, X.

définies comme suit :

A : 2·

$$\bigoplus_{m=o+14j+15k+17l+19m+21n+10p}$$

$$\Gamma \begin{pmatrix} o + 4j + 3k + 3l + 4m + 5n + p \\ 2j + 2k + 3l + 3m + 3n + p \\ j + 2k + 2l + 2m + 2n + p \\ p \end{pmatrix} T_X^*,$$

B:

$$\bigoplus_{m=o+12i+14j+15k+17l+19m+10p}$$

$$\Gamma \begin{pmatrix} o + 3i + 4j + 3k + 3l + 4m + p \\ 2i + 2j + 2k + 3l + 3m + p \\ i + j + 2k + 2l + 2m + p \\ p \end{pmatrix} T_X^*,$$

C:

$$\bigoplus_{m=o+10h+12i+15k+17l+19m+10p}$$

$$\Gamma \begin{pmatrix} o + 2h + 3i + 3k + 3l + 4m + p \\ 2h + 2i + 2k + 3l + 3m + p \\ h + i + 2k + 2l + 2m + p \\ p \end{pmatrix} T_X^*,$$

D : 4·

$$\bigoplus_{m=o+8g+14j+17l+19m+21n+10p}$$

$$\Gamma \begin{pmatrix} o + 2g + 4j + 3l + 4m + 5n + p \\ 2g + 2j + 3l + 3m + 3n + p \\ j + 2l + 2m + 2n + p \\ p \end{pmatrix} T_X^*,$$

E : 2·

$$\bigoplus_{m=o+8g+12i+14j+17l+19m+10p}$$

$$\Gamma \begin{pmatrix} o + 2g + 3i + 4j + 3l + 4m + p \\ 2g + 2i + 2j + 3l + 3m + p \\ i + j + 2l + 2m + p \\ p \end{pmatrix} T_X^*,$$

F: 2.

$$\bigoplus_{m=o+8g+10h+12i+17l+19m+10p}$$

$$\Gamma \begin{pmatrix} o + 2g + 2h + 3i + 3l + 4m + p \\ 2g + 2h + 2i + 3l + 3m + p \\ h + i + 2l + 2m + p \\ p \end{pmatrix} T_X^*,$$

G:

$$\bigoplus_{m=o+10f+14j+15k+19m+21n+10p}$$

$$\Gamma \begin{pmatrix} o + 3f + 4j + 3k + 4m + 5n + p \\ f + 2j + 2k + 3m + 3n + p \\ f + j + 2k + 2m + 2n + p \\ p \end{pmatrix} T_X^*,$$

H:

$$\bigoplus_{m=o+10f+14j+15k+17l+19m+10p}$$

$$\Gamma \begin{pmatrix} o + 3f + 4j + 3k + 3l + 4m + p \\ f + 2j + 2k + 3l + 3m + p \\ f + j + 2k + 2l + 2m + p \\ p \end{pmatrix} T_X^*,$$

I:

$$\bigoplus_{m=o+10f+12i+14j+15k+17l+10p}$$

$$\Gamma \begin{pmatrix} o + 3f + 3i + 4j + 3k + 3l + p \\ f + 2i + 2j + 2k + 3l + p \\ f + i + j + 2k + 2l + p \\ p \end{pmatrix} T_X^*,$$

J:

$$\bigoplus_{m=o+10f+10h+12i+15k+17l+10p}$$

$$\Gamma \begin{pmatrix} o + 3f + 2h + 3i + 3k + 3l + p \\ f + 2h + 2i + 2k + 3l + p \\ f + h + i + 2k + 2l + p \\ p \end{pmatrix} T_X^*,$$

K:

$$\bigoplus_{m=o+10f+8g+14j+19m+21n+10p}$$

$$\Gamma \begin{pmatrix} o + 3f + 2g + 4j + 4m + 5n + p \\ f + 2g + 2j + 3m + 3n + p \\ f + j + 2m + 2n + p \\ p \end{pmatrix} T_X^*,$$

L:

$$\bigoplus_{m=o+10f+8g+14j+17l+19m+10p}$$

$$\Gamma \begin{pmatrix} o + 3f + 2g + 4j + 3l + 4m + p \\ f + 2g + 2j + 3l + 3m + p \\ f + j + 2l + 2m + p \\ p \end{pmatrix} T_X^*,$$

M:

$$\bigoplus_{m=o+10f+8g+12i+14j+17l+10p}$$

$$\Gamma \begin{pmatrix} o + 3f + 2g + 3i + 4j + 3l + p \\ f + 2g + 2i + 2j + 3l + p \\ f + i + j + 2l + p \\ p \end{pmatrix} T_X^*,$$

N:

$$\bigoplus_{m=o+10f+8g+10h+12i+17l+10p}$$

$$\Gamma \begin{pmatrix} o + 3f + 2g + 2h + 3i + 3l + p \\ f + 2g + 2h + 2i + 3l + p \\ f + h + i + 2l + p \\ p \end{pmatrix} T_X^*,$$

O:

$$\bigoplus_{m=o+8e+10f+10h+15k+17l+10p}$$

$$\Gamma \begin{pmatrix} o + 2e + 3f + 2h + 3k + 3l + p \\ e + f + 2h + 2k + 3l + p \\ e + f + h + 2k + 2l + p \\ p \end{pmatrix} T_X^*,$$

P:

$$\bigoplus_{m=o+8e+10f+8g+10h+17l+10p}$$

$$\Gamma \begin{pmatrix} o + 2e + 3f + 2g + 2h + 3l + p \\ e + f + 2g + 2h + 3l + p \\ e + f + h + 2l + p \\ p \end{pmatrix} T_X^*,$$

Q:

$$\bigoplus_{m=o+6d+8e+10h+15k+17l+10p}$$

$$\Gamma \begin{pmatrix} o + d + 2e + 2h + 3k + 3l + p \\ d + e + 2h + 2k + 3l + p \\ d + e + h + 2k + 2l + p \\ p \end{pmatrix} T_X^*,$$

R:

$$\bigoplus_{m=o+6d+8e+8g+10h+17l+10p}$$

$$\Gamma \begin{pmatrix} o + d + 2e + 2g + 2h + 3l + p \\ d + e + 2g + 2h + 3l + p \\ d + e + h + 2l + p \\ p \end{pmatrix} T_X^*,$$

S:

$$\bigoplus_{m=o+7c+10f+8g+12i+14j+10p}$$

$$\Gamma \begin{pmatrix} o + 3c + 3f + 2g + 3i + 4j + p \\ c + f + 2g + 2i + 2j + p \\ f + i + j + p \\ p \end{pmatrix} T_X^*,$$

T:

$$\bigoplus_{m=o+7c+10f+8g+10h+12i+10p}$$

$$\Gamma \begin{pmatrix} o + 3c + 3f + 2g + 2h + 3i + p \\ c + f + 2g + 2h + 2i + p \\ f + h + i + p \\ p \end{pmatrix} T_X^*,$$

U:

$$\bigoplus_{m=o+7c+8e+10f+8g+10h+10p}$$

$$\Gamma \begin{pmatrix} o + 3c + 2e + 3f + 2g + 2h + p \\ c + e + f + 2g + 2h + p \\ e + f + h + p \\ p \end{pmatrix} T_X^*,$$

V:

$$\bigoplus_{m=o+7c+6d+8e+8g+10h+10p}$$

$$\Gamma \begin{pmatrix} o + 3c + d + 2e + 2g + 2h + p \\ c + d + e + 2g + 2h + p \\ d + e + h + p \\ p \end{pmatrix} T_X^*,$$

W:

$$\bigoplus_{m=o+5b+7c+6d+8g+10h+10p}$$

$$\Gamma \begin{pmatrix} o + 2b + 3c + d + 2g + 2h + p \\ b + c + d + 2g + 2h + p \\ d + h + p \\ p \end{pmatrix} T_X^*,$$

X:

$$\bigoplus_{m=o+3a+5b+6d+8g+10h+10p}$$

$$\Gamma \begin{pmatrix} o + a + 2b + d + 2g + 2h + p \\ a + b + d + 2g + 2h + p \\ d + h + p \\ p \end{pmatrix} T_X^*.$$

- **Calculs sur Maple 11** : Environ 50 minutes.

Theorem. Si $X^4 \subset \mathbb{P}^5(\mathbb{C})$ est une hypersurface projective algébrique de degré d , alors quand $m \rightarrow \infty$, on a l'asymptotique :

De plus, le coefficient de m^{16} ici, un polynôme factorisé de degré 5 par rapport à d , est positif pour tout degré $d \geqslant 96$.

- Majoration des seconds groupes de cohomologie (ROUSSEAU 2006) :

$$h^2(X, \Gamma^{(\ell_1, \ell_2, \ell_3)} T_X^*) \leq d(d+13) \frac{3(\ell_1 + \ell_2 + \ell_3)^3}{2} (\ell_1 - \ell_2)(\ell_1 - \ell_3)(\ell_2 - \ell_3) + \\ + O(|\ell|^5).$$

- **Remarque :** Formule plus complexe en dimension $n = 4$, peut-être à nettoyer (**DIVERIO-M.-ROUSSEAU**).

Theorem. *Existence d'équations différentielles algébriques globales pour :*

(M.) $\dim X = 3$ en degré $d \geqslant 72$;

(D.M.R.) $\dim X = 4$ en degré $d \geqslant 259$.

VI – Polynômes invariants, crochets et bi-invariants

- **Enfin les invariants de Demainly !** Ici commencent les choses sérieuses et difficiles, truffées d'obstacles mathématiques imprévisibles.
- **Définition :** Le groupe des κ -jets à l'origine $0 \in \mathbb{C}$ de reparamétrisations :

$$\phi(\zeta) = 1 \zeta + \phi''(0) \frac{\zeta^2}{2!} + \cdots + \phi^{(\kappa)}(0) \frac{\zeta^\kappa}{\kappa!} + \cdots$$

qui sont tangentes à l'identité, *i.e.* $\phi'(0) = 1$, agit sur les $n\kappa$ -uplets $(f'_{j_1}, f''_{j_2}, \dots, f^{(\kappa)}_{j_\kappa})$ par simple multiplication matricielle, c'est-à-dire que si l'on pose :

$$g_i^{(\lambda)} := (f_i \circ \phi)^{(\lambda)},$$

les formules de dérivation composée donnent :

$$\begin{pmatrix} g'_i \\ g''_i \\ g'''_i \\ g''''_i \\ \vdots \\ g_i^{(\kappa)} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 \\ \phi'' & 1 & 0 & 0 & \cdots & 0 \\ \phi''' & 3\phi'' & 1 & 0 & \cdots & 0 \\ \phi'''' & 4\phi''' + 3\phi''^2 & 6\phi'' & 1 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \phi^{(\kappa)} & \dots & \dots & \dots & \dots & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} f'_i \circ \phi \\ f''_i \circ \phi \\ f'''_i \circ \phi \\ f''''_i \circ \phi \\ \vdots \\ f_i^{(\kappa)} \circ \phi \end{pmatrix} \quad (i = 1 \dots n).$$

Par définition, les polynômes $P(j^\kappa f)$ qui sont invariants par reparamétrisation satisfont, pour un certain entier m :

$$\begin{aligned} P(j^\kappa g) &= P(j^\kappa(f \circ \phi)) = \phi'(0)^m \cdot P((j^\kappa f) \circ \phi) \\ &= P((j^\kappa f) \circ \phi), \end{aligned}$$

c'est-à-dire, ce sont les polynômes invariants pour l'action matricielle :

$$P(j^\kappa g) = P(M_{\phi'', \phi''', \dots, \phi^{(\kappa)}} \cdot j^\kappa f) = P(j^\kappa f),$$

où les dérivées $\phi'', \phi''', \dots, \phi^{(\kappa)}$ sont interprétées comme des constantes complexes arbitraires.

- **Notations :** E_κ^n l'algèbre de ces invariants qui est graduée par les poids m :

$$E_\kappa^n = \bigoplus_{m \geq 0} E_{\kappa, m}^n.$$

- **Problème :** Comprendre la structure d'une telle algèbre des polynômes invariants par reparamétrisation, *i.e.* des polynômes jouissant de l'invariance par rapport à l'action matricielle écrite juste à l'instant.
- **Question ouverte :** Cette algèbre est-elle toujours *de type fini* ?
- **Notions de base de la théorie des invariants « à l'ancienne » :**
- **Algèbres d'invariants finiment engendrées :** Si, pour certaines valeurs de n et de κ , il existe un nombre fini d'invariants $\Lambda_1, \dots, \Lambda_{\text{last}}$ de E_κ^n tels que tout polynôme invariant $P(j^\kappa f) \in E_\kappa^n$ peut être écrit comme un certain polynôme :

$$P(j^\kappa f) = \mathcal{P}_P(\Lambda_1, \dots, \Lambda_{\text{last}})$$

en ces invariants de base, alors on dit que E_κ^n est engendrée (comme algèbre) par $\Lambda_1, \dots, \Lambda_{\text{last}}$.

- **Difficulté universelle en théorie des invariants :** Trouver de tels systèmes de générateurs *explicites*.
- **Type d'une algèbre :** On dit de plus que les invariants $\Lambda_1, \dots, \Lambda_{\text{last}}$ sont **mutuellement indépendants** si aucun d'entre eux ne peut s'écrire comme un certain polynôme en les autres invariants.

Le nombre d'invariants mutuellement indépendants ne dépend alors pas du système choisi : c'est le **type** (fini) de l'algèbre en question.

- **Jets d'ordre** $\kappa = 1$: C'est très simple : l'algèbre des invariants est une algèbre de polynômes sans syzygies :

$$E_1^n = \mathbb{C}[f'_1, f'_2, \dots, f'_n].$$

- **Jets d'ordre** $\kappa = 2$: (**DEMAILLY 1997**) Pour $n = 2$, $\kappa = 2$, l'algèbre E_2^2 est engendrée par trois invariants fondamentaux :

$$f'_1, \quad f'_2, \quad \left| \begin{array}{cc} f'_1 & f'_2 \\ f''_1 & f''_2 \end{array} \right|.$$

- **Plus généralement** : (**DEMAILLY 1997**) Pour $n \geq 2$, $\kappa = 2$, l'algèbre E_2^n est engendrée par la collection

d'invariants fondamentaux :

$$f'_i, \quad \begin{vmatrix} f'_j & f'_k \\ f''_j & f''_k \end{vmatrix},$$

et il y a des syzygies (*cf.* ci-dessous) : les relations plückeriennes. Pour se convaincre de l'invariance par reparamétrisation, on vérifie de suite :

$$\begin{vmatrix} (f_i \circ \phi)' & (f_j \circ \phi)' \\ (f_i \circ \phi)'' & (f_j \circ \phi)'' \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} \phi' f'_i & \phi' f'_j \\ \phi'' f'_i + \phi'^2 f''_i & \phi'' f'_j + \phi'^2 f''_j \end{vmatrix} = \phi'^3 \cdot \begin{vmatrix} f'_i & f'_j \\ f''_i & f''_j \end{vmatrix}.$$

- **Noter** : pour tous $\alpha, \beta \geqslant 1$:

$$\Delta^{\alpha, \beta} := \begin{vmatrix} f_1^{(\alpha)} & f_2^{(\alpha)} \\ f_1^{(\beta)} & f_2^{(\beta)} \end{vmatrix}.$$

- **Exemples** :

$$\Delta^{1,2} = \begin{vmatrix} f'_1 & f'_2 \\ f''_1 & f''_2 \end{vmatrix}, \quad \Delta^{2,3} = \begin{vmatrix} f''_1 & f''_2 \\ f'''_1 & f'''_2 \end{vmatrix}.$$

- **Introduire** :

$$\Lambda^3 := \Delta^{1,2},$$

$$\Lambda_1^5 := \Delta^{1,3} f'_1 - 3 \Delta^{1,2} f''_1$$

$$\Lambda_2^5 := \Delta^{1,3} f'_2 - 3 \Delta^{1,2} f''_2$$

Theorem. (DEMAILLY ; ROUSSEAU ; 2003) En dimension $n = 2$ et pour des jets d'ordre $\kappa = 3$, tout polynôme $P(j^3 f)$ invariant par reparamétrisation s'écrit de manière unique sous la forme :

$$P(j^3 f) = \mathcal{P}(f'_1, f'_2, \Lambda_1^5, \Lambda_2^5) + \Lambda^3 \mathcal{Q}(f'_1, f'_2, \Lambda_1^5, \Lambda_2^5),$$

avec des polynômes arbitraires \mathcal{P} et \mathcal{Q} .

- **Syzygie unique :**

$$0 \equiv f'_2 \Lambda_1^5 - f'_1 \Lambda_2^5 - 3 \Lambda^3 \Lambda^3,$$

- **Question :** Comment engendrer tous les invariants ?
- **Rappel :** On cherche à **décomposer le fibré de Demainly-Semple en sommes directes de fibrés de Schur**.
- **Donc :** En vertu des théorèmes fondamentaux de la théorie des représentations (de $GL_n(\mathbb{C})$), on doit en fait rechercher les polynômes invariants par reparamétrisation qui sont *aussi* invariants par rapport à l'action unipotente, *i.e.* qui satisfont en plus :

$$u \cdot P(j^\kappa f) = P(j^\kappa f) \quad \text{pour tout } u = \begin{pmatrix} 1 & 0 & \cdots & 0 \\ u_{21} & 1 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ u_{n1} & u_{n2} & \cdots & 1 \end{pmatrix}.$$

À partir de maintenant, on s'intéressera donc exclusivement aux :

Polynômes bi-invariants

c'est à dire aux polynômes qui sont à la fois :

- invariants par reparamétrisation**, et :
- invariants par rapport à l'action unipotente**,

à savoir qui satisfont les deux conditions d'invariance :

$$\boxed{P(M_{\phi'', \phi''', \dots, \phi^{(\kappa)}} \cdot j^\kappa f) = P(j^\kappa f)}$$

$$u \cdot P(j^\kappa f) = P(j^\kappa f)$$

- **Nous admettons :**

Un monôme bi-invariant \iff un fibré de Schur $\Gamma^{(\bullet)} T_X^*$

- **Voici un algorithme inapproprié, fourni par un procédé presque gratuit :** Supposons connus deux invariants P de poids m et Q de poids n :

$$P(j^\kappa g) = (\phi')^m P((j^\kappa f) \circ \phi),$$

$$Q(j^\tau g) = (\phi')^n Q((j^\tau f) \circ \phi),$$

où l'on a posé $g := f \circ \phi$.

- **Differentier** par rapport à la variable $\zeta \in \mathbb{C}$ revient à appliquer **l'opérateur de différentiation totale** :

$$D := \sum_{k=1}^n \sum_{\lambda \in \mathbb{N}} \frac{\partial(\bullet)}{\partial f_k^{(\lambda)}} \cdot f_k^{(\lambda+1)},$$

ce qui donne ici :

$$[\text{DP}] (j^{\kappa+1} g) = m \phi'' \phi'^{m-1} \text{P}((j^\kappa f) \circ \phi) + \\ + \phi'^m \phi' [\text{DP}] ((j^{\kappa+1} f) \circ \phi),$$

$$[\text{DQ}] (j^{\tau+1} g) = n \phi'' \phi'^{n-1} \text{Q}((j^\tau f) \circ \phi) + \\ + \phi'^m \phi' [\text{DQ}] ((j^{\tau+1} f) \circ \phi).$$

- Mais on doit impérativement éliminer la dérivée seconde ϕ'' .

- À cette fin, exécuter le produit croisé :

$$\begin{vmatrix} [\text{DP}] (j^{\kappa+1} g) & m \text{P}(j^\kappa g) \\ [\text{DQ}] (j^{\tau+1} g) & n \text{Q}(j^\tau g) \end{vmatrix} = \\ = \begin{vmatrix} m \phi'' \phi'^{m-1} \text{P}((j^\kappa f) \circ \phi) + \phi'^{m+1} [\text{DP}] ((j^{\kappa+1} f) \circ \phi) & m \phi'^m \text{P}((j^\kappa f) \circ \phi) \\ n \phi'' \phi'^{n-1} \text{Q}((j^\tau f) \circ \phi) + \phi'^{n+1} [\text{DQ}] ((j^{\tau+1} f) \circ \phi) & n \phi'^n \text{Q}((j^\tau f) \circ \phi) \end{vmatrix} \\ = \begin{vmatrix} \phi'^{m+1} [\text{DP}] ((j^{\kappa+1} f) \circ \phi) & m \phi'^m \text{P}((j^\kappa f) \circ \phi) \\ \phi'^{n+1} [\text{DQ}] ((j^{\tau+1} f) \circ \phi) & n \phi'^n \text{Q}((j^\tau f) \circ \phi) \end{vmatrix} \\ = \phi'^{m+n+1} \begin{vmatrix} [\text{DP}] (j^{\kappa+1} f) & m \text{P}(j^\kappa f) \\ [\text{DQ}] (j^{\tau+1} f) & n \text{Q}(j^\tau f) \end{vmatrix}$$

et obtenir un nouvel invariant de poids $m + n + 1$.

Observation. Toute paire d'invariants produit automatiquement un nouvel invariant :

$$[\text{P}, \text{Q}] := n \text{DP} \cdot \text{Q} - m \text{P} \cdot \text{DQ},$$

qui est visiblement antisymétrique par rapport à P et Q.

- Trois familles génératrices de syzygies :

$$(\mathcal{J}ac) \quad 0 \equiv [[P, Q], R] + [[R, P], Q] + [[Q, R], P].$$

$$(\mathcal{Plck}_1) \quad 0 \equiv m P [Q, R] + o R [P, Q] + n Q [R, P].$$

$$(\mathcal{Plck}_2) \quad 0 \equiv [P, Q] \cdot [R, S] + [S, P] \cdot [R, Q] + [Q, S] \cdot [R, P].$$

- **Fait encourageant :** Toutes les algèbres d'invariants de Demainly-Semple connues auparavant étaient engendrées en prenant les crochets entre les invariants connus au niveau de jets inférieur.

VII – Contre-exemple cruel

- **Contre-exemple cruel :** (M., 2007) Pour les jets d'ordre $\kappa = 5$ en dimension $n = 2$, on a exactement **11** bi-invariants principaux obtenus en prenant les crochets entre tous les **5** bi-invariants connus au niveau de jets inférieur $\kappa = 4$:

$$f'_1, \quad \Lambda^3, \quad \Lambda_1^5, \quad \Lambda_{1,1}^7, \quad M^8,$$

à savoir les crochets suivants :

$$\begin{aligned}\Lambda_{1,1,1}^9 &:= [\Lambda_{1,1}^7, f'_1] \\ M_1^{10} &:= [M^8, f'_1] \\ N^{12} &:= [M^8, \Lambda^3] \\ K_{1,1}^{12} &:= [\Lambda_{1,1}^7, \Lambda_1^5] / f'_1 \\ H_1^{14} &:= [M^8, \Lambda_1^5] \\ F_{1,1}^{16} &:= [M^8, \Lambda_{1,1}^7]\end{aligned}$$

- **Mais il y a en fait 6 bi-invariants supplémentaires :**

$$X^{18}$$

$$X^{19}$$

$$X^{21}$$

$$X^{23}$$

$$X^{25}$$

$$Y^{27}$$

et dans la liste de ces 17 bi-invariants, aucun d'entre eux ne peut s'écrire comme un certain polynôme en les **16** autres invariants restants.

- **Voici les expressions explicites de ces 17 invariants :**
Ici, les indices i, j, k valent 1 ou 2 et les bi-invariants sont les ont tous leurs indices égaux à 1.

$$f'_i \\ \Lambda^3 := \Delta^{1,2}$$

$$\Lambda_i^5 := \Delta^{1,3} f'_i - 3 \Delta^{1,2} f''_i$$

$$\Lambda_{i,j}^7 := \Delta^{1,4} f'_i f'_j + 4 \Delta^{2,3} f'_i f'_j - 5 \Delta^{1,3} (f''_i f'_j + f'_i f''_j) + 15 \Delta^{1,2} f''_i f''_j$$

$$M^8 := 3 \Delta^{1,4} \Delta^{1,2} + 12 \Delta^{2,3} \Delta^{1,2} - 5 \Delta^{1,3} \Delta^{1,3}$$

$$\begin{aligned} \Lambda_{i,j,k}^9 := & \Delta^{1,5} f'_i f'_j f'_k + 5 \Delta^{2,4} f'_i f'_j f'_k - \\ & - 4 \Delta^{1,4} (f''_i f'_j + f'_i f''_j) f'_k - 7 \Delta^{1,4} f'_i f'_j f''_k - \\ & - 16 \Delta^{2,3} (f''_i f'_j + f'_i f''_j) f'_k - 28 \Delta^{2,3} f'_i f'_j f''_k - \\ & - 5 \Delta^{1,3} (f'''_i f'_j + f'_i f'''_j) f'_k + 35 \Delta^{1,3} (f''_i f''_j f'_k + f''_i f'_j f''_k + f'_i f''_j f''_k) - \\ & - 105 \Delta^{1,2} f''_i f''_j f''_k, \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} M_i^{10} := & [3 \Delta^{1,5} \Delta^{1,2} + 15 \Delta^{2,4} \Delta^{1,2} - 7 \Delta^{1,4} \Delta^{1,3} + 2 \Delta^{2,3} \Delta^{1,3}] f'_i - \\ & - [24 \Delta^{1,4} \Delta^{1,2} + 96 \Delta^{2,3} \Delta^{1,2} - 40 \Delta^{1,3} \Delta^{1,3}] f''_i, \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} N^{12} := & 9 \Delta^{1,5} \Delta^{1,2} \Delta^{1,2} + 45 \Delta^{2,4} \Delta^{1,2} \Delta^{1,2} - 45 \Delta^{1,4} \Delta^{1,3} \Delta^{1,2} - \\ & - 90 \Delta^{2,3} \Delta^{1,3} \Delta^{1,2} + 40 \Delta^{1,3} \Delta^{1,3} \Delta^{1,3}, \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} K_{i,j}^{12} := & f'_i f'_j \left(5 \Delta^{1,5} \Delta^{1,3} + 25 \Delta^{2,4} \Delta^{1,3} - 7 \Delta^{1,4} \Delta^{1,4} - 56 \Delta^{2,3} \Delta^{1,4} - 112 \Delta^{2,3} \Delta^{2,3} \right) + \\ & + \frac{(f'_i f''_j + f''_i f'_j)}{2} \left(- 15 \Delta^{1,5} \Delta^{1,2} - 75 \Delta^{2,4} \Delta^{1,2} + 65 \Delta^{1,4} \Delta^{1,3} + 110 \Delta^{2,3} \Delta^{1,3} \right) + \\ & + \frac{(f'_i f'''_j + f'''_i f'_j)}{2} \left(- 50 \Delta^{1,3} \Delta^{1,3} \right) + \\ & + f''_i f''_j \left(- 25 \Delta^{1,3} \Delta^{1,3} + 15 \Delta^{1,4} \Delta^{1,2} + 60 \Delta^{2,3} \Delta^{1,2} \right), \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
H_i^{14} := & \left(15 \Delta^{1,5} \Delta^{1,3} \Delta^{1,2} + 75 \Delta^{2,4} \Delta^{1,3} \Delta^{1,2} + 5 \Delta^{1,4} \Delta^{1,3} \Delta^{1,3} + \right. \\
& + 170 \Delta^{2,3} \Delta^{1,3} \Delta^{1,3} - 24 \Delta^{1,4} \Delta^{1,4} \Delta^{1,2} - 192 \Delta^{1,4} \Delta^{2,3} \Delta^{1,2} - \\
& - 384 \Delta^{2,3} \Delta^{2,3} \Delta^{1,2} \Big) f'_i + \left(- 45 \Delta^{1,5} \Delta^{1,2} \Delta^{1,2} - 225 \Delta^{2,4} \Delta^{1,2} \Delta^{1,2} + \right. \\
& + 225 \Delta^{1,4} \Delta^{1,3} \Delta^{1,2} + 450 \Delta^{2,3} \Delta^{1,3} \Delta^{1,2} - 200 \Delta^{1,3} \Delta^{1,3} \Delta^{1,3} \Big) f''_i,
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
F_{i,j}^{16} := & \left(- 3 \Delta^{1,5} \Delta^{1,4} \Delta^{1,2} - 15 \Delta^{2,4} \Delta^{1,4} \Delta^{1,2} - 12 \Delta^{1,5} \Delta^{2,3} \Delta^{1,2} + \right. \\
& + 40 \Delta^{1,5} \Delta^{1,3} \Delta^{1,3} - 60 \Delta^{2,4} \Delta^{2,3} \Delta^{1,2} + 200 \Delta^{2,4} \Delta^{1,3} \Delta^{1,3} - \\
& - 49 \Delta^{1,4} \Delta^{1,4} \Delta^{1,3} - 422 \Delta^{1,4} \Delta^{2,3} \Delta^{1,3} - 904 \Delta^{2,3} \Delta^{2,3} \Delta^{1,3} \Big) f'_i f'_j + \\
& + \left(- 105 \Delta^{1,5} \Delta^{1,3} \Delta^{1,2} - 525 \Delta^{2,4} \Delta^{1,3} \Delta^{1,2} + 205 \Delta^{1,4} \Delta^{1,3} \Delta^{1,3} - \right. \\
& - 230 \Delta^{2,3} \Delta^{1,3} \Delta^{1,3} + 96 \Delta^{1,4} \Delta^{1,4} \Delta^{1,2} + 768 \Delta^{1,4} \Delta^{2,3} \Delta^{1,2} + \\
& + 1536 \Delta^{2,3} \Delta^{2,3} \Delta^{1,2} \Big) (f''_i f'_j + f'_i f''_j) + \\
& + \left(- 200 \Delta^{1,3} \Delta^{1,3} \Delta^{1,3} \right) (f'''_i f'_j + f'_i f'''_j) + \\
& + \left(315 \Delta^{1,5} \Delta^{1,2} \Delta^{1,2} + 1575 \Delta^{2,4} \Delta^{1,2} \Delta^{1,2} - 1575 \Delta^{1,4} \Delta^{1,3} \Delta^{1,2} - \right. \\
& - 3150 \Delta^{2,3} \Delta^{1,3} \Delta^{1,2} + 1400 \Delta^{1,3} \Delta^{1,3} \Delta^{1,3} \Big) f''_i f''_j,
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
X^{18} := & \frac{-5 \Lambda_{1,1,1}^9 M_1^{10} + 56 \Lambda_{1,1}^7 K_{1,1}^{12}}{f'_1} \\
= & f'_1 f'_1 f'_1 \Big(- 18816 \Delta^{1,4} [\Delta^{2,3}]^2 - 25088 [\Delta^{2,3}]^3 - 15 [\Delta^{1,5}]^2 \Delta^{1,2} - 150 \Delta^{1,5} \Delta^{2,4} \Delta^{1,2} \\
& + 315 \Delta^{1,5} \Delta^{1,4} \Delta^{1,3} + 960 \Delta^{1,5} \Delta^{2,3} \Delta^{1,3} - 375 [\Delta^{2,4}]^2 \Delta^{1,2} + 1575 \Delta^{2,4} \Delta^{1,4} \Delta^{1,3} \\
& + 4800 \Delta^{2,4} \Delta^{2,3} \Delta^{1,3} - 392 [\Delta^{1,4}]^3 - 4704 [\Delta^{1,4}]^2 \Delta^{2,3} \Big) - f'_1 f'_1 f''_1 \Big(- 2475 \Delta^{2,4} \Delta^{1,4} \Delta^{1,2} \\
& - 9900 \Delta^{2,4} \Delta^{2,3} \Delta^{1,2} - 2850 \Delta^{1,5} [\Delta^{1,3}]^2 + 51330 \Delta^{1,4} \Delta^{2,3} \Delta^{1,3} \\
& + 92760 [\Delta^{2,3}]^2 \Delta^{1,3} - 14250 \Delta^{2,4} [\Delta^{1,3}]^2 + 7035 [\Delta^{1,4}]^2 \Delta^{1,3} - 495 \Delta^{1,5} \Delta^{1,4} \Delta^{1,2} \\
& - 1980 \Delta^{1,5} \Delta^{2,3} \Delta^{1,2} \Big) - f'_1 f'_1 f'''_1 \Big(- 11100 \Delta^{2,3} [\Delta^{1,3}]^2 - 3150 \Delta^{1,4} [\Delta^{1,3}]^2 \Big) \\
& + f'_1 f''_1 f''_1 \Big(- 109440 [\Delta^{2,3}]^2 \Delta^{1,2} - 19050 \Delta^{2,3} [\Delta^{1,3}]^2 - 32325 \Delta^{1,4} [\Delta^{1,3}]^2 \\
& + 11025 \Delta^{1,5} \Delta^{1,3} \Delta^{1,2} + 55125 \Delta^{2,4} \Delta^{1,3} \Delta^{1,2} - 6840 [\Delta^{1,4}]^2 \Delta^{1,2} \\
& - 54720 \Delta^{1,4} \Delta^{2,3} \Delta^{1,2} \Big) - f'_1 f''_1 f'''_1 \Big(+ 30000 [\Delta^{1,3}]^3 \Big) - f''_1 f''_1 f''_1 \Big(11025 \Delta^{1,5} [\Delta^{1,2}]^2 \\
& - 55125 \Delta^{2,4} [\Delta^{1,2}]^2 + 55125 \Delta^{1,4} \Delta^{1,3} \Delta^{1,2} + 110250 \Delta^{2,3} \Delta^{1,3} \Delta^{1,2} \\
& - 49000 [\Delta^{1,3}]^3 \Big).
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
X^{19} := & \frac{-5 M_1^{10} M_1^{10} + 64 M^8 K_{1,1}^{12}}{f'_1} \\
= & f'_1 \left(1170 \Delta^{1,5} \Delta^{1,4} \Delta^{1,3} \Delta^{1,2} - 45 [\Delta^{1,5}]^2 [\Delta^{1,2}]^2 - 450 \Delta^{1,5} \Delta^{2,4} [\Delta^{1,2}]^2 \right. \\
& + 74220 [\Delta^{2,3}]^2 [\Delta^{1,3}]^2 + 3780 \Delta^{1,5} \Delta^{2,3} \Delta^{1,3} \Delta^{1,2} - 1600 \Delta^{1,5} [\Delta^{1,3}]^3 \\
& - 1125 [\Delta^{2,4}]^2 [\Delta^{1,2}]^2 + 5850 \Delta^{2,4} \Delta^{1,4} \Delta^{1,3} \Delta^{1,2} + 18900 \Delta^{2,4} \Delta^{2,3} \Delta^{1,3} \Delta^{1,2} \\
& - 8000 \Delta^{2,4} [\Delta^{1,3}]^3 - 1344 [\Delta^{1,4}]^3 \Delta^{1,2} - 16128 [\Delta^{1,4}]^2 \Delta^{2,3} \Delta^{1,2} + 1995 [\Delta^{1,4}]^2 [\Delta^{1,3}]^2 \\
& \left. - 64512 \Delta^{1,4} [\Delta^{2,3}]^2 \Delta^{1,2} + 27660 \Delta^{1,4} \Delta^{2,3} [\Delta^{1,3}]^2 - 86016 [\Delta^{2,3}]^3 \Delta^{1,2} \right) \\
& + f''_1 \left(-74400 \Delta^{2,3} [\Delta^{1,3}]^3 - 10800 \Delta^{2,4} \Delta^{1,4} [\Delta^{1,2}]^2 - 2160 \Delta^{1,5} \Delta^{1,4} [\Delta^{1,2}]^2 \right. \\
& - 8640 \Delta^{1,5} \Delta^{2,3} [\Delta^{1,2}]^2 + 3600 \Delta^{1,5} [\Delta^{1,3}]^2 \Delta^{1,2} + 64800 \Delta^{1,4} \Delta^{2,3} \Delta^{1,3} \Delta^{1,2} \\
& - 43200 \Delta^{2,4} \Delta^{2,3} [\Delta^{1,2}]^2 + 18000 \Delta^{2,4} [\Delta^{1,3}]^2 \Delta^{1,2} + 10800 [\Delta^{1,4}]^2 \Delta^{1,3} \Delta^{1,2} \\
& \left. - 27600 \Delta^{1,4} [\Delta^{1,3}]^3 + 86400 [\Delta^{2,3}]^2 \Delta^{1,3} \Delta^{1,2} \right) + f'''_1 \left(16000 [\Delta^{1,3}]^4 \right).
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
X^{21} := & \frac{-5 M_1^{10} N^{12} + 8 M^8 H_1^{14}}{f'_1} \\
= & -135 [\Delta^{1,5}]^2 [\Delta^{1,2}]^3 - 1350 \Delta^{1,5} \Delta^{2,4} [\Delta^{1,2}]^3 + 1350 \Delta^{1,5} \Delta^{1,4} \Delta^{1,3} [\Delta^{1,2}]^2 \\
& + 2700 \Delta^{1,5} \Delta^{2,3} \Delta^{1,3} [\Delta^{1,2}]^2 - 1200 \Delta^{1,5} [\Delta^{1,3}]^3 \Delta^{1,2} - 3375 [\Delta^{2,4}]^2 [\Delta^{1,2}]^3 \\
& + 6750 \Delta^{2,4} \Delta^{1,4} \Delta^{1,3} [\Delta^{1,2}]^2 + 13500 \Delta^{2,4} \Delta^{2,3} \Delta^{1,3} [\Delta^{1,2}]^2 - 6000 \Delta^{2,4} [\Delta^{1,3}]^3 \Delta^{1,2} \\
& - 576 [\Delta^{1,4}]^3 [\Delta^{1,2}]^2 - 6912 [\Delta^{1,4}]^2 \Delta^{2,3} [\Delta^{1,2}]^2 - 495 [\Delta^{1,4}]^2 [\Delta^{1,3}]^2 \Delta^{1,2} \\
& - 27648 \Delta^{1,4} [\Delta^{2,3}]^2 [\Delta^{1,2}]^2 + 9540 \Delta^{1,4} \Delta^{2,3} [\Delta^{1,3}]^2 \Delta^{1,2} + 1200 \Delta^{1,4} [\Delta^{1,3}]^4 \\
& - 36864 [\Delta^{2,3}]^3 [\Delta^{1,2}]^2 + 32580 [\Delta^{2,3}]^2 [\Delta^{1,3}]^2 \Delta^{1,2} - 7200 \Delta^{2,3} [\Delta^{1,3}]^4.
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
X^{23} := & \frac{-7 N^{12} K_{1,1}^{12} + M^8 F_{1,1}^{16}}{f'_1} \\
= & f'_1 \left(432 \Delta^{1,5} [\Delta^{1,4}]^2 [\Delta^{1,2}]^2 + 3456 \Delta^{1,5} \Delta^{1,4} \Delta^{2,3} [\Delta^{1,2}]^2 + 1710 \Delta^{1,5} \Delta^{1,4} [\Delta^{1,3}]^2 \Delta^{1,2} \right. \\
& - 3150 \Delta^{1,5} \Delta^{2,4} \Delta^{1,3} [\Delta^{1,2}]^2 + 540 \Delta^{1,5} \Delta^{2,3} [\Delta^{1,3}]^2 \Delta^{1,2} - 1600 \Delta^{1,5} [\Delta^{1,3}]^4 \\
& - 7875 [\Delta^{2,4}]^2 \Delta^{1,3} [\Delta^{1,2}]^2 + 6912 \Delta^{1,5} [\Delta^{2,3}]^2 [\Delta^{1,2}]^2 - 8000 \Delta^{2,4} [\Delta^{1,3}]^4 \\
& - 2352 [\Delta^{1,4}]^3 \Delta^{1,3} \Delta^{1,2} - 23904 [\Delta^{1,4}]^2 \Delta^{2,3} \Delta^{1,3} \Delta^{1,2} + 2205 [\Delta^{1,4}]^2 [\Delta^{1,3}]^3 \\
& - 78336 \Delta^{1,4} [\Delta^{2,3}]^2 \Delta^{1,3} \Delta^{1,2} + 34740 \Delta^{1,4} \Delta^{2,3} [\Delta^{1,3}]^3 - 81408 [\Delta^{2,3}]^3 \Delta^{1,3} \Delta^{1,2} \\
& + 72180 [\Delta^{2,3}]^2 [\Delta^{1,3}]^3 + 2160 \Delta^{2,4} [\Delta^{1,4}]^2 [\Delta^{1,2}]^2 + 17280 \Delta^{2,4} \Delta^{1,4} \Delta^{2,3} [\Delta^{1,2}]^2 \\
& + 8550 \Delta^{2,4} \Delta^{1,4} [\Delta^{1,3}]^2 \Delta^{1,2} + 34560 \Delta^{2,4} [\Delta^{2,3}]^2 [\Delta^{1,2}]^2 + 2700 \Delta^{2,4} \Delta^{2,3} [\Delta^{1,3}]^2 \Delta^{1,2} \\
& \left. - 315 [\Delta^{1,5}]^2 \Delta^{1,3} [\Delta^{1,2}]^2 \right) + f''_1 \left(23625 [\Delta^{2,4}]^2 [\Delta^{1,2}]^3 - 47250 \Delta^{2,4} \Delta^{1,4} \Delta^{1,3} [\Delta^{1,2}]^2 \right. \\
& - 94500 \Delta^{2,4} \Delta^{2,3} \Delta^{1,3} [\Delta^{1,2}]^2 + 42000 \Delta^{2,4} [\Delta^{1,3}]^3 \Delta^{1,2} + 576 [\Delta^{1,4}]^3 [\Delta^{1,2}]^2 \\
& + 6912 [\Delta^{1,4}]^2 \Delta^{2,3} [\Delta^{1,2}]^2 + 20745 [\Delta^{1,4}]^2 [\Delta^{1,3}]^2 \Delta^{1,2} + 27648 \Delta^{1,4} [\Delta^{2,3}]^2 [\Delta^{1,2}]^2 \\
& + 945 [\Delta^{1,5}]^2 [\Delta^{1,2}]^3 + 9450 \Delta^{1,5} \Delta^{2,4} [\Delta^{1,2}]^3 - 9450 \Delta^{1,5} \Delta^{1,4} \Delta^{1,3} [\Delta^{1,2}]^2 \\
& - 18900 \Delta^{1,5} \Delta^{2,3} \Delta^{1,3} [\Delta^{1,2}]^2 + 8400 \Delta^{1,5} [\Delta^{1,3}]^3 \Delta^{1,2} + 71460 \Delta^{1,4} \Delta^{2,3} [\Delta^{1,3}]^2 \Delta^{1,2} \\
& - 37200 \Delta^{1,4} [\Delta^{1,3}]^4 + 36864 [\Delta^{2,3}]^3 [\Delta^{1,2}]^2 + 48420 [\Delta^{2,3}]^2 [\Delta^{1,3}]^2 \Delta^{1,2} \\
& \left. - 64800 \Delta^{2,3} [\Delta^{1,3}]^4 \right) + f'''_1 \left(16000 [\Delta^{1,3}]^5 \right).
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
Y^{23} := & \frac{-8 N^{12} K_{1,1}^{12} + M_1^{10} H_1^{14}}{f'_1} \\
= & X^{23}.
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
X^{25} := & \frac{-56 K_{1,1}^{12} H_1^{14} + 5 M_1^{10} F_{1,1}^{16}}{f'_1} \\
= & f'_1 f'_1 \left(-45 [\Delta^{1,5}]^2 \Delta^{1,4} [\Delta^{1,2}]^2 - 180 [\Delta^{1,5}]^2 \Delta^{2,3} [\Delta^{1,2}]^2 - 3600 [\Delta^{1,5}]^2 [\Delta^{1,3}]^2 \Delta^{1,2} \right. \\
& - 2800 \Delta^{1,5} \Delta^{1,4} [\Delta^{1,3}]^3 - 83200 \Delta^{1,5} \Delta^{2,3} [\Delta^{1,3}]^3 - 1125 [\Delta^{2,4}]^2 \Delta^{1,4} [\Delta^{1,2}]^2 \\
& - 4500 [\Delta^{2,4}]^2 \Delta^{2,3} [\Delta^{1,2}]^2 - 90000 [\Delta^{2,4}]^2 [\Delta^{1,3}]^2 \Delta^{1,2} - 14000 \Delta^{2,4} \Delta^{1,4} [\Delta^{1,3}]^3 \\
& - 416000 \Delta^{2,4} \Delta^{2,3} [\Delta^{1,3}]^3 - 150528 [\Delta^{1,4}]^3 \Delta^{2,3} \Delta^{1,2} - 903168 [\Delta^{1,4}]^2 [\Delta^{2,3}]^2 \Delta^{1,2} \\
& + 163800 [\Delta^{1,4}]^2 \Delta^{2,3} [\Delta^{1,3}]^2 - 2408448 \Delta^{1,4} [\Delta^{2,3}]^3 \Delta^{1,2} + 1129500 \Delta^{1,4} [\Delta^{2,3}]^2 [\Delta^{1,3}]^2 \\
& - 9408 [\Delta^{1,4}]^4 \Delta^{1,2} + 3675 [\Delta^{1,4}]^3 [\Delta^{1,3}]^2 - 2408448 [\Delta^{2,3}]^4 \Delta^{1,2} + 2132400 [\Delta^{2,3}]^3 [\Delta^{1,3}]^2 \\
& - 450 \Delta^{1,5} \Delta^{2,4} \Delta^{1,4} [\Delta^{1,2}]^2 - 1800 \Delta^{1,5} \Delta^{2,4} \Delta^{2,3} [\Delta^{1,2}]^2 \\
& - 36000 \Delta^{1,5} \Delta^{2,4} [\Delta^{1,3}]^2 \Delta^{1,2} + 11970 \Delta^{1,5} [\Delta^{1,4}]^2 \Delta^{1,3} \Delta^{1,2} \\
& + 187920 \Delta^{1,5} [\Delta^{2,3}]^2 \Delta^{1,3} \Delta^{1,2} + 59850 \Delta^{2,4} [\Delta^{1,4}]^2 \Delta^{1,3} \Delta^{1,2} \\
& + 939600 \Delta^{2,4} [\Delta^{2,3}]^2 \Delta^{1,3} \Delta^{1,2} + 474300 \Delta^{2,4} \Delta^{1,4} \Delta^{2,3} \Delta^{1,3} \Delta^{1,2} \\
& + 94860 \Delta^{1,5} \Delta^{1,4} \Delta^{2,3} \Delta^{1,3} \Delta^{1,2} \Big) + f'_1 f''_1 \left(-2556600 \Delta^{1,4} \Delta^{2,3} [\Delta^{1,3}]^3 \right. \\
& - 5014200 [\Delta^{2,3}]^2 [\Delta^{1,3}]^3 - 187950 [\Delta^{1,4}]^2 [\Delta^{1,3}]^3 + 5621760 \Delta^{1,4} [\Delta^{2,3}]^2 \Delta^{1,3} \Delta^{1,2} \\
& + 5652480 [\Delta^{2,3}]^3 \Delta^{1,3} \Delta^{1,2} - 2764800 \Delta^{2,4} [\Delta^{2,3}]^2 [\Delta^{1,2}]^2 \\
& + 99000 \Delta^{2,4} \Delta^{2,3} [\Delta^{1,3}]^2 \Delta^{1,2} + 500000 \Delta^{2,4} [\Delta^{1,3}]^4 + 174720 [\Delta^{1,4}]^3 \Delta^{1,3} \Delta^{1,2} \\
& + 1751040 [\Delta^{1,4}]^2 \Delta^{2,3} \Delta^{1,3} \Delta^{1,2} - 276480 \Delta^{1,5} \Delta^{1,4} \Delta^{2,3} [\Delta^{1,2}]^2 \\
& - 105300 \Delta^{1,5} \Delta^{1,4} [\Delta^{1,3}]^2 \Delta^{1,2} - 552960 \Delta^{1,5} [\Delta^{2,3}]^2 [\Delta^{1,2}]^2 \\
& + 19800 \Delta^{1,5} \Delta^{2,3} [\Delta^{1,3}]^2 \Delta^{1,2} + 100000 \Delta^{1,5} [\Delta^{1,3}]^4 + 551250 [\Delta^{2,4}]^2 \Delta^{1,3} [\Delta^{1,2}]^2 \\
& - 172800 \Delta^{2,4} [\Delta^{1,4}]^2 [\Delta^{1,2}]^2 - 1382400 \Delta^{2,4} \Delta^{1,4} \Delta^{2,3} [\Delta^{1,2}]^2 \\
& - 526500 \Delta^{2,4} \Delta^{1,4} [\Delta^{1,3}]^2 \Delta^{1,2} - 34560 \Delta^{1,5} [\Delta^{1,4}]^2 [\Delta^{1,2}]^2 + 22050 [\Delta^{1,5}]^2 \Delta^{1,3} [\Delta^{1,2}]^2 \\
& + 220500 \Delta^{1,5} \Delta^{2,4} \Delta^{1,3} [\Delta^{1,2}]^2 \Big) \\
& + f'_1 f'''_1 \left(28000 \Delta^{1,4} [\Delta^{1,3}]^4 + 472000 \Delta^{2,3} [\Delta^{1,3}]^4 \right) \\
& + f''_1 f''_1 \left(330750 \Delta^{1,5} \Delta^{1,4} \Delta^{1,3} [\Delta^{1,2}]^2 + 661500 \Delta^{1,5} \Delta^{2,3} \Delta^{1,3} [\Delta^{1,2}]^2 \right. \\
& - 294000 \Delta^{1,5} [\Delta^{1,3}]^3 \Delta^{1,2} - 330750 \Delta^{1,5} \Delta^{2,4} [\Delta^{1,2}]^3 \\
& + 1653750 \Delta^{2,4} \Delta^{1,4} \Delta^{1,3} [\Delta^{1,2}]^2 + 3307500 \Delta^{2,4} \Delta^{2,3} \Delta^{1,3} [\Delta^{1,2}]^2 \\
& - 1470000 \Delta^{2,4} [\Delta^{1,3}]^3 \Delta^{1,2} - 2880 [\Delta^{1,4}]^3 [\Delta^{1,2}]^2 - 34560 [\Delta^{1,4}]^2 \Delta^{2,3} [\Delta^{1,2}]^2 \\
& - 812475 [\Delta^{1,4}]^2 [\Delta^{1,3}]^2 \Delta^{1,2} - 138240 \Delta^{1,4} [\Delta^{2,3}]^2 [\Delta^{1,2}]^2 - 33075 [\Delta^{1,5}]^2 [\Delta^{1,2}]^3 \\
& + 1446000 \Delta^{1,4} [\Delta^{1,3}]^4 - 184320 [\Delta^{2,3}]^3 \Delta^{1,2} - 3077100 [\Delta^{2,3}]^2 [\Delta^{1,3}]^2 \Delta^{1,2} \\
& + 2844000 \Delta^{2,3} [\Delta^{1,3}]^4 - 826875 [\Delta^{2,4}]^2 [\Delta^{1,2}]^3 - 3192300 \Delta^{1,4} \Delta^{2,3} [\Delta^{1,3}]^2 \Delta^{1,2} \Big) \\
& + f''_1 f'''_1 \left(-640000 [\Delta^{1,3}]^5 \right).
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
Y^{27} := & \frac{-56 K_{1,1}^{12} F_{1,1}^{16} + M_1^{10} X^{18}}{f'_1} \\
= & f'_1 f'_1 f'_1 \left(572820 \Delta'^{1,5} [\Delta'^{1,4}]^2 [\Delta'^{1,3}]^2 - 5343744 \Delta'^{1,5} [\Delta'^{1,4}]^3 \Delta'^{1,3} - 752640 \Delta'^{1,5} [\Delta'^{1,4}]^3 \Delta'^{1,2} - \right. \\
& - 286944 [\Delta'^{1,5}]^3 \Delta'^{1,4} \Delta'^{1,3} + 2864100 \Delta'^{1,5} [\Delta'^{1,4}]^2 [\Delta'^{1,3}]^2 - 1862784 [\Delta'^{1,5}]^2 [\Delta'^{1,4}]^2 \Delta'^{1,3} + \\
& + 27195 \Delta'^{1,5} [\Delta'^{1,4}]^2 [\Delta'^{1,3}]^2 - 112000 \Delta'^{1,5} \Delta'^{1,4} [\Delta'^{1,3}]^3 - 150528 \Delta'^{1,5} [\Delta'^{1,4}]^3 \Delta'^{1,2} - \\
& - 2352 \Delta'^{1,5} [\Delta'^{1,4}]^3 \Delta'^{1,2} + 135975 \Delta'^{1,5} [\Delta'^{1,4}]^2 [\Delta'^{1,3}]^2 - 11760 \Delta'^{1,5} [\Delta'^{1,4}]^3 \Delta'^{1,1} - \\
& - 3375 \Delta'^{1,5} [\Delta'^{1,4}]^2 [\Delta'^{1,3}]^2 - 675 [\Delta'^{1,5}]^2 \Delta'^{1,4} [\Delta'^{1,3}]^2 - 45 [\Delta'^{1,5}]^3 [\Delta'^{1,3}]^2 - \\
& - 11200 [\Delta'^{1,5}]^2 [\Delta'^{1,4}]^3 - 5625 [\Delta'^{1,5}]^3 [\Delta'^{1,4}]^2 - 280000 [\Delta'^{1,5}]^2 [\Delta'^{1,4}]^3 - \\
& - 16464 [\Delta'^{1,5}]^4 \Delta'^{1,3} - 5720064 [\Delta'^{1,5}]^4 \Delta'^{1,2} + 1890 [\Delta'^{1,5}]^4 \Delta'^{1,3} \Delta'^{1,2} \Delta'^{1,1} + \\
& + 6210 [\Delta'^{1,5}]^2 \Delta'^{1,4} \Delta'^{1,3} \Delta'^{1,2} - 28224 \Delta'^{1,5} [\Delta'^{1,4}]^2 \Delta'^{1,3} \Delta'^{1,2} - 112896 \Delta'^{1,5} \Delta'^{1,4} [\Delta'^{1,3}]^2 \Delta'^{1,2} + \\
& + 255360 \Delta'^{1,5} \Delta'^{1,4} \Delta'^{1,3} [\Delta'^{1,2}]^2 + 47250 [\Delta'^{1,5}]^2 \Delta'^{1,4} \Delta'^{1,3} \Delta'^{1,2} + 155250 [\Delta'^{1,5}]^2 \Delta'^{1,3} \Delta'^{1,2} \Delta'^{1,1} - \\
& - 141120 \Delta'^{1,5} [\Delta'^{1,4}]^2 \Delta'^{1,3} \Delta'^{1,2} - 564480 \Delta'^{1,5} \Delta'^{1,4} [\Delta'^{1,3}]^2 \Delta'^{1,2} + 1276800 \Delta'^{1,5} \Delta'^{1,4} \Delta'^{1,3} [\Delta'^{1,2}]^2 + \\
& + 18900 \Delta'^{1,5} \Delta'^{1,4} \Delta'^{1,3} \Delta'^{1,2} \Delta'^{1,1} + 62100 \Delta'^{1,5} \Delta'^{1,4} \Delta'^{1,3} \Delta'^{1,1} \Big)
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
& + \left(\left(-36450 \Delta'^{''''} \Delta^{''''} \Delta'^{''''} \Delta'^{''''} [\Delta'^{''''}]^2 - 145800 \Delta'^{''''} \Delta^{''''} \Delta'^{''''} [\Delta'^{''''}]^2 + 832500 \Delta'^{''''} [\Delta'^{''''}]^2 \Delta'^{'''} - \right. \right. \\
& - 149310 \Delta'^{''''} [\Delta'^{''''}]^2 - 2680560 \Delta'^{''''} [\Delta'^{''''}]^2 \Delta'^{'''} \Delta'^{'''} - 746550 \Delta'^{''''} [\Delta'^{''''}]^2 \Delta'^{'''} \Delta'^{'''} - \\
& - 13402800 \Delta^{''''} [\Delta'^{''''}]^2 \Delta'^{'''} \Delta'^{'''} - 3645 [\Delta'^{''''}]^2 \Delta'^{''''} [\Delta'^{''''}]^2 - 14580 [\Delta'^{''''}]^2 \Delta'^{''''} [\Delta'^{''''}]^2 + \\
& + 83250 [\Delta'^{''''}]^2 [\Delta'^{''''}]^2 \Delta'^{'''} - 245700 \Delta'^{''''} \Delta'^{''''} [\Delta'^{''''}]^3 + 682200 \Delta'^{''''} \Delta'^{''''} [\Delta'^{''''}]^3 - \\
& - 91125 [\Delta'^{''''}]^2 \Delta'^{''''} [\Delta'^{''''}]^2 - 364500 [\Delta'^{''''}]^2 \Delta'^{''''} [\Delta'^{''''}]^2 + 2081250 [\Delta'^{''''}]^2 [\Delta'^{''''}]^2 \Delta'^{'''} - \\
& - 1228500 \Delta^{''''} \Delta'^{''''} [\Delta'^{''''}]^3 + 3411000 \Delta^{''''} \Delta'^{''''} [\Delta'^{''''}]^3 + 1354752 [\Delta'^{''''}]^3 \Delta'^{''''} \Delta'^{'''} + \\
& + 8128512 [\Delta'^{''''}]^2 [\Delta'^{''''}]^2 \Delta'^{'''} + 1796760 [\Delta'^{''''}]^2 \Delta'^{''''} [\Delta'^{''''}]^2 + 21676032 \Delta'^{''''} [\Delta'^{''''}]^3 \Delta'^{'''} + \\
& + 850140 \Delta'^{''''} [\Delta'^{''''}]^2 [\Delta'^{''''}]^2 + 84672 [\Delta'^{''''}]^4 \Delta'^{'''} + 274155 [\Delta'^{''''}]^3 [\Delta'^{''''}]^2 + \\
& + 21676032 [\Delta'^{''''}]^4 \Delta'^{'''} - 7801680 [\Delta'^{''''}]^3 [\Delta'^{''''}]^2 - 6336900 \Delta^{''''} \Delta'^{''''} \Delta'^{''''} \Delta'^{'''} \Delta'^{'''} - \\
& \left. \left. - 1267380 \Delta'^{''''} \Delta'^{''''} \Delta'^{''''} \Delta'^{''''} \Delta'^{'''} \right) f_1'' + \right. \\
& + \left(1120000 \Delta^{''''} [\Delta'^{''''}]^4 - 5062200 [\Delta'^{''''}]^2 [\Delta'^{''''}]^3 + 224000 \Delta'^{''''} [\Delta'^{''''}]^4 - \right. \\
& - 271950 [\Delta'^{''''}]^2 [\Delta'^{''''}]^3 - 2364600 \Delta'^{''''} \Delta'^{''''} [\Delta'^{''''}]^3 \right) f_1' f_1' + \\
& + \left(\left(34044300 [\Delta'^{''''}]^2 [\Delta'^{''''}]^3 + 108675 [\Delta'^{''''}]^2 [\Delta'^{''''}]^3 - 231525 [\Delta'^{''''}]^2 \Delta'^{''''} [\Delta'^{''''}]^2 + \right. \right. \\
& + 278640 \Delta'^{''''} [\Delta'^{''''}]^2 [\Delta'^{''''}]^2 + 4458240 \Delta'^{''''} [\Delta'^{''''}]^2 [\Delta'^{''''}]^2 - 5788125 [\Delta'^{''''}]^2 \Delta'^{''''} [\Delta'^{''''}]^2 + \\
& + 1393200 \Delta^{''''} [\Delta'^{''''}]^2 [\Delta'^{''''}]^2 + 22291200 \Delta^{''''} [\Delta'^{''''}]^2 [\Delta'^{''''}]^2 - 1396080 [\Delta'^{''''}]^3 \Delta'^{''''} \Delta'^{'''} + \\
& + 14733900 \Delta'^{''''} \Delta'^{''''} [\Delta'^{''''}]^3 - 44766720 [\Delta'^{''''}]^3 \Delta'^{''''} \Delta'^{'''} - 1284000 \Delta'^{''''} [\Delta'^{''''}]^4 - \\
& - 6420000 \Delta^{''''} [\Delta'^{''''}]^4 - 2315250 \Delta'^{''''} \Delta'^{''''} \Delta'^{''''} [\Delta'^{''''}]^2 + 2229120 \Delta'^{''''} \Delta'^{''''} \Delta'^{''''} [\Delta'^{''''}]^2 + \\
& + 1386450 \Delta'^{''''} \Delta'^{''''} [\Delta'^{''''}]^2 \Delta'^{'''} + 915300 \Delta'^{''''} \Delta'^{''''} [\Delta'^{''''}]^2 \Delta'^{'''} + 11145600 \Delta'^{''''} \Delta'^{''''} \Delta'^{''''} [\Delta'^{''''}]^2 + \\
& + 6932250 \Delta'^{''''} \Delta'^{''''} [\Delta'^{''''}]^2 \Delta'^{'''} + 4576500 \Delta'^{''''} \Delta'^{''''} [\Delta'^{''''}]^2 \Delta'^{'''} - 13966560 [\Delta'^{''''}]^2 \Delta'^{''''} \Delta'^{''''} \Delta'^{'''} - \\
& - 44720640 \Delta'^{''''} [\Delta'^{''''}]^2 \Delta'^{''''} \Delta'^{'''} \right) f_1'' f_1'' + \left(2268000 \Delta'^{''''} [\Delta'^{''''}]^4 + 792000 \Delta'^{''''} [\Delta'^{''''}]^4 \right) f_1'' f_1''' - \\
& \left. \left. - 1120000 [\Delta'^{''''}]^5 f_1''' f_1''' \right) f_1' + \right. \\
& + \left(-4630500 \Delta'^{''''} \Delta'^{''''} \Delta'^{''''} [\Delta'^{''''}]^2 + 2058000 \Delta'^{''''} [\Delta'^{''''}]^3 \Delta'^{'''} - 11576250 \Delta'^{''''} \Delta'^{''''} \Delta'^{''''} [\Delta'^{''''}]^2 - \right. \\
& - 23152500 \Delta'^{''''} \Delta'^{''''} \Delta'^{''''} [\Delta'^{''''}]^2 + 10290000 \Delta'^{''''} [\Delta'^{''''}]^3 \Delta'^{'''} + 2880 [\Delta'^{''''}]^3 [\Delta'^{''''}]^2 + \\
& + 34560 [\Delta'^{''''}]^2 \Delta'^{''''} [\Delta'^{''''}]^2 + 5773725 [\Delta'^{''''}]^2 [\Delta'^{''''}]^2 \Delta'^{'''} + 138240 \Delta'^{''''} [\Delta'^{''''}]^2 [\Delta'^{''''}]^2 + \\
& + 231525 [\Delta'^{''''}]^2 [\Delta'^{''''}]^3 + 2315250 \Delta'^{''''} \Delta'^{''''} [\Delta'^{''''}]^3 - 2315250 \Delta'^{''''} \Delta'^{''''} \Delta'^{''''} [\Delta'^{''''}]^2 + \\
& + 22922100 [\Delta'^{''''}]^2 [\Delta'^{''''}]^2 \Delta'^{'''} - 20484000 \Delta'^{''''} [\Delta'^{''''}]^4 + 5788125 [\Delta'^{''''}]^2 [\Delta'^{''''}]^3 - \\
& - 10266000 \Delta'^{''''} [\Delta'^{''''}]^4 + 184320 [\Delta'^{''''}]^3 [\Delta'^{''''}]^2 + 23037300 \Delta'^{''''} \Delta'^{''''} [\Delta'^{''''}]^2 \Delta'^{'''} + \\
& + 4560000 [\Delta'^{''''}]^5 f_1'' f_1'' f_1''.
\end{aligned}$$

VIII – Algorithme général

- Jets d'ordre $\kappa = 4$ en dimension $n = 2$:

Theorem. (M. 2007) En dimension **2** pour des jets d'ordre **4**, tout bi-invariant s'écrit de manière unique :

$$Q(f'_1, \Lambda^3, \Lambda_{1,1}^7, M^8) + \Lambda_1^5 R(f'_1, \Lambda^3, \Lambda_{1,1}^7, M^8),$$

où **Q** et **R** sont des polynômes arbitraires de poids **m** et $m - 5$ et où les **5** bi-invariants fondamentaux :

$$(f'_1 \quad \Lambda^3 \quad \Lambda_1^5 \quad \Lambda_{1,1}^7 \quad M^8),$$

sont explicitement définis par :

$$\boxed{\begin{aligned} f'_1 \\ \Lambda^3 &:= \Delta^{1,2} \\ \Lambda_1^5 &:= \Delta^{1,3} f'_1 - 3 \Delta^{1,2} f''_1 \\ \Lambda_{1,1}^7 &:= \Delta^{1,4} f'_1 f'_1 + 4 \Delta^{2,3} f'_1 f'_1 - 10 \Delta^{1,3} f'_1 f''_1 + \\ &\quad + 15 \Delta^{1,2} f''_1 f''_1 \\ M^8 &:= 3 \Delta^{1,4} \Delta^{1,2} + 12 \Delta^{2,3} \Delta^{1,2} - 5 \Delta^{1,3} \Delta^{1,3} \end{aligned}}.$$

De plus l'idéal des relations entre ces cinq bi-invariants est principal, engendré par l'unique syzygie :

$$0 \equiv f'_1 f'_1 M^8 - 3 \Lambda^3 \Lambda_{1,1}^7 + 5 \Lambda_1^5 \Lambda_1^5.$$

- Premiers éléments de démonstration :

• Appliquer la définition :

$$\mathsf{P}(j^4(f \circ \phi)) = \phi'^m \mathsf{P}((j^4 f) \circ \phi),$$

à $\phi := f_1^{-1}$ et obtenir des formules intéressantes :

$$(f_2 \circ f_1^{-1})' = \frac{f'_2}{f'_1} \circ f_1^{-1},$$

$$(f_2 \circ f_1^{-1})'' = \frac{\Lambda^3}{(f'_1)^3} \circ f_1^{-1},$$

$$(f_2 \circ f_1^{-1})''' = \frac{\Lambda_1^5}{(f'_1)^5} \circ f_1^{-1},$$

$$(f_2 \circ f_1^{-1})'''' = \frac{\Lambda_{1,1}^7}{(f'_1)^7} \circ f_1^{-1},$$

d'où :

$$\begin{aligned} \mathsf{P}\left(1, \frac{f'_2}{f'_1}, 0, \frac{\Lambda^3}{(f'_1)^3}, 0, \frac{\Lambda_1^5}{(f'_1)^5}, 0, \frac{\Lambda_{1,1}^7}{(f'_1)^7}\right) \circ f_1^{-1} = \\ = \left(\frac{1}{f'_1} \circ f_1^{-1}\right)^m \mathsf{P}((j^4 f \circ f_1^{-1})). \end{aligned}$$

Reparamétriser par f_1 et simplifier :

$$\boxed{\mathsf{P}(j^4 f) = \sum_{-\frac{3}{4}m \leq a \leq m} (f'_1)^a \mathsf{P}_a(f'_2, \Lambda^3, \Lambda_1^5, \Lambda_{1,1}^7).}$$

△ **Problème** : il y a des puissances possiblement **négatives** de f'_1 .

? **Pourquoi** ? Ce devrait être un polynôme !

?

Comment éliminer ces puissances négatives ?

- Invariance unipotente :

$$\textcolor{violet}{u} \cdot f'_2 = f'_2 + \textcolor{violet}{u} f'_1,$$

$$\textcolor{violet}{u} \cdot \Lambda^3 = \Lambda^3, \quad \textcolor{violet}{u} \cdot \Lambda_1^5 = \Lambda_1^5, \quad \textcolor{violet}{u} \cdot \Lambda_{1,1}^7 = \Lambda_{1,1}^7,$$

donc chaque P_a est en fait **indépendant** de f'_2 , et en conclusion, notre représentation d'un polynôme **bi-invariant** devient :

$$P(j^4 f) = \sum_{-\frac{3}{4}m \leq a \leq m} (f'_1)^a P_a(\Lambda^3, \Lambda_1^5, \Lambda_{1,1}^7).$$

- Les puissances négatives de f'_1 sont inévitables et leur présence est nécessaire.

- En effet, par exemple : Rappelons l'unique syzygie énoncée par le théorème pour $\kappa = 4$:

$$0 \equiv f'_1 f'_1 M^8 - 3 \Lambda^3 \Lambda_{1,1}^7 + 5 \Lambda_1^5 \Lambda_1^5.$$

Nous pouvons résoudre le bi-invariant M^8 sous la forme :

$$M^8 = \frac{3 \Lambda^3 \Lambda_{1,1}^7 - 5 \Lambda_1^5 \Lambda_1^5}{f'_1 f'_1}$$

et alors il y a une puissance négative de f'_1 .

Plan pour l'étude des jets de Demailly jets

- Généraliser immédiatement l'expression rationnelle :

$$\sum_{-\frac{\kappa-1}{\kappa}m \leq a \leq m} (f'_1)^a P_a(\Lambda^3, \Lambda_1^5, \Lambda_{1,1}^7, \Lambda_{1,1,1}^9, \dots, \Lambda_{1,\dots,1}^{2\kappa-1}).$$

- Illustrer l'algorithme pour $n = 2$ et $\kappa = 5$.

- Départ :

$$\sum_{-\frac{4}{5}m \leq a \leq m} (f'_1)^a P_a(\Lambda^3, \Lambda_1^5, \Lambda_{1,1}^7, \Lambda_{1,1,1}^9).$$

- Calculer l'Idéal des Relations entre les bi-invariants restreints à $\{f'_1 = 0\}$:

$$\text{Ideal-Rel}\left(\Lambda^3|_0, \Lambda^5|_0, \Lambda^7|_0, \Lambda^9|_0\right),$$

c'est-à-dire un ensemble générateur de l'idéal de tous les polynômes en quatre variables qui, après substitution de ces invariants restreints, donne zéro identiquement.

□ Obtenir les trois relations, valables pour $f'_1 = 0$:

$$0 \equiv -5\Lambda^5\Lambda^5 + 3\Lambda^3\Lambda^7 \Big|_0,$$

$$0 \equiv -7\Lambda^5\Lambda^7 + 3\Lambda^3\Lambda^9 \Big|_0,$$

$$0 \equiv -7\Lambda^7\Lambda^7 + 5\Lambda^5\Lambda^9 \Big|_0.$$

□ Donc sans poser $f'_1 = 0$, il doit y avoir des restes qui sont multiples de f'_1 :

$$0 \equiv -5\Lambda^5\Lambda^5 + 3\Lambda^3\Lambda^7 + f'_1 \times \text{reste},$$

$$0 \equiv -7\Lambda^5\Lambda^7 + 3\Lambda^3\Lambda^9 + f'_1 \times \text{reste},$$

$$0 \equiv -7\Lambda^7\Lambda^7 + 5\Lambda^5\Lambda^9 + f'_1 \times \text{reste}.$$

□ Chaque reste est aussi nécessairement un bi-invariant.

□ Chercher la puissance maximale de f'_1 qui factorise chaque reste.

□ Obtenir les trois expressions :

$$0 \equiv -5\Lambda^5\Lambda^5 + 3\Lambda^3\Lambda^7 + f'_1 f'_1 M^8,$$

$$0 \equiv -7\Lambda^5\Lambda^7 + 3\Lambda^3\Lambda^9 + f'_1 f'_1 M^{10},$$

$$0 \equiv -7\Lambda^7\Lambda^7 + 5\Lambda^5\Lambda^9 + f'_1 f'_1 K^{12}.$$

Tester si les trois bi-invariants obtenus :

$$M^8$$

$$M^{10}$$

$$K^{12}$$

appartiennent ou n'appartiennent pas à l'algèbre engendrée par les bi-invariants connus jusqu'à présent :

$$f'_1$$

$$\Lambda^3$$

$$\Lambda^5$$

$$\Lambda^7$$

$$\Lambda^9$$

Ici : aucun de ces 8 bi-invariants n'est égal à un certain polynôme en les 7 autres bi-invariants.

Autrement dit : tous ces 8 bi-invariants sont mutuellement indépendants.

Recommencer alors le procédé avec ces 8 bi-invariants.

Calculer l'Idéal des Relations entre ces bi-invariants restreints à $\{f'_1 = 0\}$:

$$\text{Ideal-Rel}\left(\Lambda^3|_0, \Lambda^5|_0, \Lambda^7|_0, \Lambda^9|_0, M^8|_0, M^{10}|_0, K^{12}|_0\right)$$

□ Obtenir les **10** relations, valables pour $f'_1 = 0$:

$$0 \equiv -5\Lambda^5\Lambda^5 + 3\Lambda^3\Lambda^7 \Big|_0$$

$$0 \equiv -7\Lambda^5\Lambda^7 + 3\Lambda^3\Lambda^9 \Big|_0$$

$$0 \equiv -7\Lambda^7\Lambda^7 + 5\Lambda^5\Lambda^9 \Big|_0$$

$$0 \equiv -8\Lambda^5M^8 + 3\Lambda^3M^{10} \Big|_0$$

$$0 \equiv -\Lambda^7M^8 + 3\Lambda^3K^{12} \Big|_0$$

$$0 \equiv -8\Lambda^7M^8 + 5\Lambda^5M^{10} \Big|_0$$

$$0 \equiv -\Lambda^9M^8 + 7\Lambda^5K^{12} \Big|_0$$

$$0 \equiv -8\Lambda^9M^8 + 7\Lambda^7M^{10} \Big|_0$$

$$0 \equiv -5\Lambda^9M^{10} + 56\Lambda^7K^{12} \Big|_0$$

$$0 \equiv -5M^{10}M^{10} + 64M^8K^{12} \Big|_0$$

□ Calculer avec soin les restes situés derrière f'_1 :

$$0 \equiv -5\Lambda^5\Lambda^5 + 3\Lambda^3\Lambda^7 - f'_1 f'_1 M^8$$

$$0 \equiv -7\Lambda^5\Lambda^7 + 3\Lambda^3\Lambda^9 - f'_1 f'_1 M^{10}$$

$$0 \equiv -7\Lambda^7\Lambda^7 + 5\Lambda^5\Lambda^9 - f'_1 f'_1 K^{12}$$

$$0 \equiv -8\Lambda^5M^8 + 3\Lambda^3M^{10} - f'_1 N^{12}$$

$$0 \equiv -\Lambda^7M^8 + 3\Lambda^3K^{12} - f'_1 H^{14}$$

$$0 \equiv -8\Lambda^7M^8 + 5\Lambda^5M^{10} - f'_1 H^{14}$$

$$0 \equiv -\Lambda^9M^8 + 7\Lambda^5K^{12} - f'_1 F^{16}$$

$$0 \equiv -8\Lambda^9M^8 + 7\Lambda^7M^{10} - f'_1 F^{16}$$

$$0 \equiv -5\Lambda^9M^{10} + 56\Lambda^7K^{12} - f'_1 X^{18}$$

$$0 \equiv -5M^{10}M^{10} + 64M^8K^{12} - f'_1 X^{19}$$

□ Convention : En bleu, les nouveaux bi-invariants et en vert, les bi-invariants déjà connus ; en rouge, notifier le reste $+0$ s'il s'avère être identiquement nul.

□ En somme : 5 nouveaux bi-invariants, tous mutuellement indépendants quand on ajoute les 8 bi-invariants qui étaient déjà connus.

□ Recommencer le procéder avec les 13 bi-invariants en question.

- Calculer l'Idéal des Relations entre ces treize bi-invariants restreints à $\{f'_1 = 0\}$:

$$\text{Id-Rel} \left(\begin{array}{c} \Lambda^3|_0, \quad \Lambda^5|_0, \quad \Lambda^7|_0, \quad \Lambda^7|_0, \quad M^8|_0, \quad M^{10}|_0, \quad K^{12}|_0 \\ N^{12}|_0, \quad H^{14}|_0, \quad F^{16}|_0, \quad X^{18}|_0, \quad X^{19}|_0 \end{array} \right)$$

- Utiliser le meilleur paquetage de bases de Gröbner.

- Obtenir **32 équations**, donc seulement **22** qui sont nouvelles :

$$0 \equiv -5 F^{16}F^{16} + H^{14}X^{18} - f'_1 K^{12}X^{19}$$

$$0 \equiv -7 H^{14}F^{16} + N^{12}X^{18} - f'_1 M^{10}X^{19}$$

$$0 \equiv -7 H^{14}H^{14} + 5 N^{12}F^{16} - f'_1 M^8X^{19}$$

$$0 \equiv -56 K^{12}F^{16} + M^{10}X^{18} - f'_1 Y^{27}$$

$$0 \equiv -56 K^{12}H^{14} + 5 M^{10}F^{16} - f'_1 X^{25}$$

$$0 \equiv -8 K^{12}N^{12} + M^{10}H^{14} - f'_1 X^{23}$$

$$0 \equiv -49 K^{12}H^{14} + M^8X^{18} - f'_1 X^{25}$$

$$0 \equiv -7 K^{12}N^{12} + M^8F^{16} - f'_1 X^{23}$$

$$0 \equiv -5 M^{10}N^{12} + 8 M^8H^{14} - f'_1 X^{21}$$

$$0 \equiv -48 K^{12}F^{16} + \Lambda^9X^{19} - f'_1 Y^{27}$$

$$0 \equiv -48 K^{12} H^{14} + \Lambda^7 X^{19} - f'_1 X^{25}$$

$$0 \equiv -5 \Lambda^9 F^{16} + \Lambda^7 X^{18} + 8 f'_1 K^{12} K^{12}$$

$$0 \equiv -\Lambda^9 H^{14} + \Lambda^7 F^{16} + f'_1 M^{10} K^{12}$$

$$0 \equiv -5 \Lambda^9 N^{12} + 7 \Lambda^7 H^{14} + 56 f'_1 M^8 K^{12} - f'_1 f'_1 X^{19}$$

$$0 \equiv -48 K^{12} N^{12} + \Lambda^5 X^{19} - 7 f'_1 X^{23}$$

$$0 \equiv -7 \Lambda^9 H^{14} + \Lambda^5 X^{18} + 8 f'_1 M^{10} K^{12}$$

$$0 \equiv -\Lambda^9 N^{12} + \Lambda^5 F^{16} + f'_1 M^{10} M^{10}$$

$$0 \equiv -\Lambda^7 N^{12} + \Lambda^5 H^{14} + f'_1 M^8 M^{10}$$

$$0 \equiv -10 M^{10} N^{12} + \Lambda^3 X^{19} - \frac{7}{3} f'_1 X^{21}$$

$$0 \equiv -35 \Lambda^9 N^{12} + 3 \Lambda^3 X^{18} - \frac{285}{8} f'_1 M^{10} M^{10} - \frac{7}{8} f'_1 f'_1 X^{19}$$

$$0 \equiv -7 \Lambda^7 N^{12} + 3 \Lambda^3 F^{16} + 8 f'_1 M^8 M^{10}$$

$$0 \equiv -5 \Lambda^5 N^{12} + 3 \Lambda^3 H^{14} + 8 f'_1 M^8 M^8$$

□ En bleu : 4 nouveaux bi-invariants :

X^{21}	X^{23}	X^{25}	Y^{27}
----------	----------	----------	----------

- Calculer l'Idéal des Relations entre ces **17** bi-invariants restreints à $\{f'_1 = 0\}$:

$$\text{Id-Rel} \left(\begin{array}{c} \Lambda^3|_0, \Lambda^5|_0, \Lambda^7|_0, M^8|_0, M^{10}|_0, K^{12}|_0 \\ N^{12}|_0, H^{14}|_0, F^{16}|_0, X^{18}|_0, X^{19}|_0, \\ X^{21}|_0, X^{23}|_0, X^{25}|_0, Y^{27}|_0 \end{array} \right)$$

- Pour cette étape : Paquetage de bases de Gröbner spécial **FGb** (Spiral Team, J.-C. Faugère, LIP6).
- Les paquetages standard de bases de Gröbner étaient déjà **incapables** de fournir l'idéal des relations à l'étape précédente.
- Obtenir **105** relations.
- **66** parmi ces **105** relations engendrent l'idéal.
- **Aucun nouveau bi-invariant n'apparaît à cette étape.**

$$0 \equiv X^{18}X^{23} - 8F^{16}X^{25} + 7H^{14}Y^{27} + 0,$$

$$0 \equiv 5F^{16}X^{23} - 8H^{14}X^{25} + 5N^{12}Y^{27} + f'_1 X^{19}X^{19},$$

$$0 \equiv 7K^{12}X^{23} - M^{10}X^{25} + M^8Y^{27} + 0,$$

$$0 \equiv 5\Lambda^9X^{23} - 8\Lambda^7X^{25} + 5\Lambda^5Y^{27} - 8f'_1 K^{12}X^{19},$$

$$0 \equiv 7\Lambda^7X^{23} - 8\Lambda^5X^{25} + 3\Lambda^3Y^{27} - f'_1 M^{10}X^{19},$$

$$0 \equiv X^{18}X^{21} - 57H^{14}X^{25} + 40N^{12}Y^{27} + 7f'_1 X^{19}X^{19},$$

$$\begin{aligned}
0 &\equiv F^{16}X^{21} - 8H^{14}X^{23} + N^{12}X^{25} \textcolor{red}{+0}, \\
0 &\equiv 7K^{12}X^{21} - 5M^{10}X^{23} + M^8X^{25} \textcolor{red}{+0}, \\
0 &\equiv 7\Lambda^9X^{21} - 57\Lambda^5X^{25} + 24\Lambda^3Y^{27} - 15f'_1M^{10}X^{19}, \\
0 &\equiv 7\Lambda^7X^{21} - 40\Lambda^5X^{23} + 3\Lambda^3X^{25} - 8f'_1M^8X^{19}, \\
0 &\equiv X^{18}X^{19} - 8K^{12}X^{25} + 5M^{10}Y^{27} \textcolor{red}{+0}, \\
0 &\equiv 7F^{16}X^{19} - M^{10}X^{25} + 8M^8Y^{27} \textcolor{red}{+0},
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
0 &\equiv 7H^{14}X^{19} - 5M^{10}X^{23} + 8M^8X^{25} \textcolor{red}{+0}, \\
0 &\equiv N^{12}X^{19} - M^{10}X^{21} + 8M^8X^{23} \textcolor{red}{+0}, \\
0 &\equiv 6F^{16}X^{18} - \Lambda^9X^{25} + 7\Lambda^7Y^{27} \textcolor{red}{+0}, \\
0 &\equiv 6H^{14}X^{18} - \Lambda^7X^{25} + 5\Lambda^5Y^{27} - 7f'_1K^{12}X^{19}, \\
0 &\equiv 6N^{12}X^{18} - \Lambda^5X^{25} + 3\Lambda^3Y^{27} - 7f'_1M^{10}X^{19}, \\
0 &\equiv 6M^{10}X^{18} - 7\Lambda^9X^{19} + f'_1Y^{27},
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
0 &\equiv 48M^8X^{18} - 49\Lambda^7X^{19} + f'_1X^{25}, \\
0 &\equiv 30F^{16}F^{16} - \Lambda^7X^{25} + 5\Lambda^5Y^{27} - f'_1K^{12}X^{19}, \\
0 &\equiv 42H^{14}F^{16} - \Lambda^5X^{25} + 3\Lambda^3Y^{27} - f'_1M^{10}X^{19}, \\
0 &\equiv 30N^{12}F^{16} - 5\Lambda^5X^{23} + 3\Lambda^3X^{25} - f'_1M^8X^{19}, \\
0 &\equiv 48K^{12}F^{16} - \Lambda^9X^{19} + f'_1Y^{27}, \\
0 &\equiv 30M^{10}F^{16} - 7\Lambda^7X^{19} + f'_1X^{25},
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
0 &\equiv 48M^8F^{16} - 7\Lambda^5X^{19} + f'_1X^{23}, \\
0 &\equiv 5\Lambda^9F^{16} - \Lambda^7X^{18} - 8f'_1K^{12}K^{12}, \\
0 &\equiv 7\Lambda^7F^{16} - \Lambda^5X^{18} - f'_1M^{10}K^{12}, \\
0 &\equiv 35\Lambda^5F^{16} - 3\Lambda^3X^{18} - 8f'_1M^8K^{12} + f'_1f'_1X^{19}, \\
0 &\equiv 42H^{14}H^{14} - 5\Lambda^5X^{23} + 3\Lambda^3X^{25} - f'_1M^8X^{19}, \\
0 &\equiv 6N^{12}H^{14} - \Lambda^5X^{21} + 3\Lambda^3X^{23} + 0,
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
0 &\equiv 48K^{12}H^{14} - \Lambda^7X^{19} + f'_1X^{25}, \\
0 &\equiv 6M^{10}H^{14} - \Lambda^5X^{19} + f'_1X^{23}, \\
0 &\equiv 16M^8H^{14} - \Lambda^3X^{19} + \frac{1}{3}f'_1X^{21}, \\
0 &\equiv 7\Lambda^9H^{14} - \Lambda^5X^{18} - 8f'_1M^{10}K^{12}, \\
0 &\equiv 49\Lambda^7H^{14} - 3\Lambda^3X^{18} - 5f'_1M^{10}M^{10}, \\
0 &\equiv 7\Lambda^5H^{14} - 3\Lambda^3F^{16} - f'_1M^8M^{10},
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
0 &\equiv 48K^{12}N^{12} - \Lambda^5X^{19} + 7f'_1X^{23}, \\
0 &\equiv 10M^{10}N^{12} - \Lambda^3X^{19} + \frac{7}{3}f'_1X^{21}, \\
0 &\equiv 35\Lambda^9N^{12} - 3\Lambda^3X^{18} - \frac{285}{8}f'_1M^{10}M^{10} + \frac{7}{8}f'_1f'_1X^{19}, \\
0 &\equiv 7\Lambda^7N^{12} - 3\Lambda^3F^{16} - 8f'_1M^8M^{10}, \\
0 &\equiv 5\Lambda^5N^{12} - 3\Lambda^3H^{14} - 8f'_1M^8M^8, \\
0 &\equiv 5M^{10}M^{10} - 64M^8K^{12} + f'_1X^{19},
\end{aligned}$$

$$0 \equiv 5\Lambda^9M^{10} - 56\Lambda^7K^{12} + f'_1X^{18},$$

$$0 \equiv \Lambda^7M^{10} - 8\Lambda^5K^{12} + f'_1F^{16},$$

$$0 \equiv 5\Lambda^5M^{10} - 24\Lambda^3K^{12} + f'_1H^{14},$$

$$0 \equiv \Lambda^9M^8 - 7\Lambda^5K^{12} + f'_1F^{16},$$

$$0 \equiv \Lambda^7M^8 - 3\Lambda^3K^{12} + f'_1H^{14},$$

$$0 \equiv 8\Lambda^5M^8 - 3\Lambda^3M^{10} + f'_1N^{12},$$

$$0 \equiv 7\Lambda^7\Lambda^7 - 5\Lambda^5\Lambda^9 + f'_1f'_1K^{12},$$

$$0 \equiv 7\Lambda^5\Lambda^7 - 3\Lambda^3\Lambda^9 + f'_1f'_1M^{10},$$

$$0 \equiv 5\Lambda^5\Lambda^5 - 3\Lambda^3\Lambda^7 + f'_1f'_1M^8,$$

$$0 \equiv 7K^{12}X^{19}X^{19} + X^{25}X^{25} - 5X^{23}Y^{27} + 0,$$

$$0 \equiv M^{10}X^{19}X^{19} + X^{23}X^{25} - X^{21}Y^{27} + 0,$$

$$0 \equiv M^8X^{19}X^{19} + 5X^{23}X^{23} - X^{21}X^{25} + 0,$$

$$0 \equiv 56K^{12}K^{12}X^{19} + X^{18}X^{25} - 5F^{16}Y^{27} + 0,$$

$$0 \equiv M^{10}K^{12}X^{19} + F^{16}X^{25} - H^{14}Y^{27} + 0,$$

$$0 \equiv 8M^8K^{12}X^{19} + 7H^{14}X^{25} - 5N^{12}Y^{27} - f'_1X^{19}X^{19},$$

$$0 \equiv M^8M^{10}X^{19} + 7H^{14}X^{23} - N^{12}X^{25} + 0,$$

$$0 \equiv 8M^8M^8X^{19} + 7H^{14}X^{21} - 5N^{12}X^{23} + 0,$$

$$0 \equiv 448K^{12}K^{12}K^{12} + X^{18}X^{18} + 5\Lambda^9Y^{27} + 0,$$

$$\begin{aligned}
0 &\equiv 48 M^{10} K^{12} K^{12} + \Lambda^9 X^{25} - \Lambda^7 Y^{27} + 0, \\
0 &\equiv 384 M^8 K^{12} K^{12} + 7 \Lambda^7 X^{25} - 5 \Lambda^5 Y^{27} + f'_1 K^{12} X^{19}, \\
0 &\equiv 48 M^8 M^{10} K^{12} + 7 \Lambda^5 X^{25} - 3 \Lambda^3 Y^{27} + f'_1 M^{10} X^{19}, \\
0 &\equiv 384 M^8 M^8 K^{12} + 35 \Lambda^5 X^{23} - 3 \Lambda^3 X^{25} + f'_1 M^8 X^{19}, \\
0 &\equiv 48 M^8 M^8 M^{10} + 7 \Lambda^5 X^{21} - 3 \Lambda^3 X^{23} + 0, \\
0 &\equiv 64 M^8 M^8 M^8 + 5 N^{12} N^{12} + 3 \Lambda^3 X^{21} + 0.
\end{aligned}$$

- **Terminaison de l'algorithme :**

Theorem. Supposons qu'à une certaine étape de l'algorithme où l'on possède un nombre fini de bi-invariants $\Lambda^3, \Lambda^5, \dots, \Lambda^{\text{last}}$, l'idéal des relations entre la restriction à $\{f'_1 = 0\}$ de ces bi-invariants :

$$\text{Ideal-Rel}\left(\Lambda^3|_0, \Lambda^5|_0, \dots, \Lambda^{\text{last}}|_0\right)$$

est engendré par des syzygies complétées :

$$0 \equiv \text{Poly}(\Lambda^3, \dots, \Lambda^{\text{last}}) + (f'_1)^b \text{Rem}(\Lambda^3, \dots, \Lambda^{\text{last}})$$

pour lesquelles **aucun** nouveau bi-invariant n'apparaît comme reste derrière une puissance de f'_1 .

Alors l'algèbre des bi-invariants coïncide avec :

$$\begin{gathered}
\mathbb{C}[\Lambda^3, \Lambda^5, \dots, \Lambda^{\text{last}}] \\
\text{modulo syzygies.}
\end{gathered}$$

- Jets d'ordre $\kappa = 4$ en dimension $n = 4$:
- **16 variables de jets :**

$$(f'_1, f'_2, f'_3, f'_4, f''_1, f''_2, f''_3, f''_4, f'''_1, f'''_2, f'''_3, f'''_4, f''''_1, f''''_2, f''''_3, f''''_4)$$

- La même astuce de reparamétrisation par f_1^{-1} fournit une expression de la forme :

$$\mathsf{P}(j^4 f) = \sum_{-\frac{3}{4}m \leqslant a \leqslant m} (f'_1)^a \mathsf{P}_a \left(f'_2, f'_3, f'_4, \Lambda_{1,2}^3, \Lambda_{1,3}^3, \Lambda_{1,4}^3, \Lambda_{1,2;1}^5, \Lambda_{1,3;1}^5, \Lambda_{1,4;1}^5, \Lambda_{1,2;1,1}^7, \Lambda_{1,3;1,1}^7, \Lambda_{1,4;1,1}^7 \right),$$

où chaque P_a dépend uniquement des invariants suivants définis par :

$$\begin{aligned} \Lambda_{1,i}^3 &:= \Delta_{1,i}^{\prime\prime} \\ \Lambda_{1,i;1}^5 &:= \Delta_{1,i}^{\prime\prime\prime} f'_1 - 3 \Delta_{1,i}^{\prime\prime} f''_1 \\ \Lambda_{1,i;1,1}^7 &:= (\Delta_{1,i}^{\prime\prime\prime\prime} + 4 \Delta_{1,i}^{\prime\prime\prime}) f'_1 f'_1 - \\ &\quad - 10 \Delta_{1,i}^{\prime\prime\prime} f'_1 f''_1 + 15 \Delta_{1,i}^{\prime\prime} f''_1 f''_1 \end{aligned}$$

- Invariance unipotente : matrices de la forme :

$$\mathbf{U} := \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ u_a & 1 & 0 & 0 \\ u_b & u_d & 1 & 0 \\ u_c & u_e & u_f & 1 \end{pmatrix}$$

- Tout d'abord, l'invariance par le sous-groupe :

$$\mathbf{V} := \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ u_a & 1 & 0 & 0 \\ u_b & 0 & 1 & 0 \\ u_c & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

implique que chaque P_a est **indépendant de** f'_2, f'_3, f'_4 :

$$P(j^5 f) = \sum_{-\frac{3}{4}m \leqslant a \leqslant m} (f'_1)^a P_a \left(\cancel{f'_2}, \cancel{f'_3}, \cancel{f'_4}, \right. \\ \left. \Lambda_{1,2}^3, \Lambda_{1,3}^3, \Lambda_{1,4}^3, \right. \\ \left. \Lambda_{1,2;1}^5, \Lambda_{1,3;1}^5, \Lambda_{1,4;1}^5, \right. \\ \left. \Lambda_{1,2;1,1}^7, \Lambda_{1,3;1,1}^7, \Lambda_{1,4;1,1}^7 \right),$$

- Ensuite, l'invariance par le sous-groupe :

$$\mathbf{W} := \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & u_d & 1 & 0 \\ 0 & u_e & u_f & 1 \end{pmatrix}$$

implique que chaque P_a est un polynôme par rapport premièrement aux trois bi-invariants évidents :

$$\Lambda_{1,2}^3$$

$$\Lambda_{1,2;1}^5$$

$$\Lambda_{1,2;1,1}^7$$

et deuxièmement, par rapport aux quatre combinaisons algébriques :

$$\begin{vmatrix} \Lambda_{1,2}^3 & \Lambda_{1,3}^3 \\ \Lambda_{1,2;1}^5 & \Lambda_{1,3;1}^5 \end{vmatrix} \equiv f'_1 f'_1 D_{1,2,3}^6,$$

$$\begin{vmatrix} \Lambda_{1,2}^3 & \Lambda_{1,3}^3 \\ \Lambda_{1,2;1,1}^7 & \Lambda_{1,3;1,1}^7 \end{vmatrix} \equiv f'_1 f'_1 D_{1,2,3;1}^8,$$

$$\begin{vmatrix} \Lambda_{1,2;1}^5 & \Lambda_{1,3;1}^5 \\ \Lambda_{1,2;1,1}^7 & \Lambda_{1,3;1,1}^7 \end{vmatrix} \equiv f'_1 f'_1 N^{10},$$

$$\begin{vmatrix} \Lambda_{1,2}^3 & \Lambda_{1,3}^3 & \Lambda_{1,4}^3 \\ \Lambda_{1,2;1}^5 & \Lambda_{1,3;1}^5 & \Lambda_{1,4;1}^5 \\ \Lambda_{1,2;1,1}^7 & \Lambda_{1,3;1,1}^7 & \Lambda_{1,4;1,1}^7 \end{vmatrix} \equiv f'_1 f'_1 f'_1 f'_1 f'_1 W^{10},$$

où la dernière combinaison s'avère s'identifier au **Wronskien** :

$$W^{10} := \begin{vmatrix} f'_1 & f'_2 & f'_3 & f'_4 \\ f''_1 & f''_2 & f''_3 & f''_4 \\ f'''_1 & f'''_2 & f'''_3 & f'''_4 \\ f''''_1 & f''''_2 & f''''_3 & f''''_4 \end{vmatrix}.$$

Ici bien sûr, comme nous le savons, nous devons toujours diviser par toute puissance de f'_1 . Alors après quelques

calculs, les bi-invariants qui apparaissent se simplifient et reçoivent les expressions suivantes :

$$D_{1,2,3;1}^6 := \begin{vmatrix} f'_1 & f'_2 & f''_3 \\ f''_1 & f''_2 & f''_3 \\ f'''_1 & f'''_2 & f'''_3 \end{vmatrix}$$

$$D_{1,2,3;1}^8 := f'_1 \begin{vmatrix} f'_1 & f'_2 & f''_3 \\ f''_1 & f''_2 & f''_3 \\ f'''_1 & f'''_2 & f'''_3 \end{vmatrix} - 6 f''_1 \begin{vmatrix} f'_1 & f'_2 & f''_3 \\ f''_1 & f''_2 & f''_3 \\ f'''_1 & f'''_2 & f'''_3 \end{vmatrix}$$

$$\begin{aligned} N^{10} := & \Delta_{1,2,3}^{'''''''} f'_1 f'_1 - 3 \Delta_{1,2,3}^{'''''''} f'_1 f''_1 + \\ & + 4 \Delta_{1,2,3}^{''''''} f'_1 f'''_1 + 3 \Delta_{1,2,3}^{''''''} f''_1 f''_1 \end{aligned}$$

- **Point de départ de l'algorithme :**

$$\mathsf{P}(j^5 f) = \sum_{-\frac{3}{4}m \leqslant a \leqslant m} (f'_1)^{\textcolor{red}{a}} \mathsf{P}_a \left(\Lambda^3, \Lambda^5, \Lambda^7, D^6, D^8, N^{10}, W^{10} \right)$$

- **Rappel :**

- Calculer avec des bases de Gröbner l'Idéal des Relations entre les bi-invariants restreints à $\{f'_1 = 0\}$.
- Calculer via Maple les restes derrière des puissances de f'_1 .
- Tester si ces restes appartiennent à l'algèbre engendrée par les invariants déjà connus.

Attendre que l'algorithme se termine ou espérer que l'algèbre soit de type infini.

- **Première étape :**

$$\text{Ideal} - \text{Rel} \left(\Lambda^3 \Big|_0, \Lambda^5 \Big|_0, \Lambda^7 \Big|_0, D^6 \Big|_0, D^8 \Big|_0, N^{10} \Big|_0, W^{10} \Big|_0 \right).$$

- **Recevoir 6 syzygies :**

$$0 \stackrel{a}{\equiv} 5 \Lambda^5 \Lambda^5 - 3 \Lambda^3 \Lambda^7 + f'_1 f'_1 M^8,$$

$$0 \stackrel{b}{\equiv} 2 \Lambda^5 D^6 - \Lambda^3 D^8 + \frac{1}{3} f'_1 E^{10},$$

$$0 \stackrel{c}{\equiv} \Lambda^7 D^6 - 5 \Lambda^3 N^{10} + f'_1 L^{12},$$

$$0 \stackrel{d}{\equiv} \Lambda^5 D^8 - 6 \Lambda^3 N^{10} + f'_1 L^{12},$$

$$0 \stackrel{e}{\equiv} \Lambda^7 D^8 - 10 \Lambda^5 N^{10} - f'_1 Q^{14},$$

$$0 \stackrel{f}{\equiv} D^8 D^8 - 12 D^6 N^{10} - f'_1 R^{15}.$$

- **Obtenir 5 nouveaux bi-invariants mutuellement indépendants :**

$$\begin{aligned} M^8 &:= \frac{-5 \Lambda^5 \Lambda^5 + 3 \Lambda^3 \Lambda^7}{f'_1 f'_1} \\ &= 3 \Delta_{1,2}^{\prime \prime \prime \prime} \Delta_{1,2}^{\prime \prime \prime} + 12 \Delta_{1,2}^{\prime \prime \prime \prime} \Delta_{1,2}^{\prime \prime \prime} - 5 \Delta_{1,2}^{\prime \prime \prime \prime} \Delta_{1,2}^{\prime \prime \prime}, \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} E^{10} &:= \frac{-6 \Lambda^5 D^6 + 3 \Lambda^3 D^8}{f'_1} \\ &= 3 \Delta_{1,2,3}^{\prime \prime \prime \prime \prime \prime} \Delta_{1,2}^{\prime \prime \prime} - 6 \Delta_{1,2,3}^{\prime \prime \prime \prime \prime} \Delta_{1,2}^{\prime \prime \prime}, \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} L^{12} &:= \frac{-\Lambda^7 D^6 + 5 \Lambda^3 N^{10}}{f'_1} \\ &= -\Delta_{1,2,3}^{\prime \prime \prime \prime \prime} \Delta_{1,2}^{\prime \prime \prime \prime} f'_1 - 4 \Delta_{1,2,3}^{\prime \prime \prime \prime \prime} \Delta_{1,2}^{\prime \prime \prime} f'_1 + 5 \Delta_{1,2,3}^{\prime \prime \prime \prime \prime} \Delta_{1,2}^{\prime \prime} f'_1 + 10 \Delta_{1,2,3}^{\prime \prime \prime \prime \prime} \Delta_{1,2}^{\prime \prime \prime} f''_1 - \\ &\quad - 15 \Delta_{1,2,3}^{\prime \prime \prime \prime \prime} \Delta_{1,2}^{\prime \prime \prime} f''_1 + 20 \Delta_{1,2,3}^{\prime \prime \prime \prime \prime} \Delta_{1,2}^{\prime \prime} f'''_1, \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
Q^{14} &:= \frac{\Lambda^7 D^8 - 10 \Lambda^5 N^{10}}{f'_1} \\
&= -10 \Delta_{1,2,3}^{''''''} \Delta_{1,2}^{'''''} f'_1 f'_1 + \Delta_{1,2,3}^{''''''} \Delta_{1,2}^{'''''} f'_1 f'_1 + 4 \Delta_{1,2,3}^{''''''} \Delta_{1,2}^{'''''} f'_1 f'_1 + \\
&\quad + 20 \Delta_{1,2,3}^{''''''} \Delta_{1,2}^{'''''} f'_1 f''_1 + 30 \Delta_{1,2,3}^{''''''} \Delta_{1,2}^{''''} f'_1 f''_1 - 6 \Delta_{1,2,3}^{''''''} \Delta_{1,2}^{''''} f'_1 f''_1 - \\
&\quad - 24 \Delta_{1,2,3}^{''''''} \Delta_{1,2}^{''''} f'_1 f''_1 - 40 \Delta_{1,2,3}^{''''''} \Delta_{1,2}^{''''} f'_1 f'''_1 - 75 \Delta_{1,2,3}^{''''''} \Delta_{1,2}^{''''} f''_1 f''_1 + \\
&\quad + 30 \Delta_{1,2,3}^{''''''} \Delta_{1,2}^{''''} f''_1 f''_1 + 120 \Delta_{1,2,3}^{''''''} \Delta_{1,2}^{''''} f''_1 f'''_1,
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
R^{15} &:= \Delta_{1,2,3}^{''''''} \Delta_{1,2,3}^{''''''} f'_1 - 12 \Delta_{1,2,3}^{''''''} \Delta_{1,2,3}^{''''''} f'_1 + 24 \Delta_{1,2,3}^{''''''} \Delta_{1,2,3}^{''''''} f''_1 - \\
&\quad - 48 \Delta_{1,2,3}^{''''''} \Delta_{1,2,3}^{''''''} f'''_1,
\end{aligned}$$

- **Deuxième boucle de l'algorithme :**

$$\text{Ideal} - \text{Rel} \left(\begin{array}{l} \Lambda^3|_0, \quad \Lambda^5|_0, \quad \Lambda^7|_0, \quad D^6|_0, \quad D^8|_0, \quad N^{10}|_0, \\ M^8|_0, \quad E^{10}|_0, \quad L^{12}|_0, \quad Q^{14}|_0, \quad R^{15}|_0 \end{array} \right)$$

- **Recevoir 20 syzygies, dont les 14 supplémentaires :**

$$0 \stackrel{g}{\equiv} 4 D^8 Q^{14} - 5 \Lambda^7 R^{15} - f'_1 X^{21},$$

$$0 \stackrel{h}{\equiv} 24 D^6 Q^{14} - 25 \Lambda^5 R^{15} + f'_1 V^{19},$$

$$0 \stackrel{i}{\equiv} L^{12} L^{12} + E^{10} Q^{14} - f'_1 M^8 R^{15},$$

$$0 \stackrel{j}{\equiv} 8 N^{10} L^{12} + \Lambda^7 R^{15} + f'_1 X^{21},$$

$$0 \stackrel{k}{\equiv} 4 D^8 L^{12} + 5 \Lambda^5 R^{15} - f'_1 V^{19},$$

$$\begin{aligned}
0 &\stackrel{l}{\equiv} 8D^6L^{12} + 5\Lambda^3R^{15} - \frac{1}{3}f'_1U^{17}, \\
0 &\stackrel{m}{\equiv} \Lambda^7L^{12} + \Lambda^5Q^{14} - 2f'_1M^8N^{10}, \\
0 &\stackrel{n}{\equiv} 5\Lambda^5L^{12} + 3\Lambda^3Q^{14} - f'_1D^8M^8, \\
0 &\stackrel{o}{\equiv} 8N^{10}E^{10} + \Lambda^5R^{15} - f'_1V^{19}, \\
0 &\stackrel{p}{\equiv} 4D^8E^{10} + 3\Lambda^3R^{15} - f'_1U^{17}, \\
0 &\stackrel{q}{\equiv} 5\Lambda^7E^{10} + 3\Lambda^3Q^{14} - 6f'_1D^8M^8, \\
0 &\stackrel{r}{\equiv} 5\Lambda^5E^{10} - 3\Lambda^3L^{12} - 6f'_1D^6M^8, \\
0 &\stackrel{s}{\equiv} 8\Lambda^5N^{10}Q^{14} - \Lambda^7\Lambda^7R^{15} + f'_1Q^{14}Q^{14} + 4f'_1N^{10}N^{10}M^8, \\
0 &\stackrel{t}{\equiv} 24\Lambda^3N^{10}Q^{14} - 5\Lambda^5\Lambda^7R^{15} - 5f'_1L^{12}Q^{14} + 2f'_1M^8D^8N^{10}.
\end{aligned}$$

- **Obtenir 3 nouveaux bi-invariants mutuellement indépendants :**

$$\begin{aligned}
U^{17} &= \frac{4D^8E^{10} + 3\Lambda^3R^{15}}{f'_1} \\
&= 15\Delta_{1,2,3}^{''''''}\Delta_{1,2,3}^{''''''}\Delta_{1,2}^{'''} - 36\Delta_{1,2,3}^{''''''}\Delta_{1,2,3}^{''''''}\Delta_{1,2}^{'''} - \\
&\quad - 24\Delta_{1,2,3}^{''''''}\Delta_{1,2,3}^{''''''}\Delta_{1,2}^{''''} + 144\Delta_{1,2,3}^{''''''}\Delta_{1,2,3}^{''''''}\Delta_{1,2}^{''''}, \\
V^{19} &= \frac{8N^{10}E^{10} + \Lambda^5R^{15}}{f'_1} \\
&= 24\Delta_{1,2,3}^{'''''''}\Delta_{1,2,3}^{'''''''}\Delta_{1,2}^{'''}f'_1 - 60\Delta_{1,2,3}^{'''''''}\Delta_{1,2,3}^{''''''}\Delta_{1,2}^{''''}f'_1 + \\
&\quad + \Delta_{1,2,3}^{''''''}\Delta_{1,2,3}^{''''''}\Delta_{1,2}^{''''}f'_1 - 75\Delta_{1,2,3}^{'''''''}\Delta_{1,2,3}^{''''''}\Delta_{1,2}^{''''}f'_1 + \\
&\quad + 36\Delta_{1,2,3}^{'''''''}\Delta_{1,2,3}^{''''''}\Delta_{1,2}^{'''}f''_1 + 168\Delta_{1,2,3}^{'''''''}\Delta_{1,2,3}^{''''''}\Delta_{1,2}^{''''}f''_1 - \\
&\quad - 144\Delta_{1,2,3}^{'''''''}\Delta_{1,2,3}^{''''''}\Delta_{1,2}^{''''}f''_1 + 96\Delta_{1,2,3}^{'''''''}\Delta_{1,2,3}^{''''''}\Delta_{1,2}^{''''}f'''_1 - \\
&\quad - 240\Delta_{1,2,3}^{'''''''}\Delta_{1,2,3}^{''''''}\Delta_{1,2}^{''''}f'''_1,
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
X^{21} &= \frac{4D^8Q^{14} - 5\Lambda^7R^{15}}{f'_1} \\
&= -40\Delta_{1,2,3}^{''''''''}\Delta_{1,2,3}^{''''''''}\Delta_{1,2}^{''''}f'_1f'_1 - 4\Delta_{1,2,3}^{''''''''}\Delta_{1,2,3}^{''''''''}\Delta_{1,2}^{''''}f'_1f'_1 - \\
&\quad - 4\Delta_{1,2,3}^{''''''''}\Delta_{1,2,3}^{''''''''}\Delta_{1,2}^{''''}f'_1f'_1 + 60\Delta_{1,2,3}^{''''''''}\Delta_{1,2,3}^{''''''''}\Delta_{1,2}^{''''}f'_1f'_1 + \\
&\quad + 240\Delta_{1,2,3}^{''''''''}\Delta_{1,2,3}^{''''''''}\Delta_{1,2}^{''''}f'_1f'_1 + 130\Delta_{1,2,3}^{''''''''}\Delta_{1,2,3}^{''''''''}\Delta_{1,2}^{''''}f'_1f''_1 + \\
&\quad + 120\Delta_{1,2,3}^{''''''''}\Delta_{1,2,3}^{''''''''}\Delta_{1,2}^{''''}f'_1f''_1 - 168\Delta_{1,2,3}^{''''''''}\Delta_{1,2,3}^{''''''''}\Delta_{1,2}^{''''}f'_1f''_1 - \\
&\quad - 668\Delta_{1,2,3}^{''''''''}\Delta_{1,2,3}^{''''''''}\Delta_{1,2}^{''''}f'_1f''_1 - 360\Delta_{1,2,3}^{''''''''}\Delta_{1,2,3}^{''''''''}\Delta_{1,2}^{''''}f'_1f''_1 - \\
&\quad - 160\Delta_{1,2,3}^{''''''''}\Delta_{1,2,3}^{''''''''}\Delta_{1,2}^{''''}f'_1f'''_1 + 240\Delta_{1,2,3}^{''''''''}\Delta_{1,2,3}^{''''''''}\Delta_{1,2}^{''''}f'_1f'''_1 + \\
&\quad + 960\Delta_{1,2,3}^{''''''''}\Delta_{1,2,3}^{''''''''}\Delta_{1,2}^{''''}f'_1f'''_1 - 375\Delta_{1,2,3}^{''''''''}\Delta_{1,2,3}^{''''''''}\Delta_{1,2}^{''''}f''_1f''_1 + \\
&\quad + 840\Delta_{1,2,3}^{''''''''}\Delta_{1,2,3}^{''''''''}\Delta_{1,2}^{''''}f''_1f''_1 + 180\Delta_{1,2,3}^{''''''''}\Delta_{1,2,3}^{''''''''}\Delta_{1,2}^{''''}f''_1f''_1 + \\
&\quad + 144\Delta_{1,2,3}^{''''''''}\Delta_{1,2,3}^{''''''''}\Delta_{1,2}^{''''}f''_1f''_1 + 144\Delta_{1,2,3}^{''''''''}\Delta_{1,2,3}^{''''''''}\Delta_{1,2}^{''''}f''_1f''_1 - \\
&\quad - 1440\Delta_{1,2,3}^{''''''''}\Delta_{1,2,3}^{''''''''}\Delta_{1,2}^{''''}f''_1f'''_1 + 480\Delta_{1,2,3}^{''''''''}\Delta_{1,2,3}^{''''''''}\Delta_{1,2}^{''''}f''_1f'''_1.
\end{aligned}$$

- Vérifier l'indépendance mutuelle des **16** bi-invariants :

$W^{10},$	$f'_1,$	$\Lambda^3,$	$\Lambda^5,$	$\Lambda^7,$	$D^6,$	$D^8,$	$N^{10},$
$M^8,$	$E^{10},$	$L^{12},$	$Q^{14},$	$R^{15},$	$U^{17},$	$V^{19},$	X^{21}

- Troisième boucle de l'algorithme : Ordre purement lexicographique :

$$\begin{aligned}
\Lambda^3 > \Lambda^5 > \Lambda^7 > D^6 > D^8 > N^{10} > M^8 > E^{10} > L^{12} > \\
> Q^{14} > R^{15} > U^{17} > V^{19} > X^{21}.
\end{aligned}$$

- Recevoir **41** syzygies complétées :

$$0 \stackrel{1}{\equiv} -5 \Lambda^5 \Lambda^5 + 3 \underline{\Lambda^3 \Lambda^7}_{\text{LT}} - f'_1 f'_1 M^8,$$

$$0 \stackrel{2}{\equiv} -2 \Lambda^5 D^6 + \underline{\Lambda^3 D^8}_{\text{LT}} - \frac{1}{3} f'_1 E^{10},$$

$$0 \stackrel{3}{\equiv} -\Lambda^7 D^6 + 5 \underline{\Lambda^3 N^{10}}_{\text{LT}} - f'_1 L^{12},$$

$$0 \stackrel{4}{\equiv} -5 \Lambda^5 E^{10} + 3 \underline{\Lambda^3 L^{12}}_{\text{LT}} + 6 f'_1 D^6 M^8,$$

$$0 \stackrel{5}{\equiv} 5 \Lambda^7 E^{10} + 3 \underline{\Lambda^3 Q^{14}}_{\text{LT}} - 6 f'_1 D^8 M^8,$$

$$0 \stackrel{6}{\equiv} 4 D^8 E^{10} + 3 \underline{\Lambda^3 R^{15}}_{\text{LT}} - f'_1 U^{17},$$

$$0 \stackrel{7}{\equiv} -36 D^6 D^6 M^8 - 5 E^{10} E^{10} + 3 \underline{\Lambda^3 U^{17}}_{\text{LT}} + 0,$$

$$0 \stackrel{8}{\equiv} -5 E^{10} L^{12} - 6 D^6 D^8 M^8 + 3 \underline{\Lambda^3 V^{19}}_{\text{LT}} + 0,$$

$$0 \stackrel{9}{\equiv} 5 L^{12} L^{12} + 3 \underline{\Lambda^3 X^{21}}_{\text{LT}} + M^8 D^8 D^8 + 0,$$

$$0 \stackrel{10}{\equiv} -6 \Lambda^7 D^6 + 5 \underline{\Lambda^5 D^8}_{\text{LT}} - f'_1 L^{12},$$

$$0 \stackrel{11}{\equiv} -\Lambda^7 D^8 + 10 \underline{\Lambda^5 N^{10}}_{\text{LT}} + f'_1 Q^{14},$$

$$0 \stackrel{12}{\equiv} \underline{\Lambda^5 L^{12}}_{\text{LT}} - \Lambda^7 E^{10} + f'_1 D^8 M^8,$$

$$0 \stackrel{13}{\equiv} \Lambda^7 L^{12} + \underline{\Lambda^5 Q^{14}}_{\text{LT}} - 2 f'_1 M^8 N^{10},$$

$$0 \stackrel{14}{\equiv} 8 N^{10} E^{10} + \underline{\Lambda^5 R^{15}}_{\text{LT}} - f'_1 V^{19},$$

$$0 \stackrel{15}{\equiv} \underline{\Lambda^5 U^{17}}_{\text{LT}} - E^{10} L^{12} - 6 D^6 D^8 M^8 + 0,$$

$$0 \stackrel{16}{\equiv} \underline{\Lambda^5 V^{19}}_{\text{LT}} - M^8 D^8 D^8 - L^{12} L^{12} + f'_1 M^8 R^{15},$$

$$0 \stackrel{17}{\equiv} \underline{\Lambda^5 X^{21}}_{\text{LT}} - L^{12} Q^{14} + 2 D^8 N^{10} M^8 + 0,$$

$$0 \stackrel{18}{\equiv} 8 N^{10} L^{12} + \underline{\Lambda^7 R^{15}}_{\text{LT}} + f'_1 X^{21},$$

$$0 \stackrel{19}{\equiv} -L^{12} L^{12} + \underline{\Lambda^7 U^{17}}_{\text{LT}} + f'_1, -5 M^8 D^8 D^8 + 0,$$

$$0 \stackrel{20}{\equiv} L^{12} Q^{14} + \underline{\Lambda^7 V^{19}}_{\text{LT}} - 10 D^8 M^8 N^{10} + 0,$$

$$0 \stackrel{21}{\equiv} 20 N^{10} N^{10} M^8 + Q^{14} Q^{14} + \underline{\Lambda^7 X^{21}}_{\text{LT}} + 0,$$

$$0 \stackrel{22}{\equiv} 6 \underline{D^6 M^8 R^{15}}_{\text{LT}} + L^{12} U^{17} - E^{10} V^{19} + 0,$$

$$0 \stackrel{23}{\equiv} 5 \underline{D^8 M^8 R^{15}}_{\text{LT}} - Q^{14} U^{17} - L^{12} V^{19} + 0,$$

$$0 \stackrel{24}{\equiv} 10 \underline{N^{10} M^8 R^{15}}_{\text{LT}} - Q^{14} V^{19} + L^{12} X^{21} + 0,$$

$$0 \stackrel{25}{\equiv} 5 \underline{M^8 R^{15} R^{15}}_{\text{LT}} + V^{19} V^{19} + U^{17} X^{21} + 0,$$

$$0 \stackrel{26}{\equiv} -D^8 D^8 + 12 \underline{D^6 N^{10}}_{\text{LT}} + f'_1 R^{15},$$

$$0 \stackrel{27}{\equiv} -5 D^8 E^{10} + 6 \underline{D^6 L^{12}}_{\text{LT}} + f'_1 U^{17},$$

$$0 \stackrel{28}{\equiv} 3 \underline{D^6 Q^{14}}_{\text{LT}} + 25 N^{10} E^{10} - 3 f'_1 V^{19},$$

$$0 \stackrel{29}{\equiv} 5 E^{10} R^{15} - D^8 U^{17} + 6 \underline{D^6 V^{19}}_{\text{LT}} + 0,$$

$$0 \stackrel{30}{\equiv} -3 L^{12} R^{15} + N^{10} U^{17} + 3 \underline{D^6 X^{21}}_{\text{LT}} + 0,$$

$$0 \stackrel{31}{\equiv} -10 N^{10} E^{10} + \underline{D^8 L^{12}}_{\text{LT}} + f'_1 V^{19},$$

$$0 \stackrel{32}{\equiv} \underline{D^8 Q^{14}}_{\text{LT}} + 10 N^{10} L^{12} + f'_1 X^{21},$$

$$0 \stackrel{33}{\equiv} -2 N^{10} U^{17} + \underline{D^8 V^{19}}_{\text{LT}} + L^{12} R^{15} + 0,$$

$$0 \stackrel{34}{\equiv} Q^{14} R^{15} + 2 N^{10} V^{19} + \underline{D^8 X^{21}}_{\text{LT}} + 0,$$

$$0 \stackrel{35}{\equiv} -2 L^{12} N^{10} U^{17} + R^{15} L^{12} L^{12} + 10 \underline{V^{19} N^{10} E^{10}}_{\text{LT}} - f'_1 V^{19} V^{19},$$

$$0 \stackrel{36}{\equiv} 2 N^{10} U^{17} Q^{14} - R^{15} L^{12} Q^{14} + 10 \underline{V^{19} N^{10} L^{12}}_{\text{LT}} + f'_1 V^{19} X^{21},$$

$$0 \stackrel{37}{\equiv} 10 \underline{N^{10}L^{12}X^{21}}_{\text{LT}} - R^{15}Q^{14}Q^{14} - 2Q^{14}N^{10}V^{19} + f'_1 X^{21}X^{21},$$

$$0 \stackrel{38}{\equiv} 2 \underline{N^{10}U^{17}X^{21}}_{\text{LT}} - X^{21}L^{12}R^{15} + V^{19}Q^{14}R^{15} + 2N^{10}V^{19}V^{19} + 0,$$

$$0 \stackrel{39}{\equiv} \underline{E^{10}Q^{14}}_{\text{LT}} + L^{12}L^{12} - f'_1 M^8 R^{15},$$

$$0 \stackrel{40}{\equiv} Q^{14}U^{17} + 6L^{12}V^{19} + 5\underline{E^{10}X^{21}}_{\text{LT}} + 0,$$

$$0 \stackrel{41}{\equiv} -6Q^{14}L^{12}V^{19} - Q^{14}Q^{14}U^{17} + 5\underline{X^{21}L^{12}L^{12}}_{\text{LT}} - 5f'_1 M^8 R^{15} X^{21}.$$

- **Aucun nouveau bi-invariant n'apparaît, donc l'algorithme se termine et l'algèbre UE_4^4 est engendrée par les **16** bi-invariants écrits explicitement ci-dessus.**

IX – Algèbres d'invariants explicites

THÉORÈME (M. 2008) *En dimension $n = 2$ pour les jets d'ordre $\kappa = 5$, l'algèbre UE_5^2 de polynômes de jets $\text{P}(j^5 f_1, j^5 f_2)$ invariants par reparamétrisation et invariants sous l'action unipotente est engendrée par les 17 bi-invariants mutuellement indépendants définis explicitement ci-dessus :*

$$\boxed{\begin{array}{cccccccc} f'_1, & \Lambda^3, & \Lambda^5, & \Lambda^7, & \Lambda^9, & M^8, & M^{10}, & K^{12}, \\ N^{12}, & H^{14}, & F^{16}, & X^{18}, & X^{19}, & X^{21}, & X^{23}, & X^{25}, & Y^{27} \end{array}}$$

dont la restriction à $\{f'_1 = 0\}$ possède un idéal de relations (pour l'ordre gradué lexicographique inversé) qui est constitué de 105 syzygies, 66 d'entre elles engendrant l'idéal en question, et dont les 66 restes derrière les puissances de f'_1 ont tous été exhibés plus haut.

De plus (corollaire), l'algèbre complète E_5^2 des polynômes de jets $\text{P}(j^5 f)$ invariants par reparamétrisation est engendrée par les polarisations :

$$\boxed{\begin{array}{cccccccc} f'_i, & \Lambda^3, & \Lambda_i^5, & \Lambda_{i,j}^7, & \Lambda_{i,j,k}^9, & M^8, & M_i^{10}, & K_{i,j}^{12}, \\ N^{12}, & H_i^{14}, & F_{i,j}^{16}, & X_{i,j,k}^{18}, & X_i^{19}, & X^{21}, & X_i^{23}, & X_{i,j}^{25}, & Y_{i,j,k}^{27} \end{array}}$$

de ces 17 bi-invariants, où les indices i, j, k varient dans $\{1, 2\}$, et par conséquent, le nombre total de ces invariants est égal à :

$$2+1+2+4+8+1+2+4+1+2+4+8+2+1+2+4+8 = \boxed{56}.$$

THÉORÈME (M. 2008) *En dimension $n = 4$ pour les jets d'ordre $\kappa = 4$, l'algèbre UE_4^4 de polynômes de jets $\mathbb{P}(j^4 f_1, j^4 f_2, j^4 f_3, j^4 f_4)$ invariants par reparamétrisation and invariants sous l'action unipotente est engendrée par 16 bi-invariants mutuellement indépendants :*

$$\boxed{\begin{array}{cccccccc} W^{10}, & f'_1, & \Lambda^3, & \Lambda^5, & \Lambda^7, & D^6, & D^8, & N^{10}, \\ M^8, & E^{10}, & L^{12}, & Q^{14}, & R^{15}, & U^{17}, & V^{19}, & X^{21}, \end{array}}$$

dont la restriction à $\{f'_1 = 0\}$ possède un idéal de relations, pour l'ordre purement lexicographique, qui est constitué des 41 syzygies écrites ci-dessus.

De plus, tout bi-invariant de poids m s'écrit de manière unique sous la forme polynomiale suivante :

$$\mathbb{P}(j^\kappa f) = \sum_{o, p} (f'_1)^o (W^{10})^p \sum_{\substack{(a, \dots, n) \in \mathbb{N}^{14} \setminus (\square_1 \cup \dots \cup \square_{41}) \\ 3a + \dots + 21n = m - o - 10p}} \text{coeff}_{a, \dots, n, o, p} \cdot \\ \cdot (\Lambda^3)^a (\Lambda^5)^b (\Lambda^7)^c (D^6)^d (D^8)^e (N^{10})^f (M^8)^g (E^{10})^h \\ \cdot (L^{12})^i (Q^{14})^j (R^{15})^k (U^{17})^l (V^{19})^m (X^{21})^n,$$

avec des coefficients $\text{coeff}_{a, \dots, n, o, p}$ quelconques, où $\square_1, \dots, \square_{41}$ désignent les quadrants de \mathbb{N}^{14} ayant des sommets correspondant aux puissances des 41 monômes de tête en question.

Par conséquent, en dimension $n = 4$ pour les jets d'ordre $\kappa = 4$, l'algèbre E_4^4 des polynômes de jets

$P(j^4 f)$ invariants par reparamétrisation est engendrée par les polarisations :

$W^{10},$	$f'_i,$	$\Lambda_{[i,j]}^3,$	$\Lambda_{[i,j];\alpha}^5,$	$\Lambda_{[i,j];\alpha,\beta}^7,$	$D_{[i,j,k]}^6,$
$D_{[i,j,k];\alpha}^8,$	$N_{[i,j,k];\alpha,\beta}^{10},$	$M_{[i,j],[k,l]}^8,$	$E_{[i,j,k],[p,q]}^{10},$	$L_{[i,j,k],[p,q];\alpha}^{12},$	
$Q_{[i,j,k],[p,q];\alpha,\beta}^{14},$		$R_{[i,j,k],[p,q,r];\alpha}^{15},$	$U_{[i,j,k],[p,q,r],[s,t]}^{17},$		
$V_{[i,j,k],[p,q,r],[s,t];\alpha}^{19},$		$X_{[i,j,k],[p,q,r],[s,t];\alpha,\beta}^{21},$			

de ces 16 bi-invariants $W^{10}, f'_i, \Lambda^3, \Lambda^5, \Lambda^7, D^6, D^8, N^{10}, M^8, E^{10}, L^{12}, Q^{14}, R^{15}, U^{17}, V^{19}, X^{21}$; ces invariants polarisés sont anti-symétriques par rapport à chaque collection d'indices entre crochets $[i, j, k], [p, q, r], [s, t]$, et ils sont explicitement représentés en termes de Δ -déterminants par les formules complètes suivantes :

$$\begin{aligned} & W_{1,2,3,4}^{10}, \\ & f'_i, \\ & \Lambda_{[i,j]}^3 := \Delta_{i,j}^{'''}, \end{aligned}$$

$$\Lambda_{[i,j];\alpha}^5 := \Delta_{i,j}^{''''} f'_\alpha - 3 \Delta_{i,j}^{'''} f''_\alpha,$$

$$\begin{aligned} \Lambda_{[i,j];\alpha,\beta}^7 := & \Delta_{i,j}^{'''''} f'_\alpha f'_\beta + 4 \Delta_{i,j}^{'''''} f'_\alpha f'_\beta - 5 \Delta_{i,j}^{''''} (f'_\alpha f''_\beta + f''_\alpha f'_\beta) + \\ & + 15 \Delta_{i,j}^{'''} f''_\alpha f''_\beta, \end{aligned}$$

$$D_{[i,j,k]}^6 := \Delta_{i,j,k}^{''''''},$$

$$D_{[i,j,k];\alpha}^8 := \Delta_{i,j,k}^{'',''''} f'_{\alpha} - 6 \Delta_{i,j,k}^{'',''''} f''_{\alpha},$$

$$\begin{aligned} N_{[i,j,k];\alpha,\beta}^{10} &:= \Delta_{i,j,k}^{'',''''} f'_{\alpha} f'_{\beta} - \frac{3}{2} \Delta_{i,j,k}^{'',''''} (f'_{\alpha} f''_{\beta} + f''_{\alpha} f'_{\beta}) + \\ &+ 2 \Delta_{i,j,k}^{'',''''} (f'_{\alpha} f'''_{\beta} + f'''_{\alpha} f'_{\beta}) + 3 \Delta_{i,j,k}^{'',''''} f''_{\alpha} f''_{\beta}, \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} M_{[i,j],[k,l]}^8 &:= 3 \Delta_{i,j}^{'',''''} \Delta_{k,l}^{'',''} + 12 \Delta_{i,j}^{'',''''} \Delta_{k,l}^{'',''} - \\ &- 5 \Delta_{i,j}^{'',''''} \Delta_{k,l}^{'',''}, \end{aligned}$$

$$E_{[i,j,k],[p,q]}^{10} := 3 \Delta_{i,j,k}^{'',''''} \Delta_{l,m}^{'',''} - 6 \Delta_{i,j,k}^{'',''''} \Delta_{l,m}^{'',''}$$

$$\begin{aligned} L_{[i,j,k],[l,m];\alpha}^{12} &:= 5 \Delta_{i,j,k}^{'',''''} \Delta_{p,q}^{'','''} f'_{\alpha} - 15 \Delta_{i,j,k}^{'',''''} \Delta_{p,q}^{'','''} f''_{\alpha} - 6 \Delta_{i,j,k}^{'',''''} \Delta_{p,q}^{'','''} f'_{\alpha} - \\ &- 24 \Delta_{i,j,k}^{'',''''} \Delta_{p,q}^{'','''} f'_{\alpha} + 30 \Delta_{i,j,k}^{'',''''} \Delta_{p,q}^{'','''} f'_{\alpha}, \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} Q_{[i,j,k],[p,q];\alpha,\beta}^{14} &:= -10 \Delta_{i,j,k}^{'',''''} \Delta_{p,q}^{'','''} f'_{\alpha} f'_{\beta} + \Delta_{i,j,k}^{'',''''} \Delta_{p,q}^{'',''''} f'_{\alpha} f'_{\beta} + \\ &+ 4 \Delta_{i,j,k}^{'',''''} \Delta_{p,q}^{'','''} f'_{\alpha} f'_{\beta} + +20 \Delta_{i,j,k}^{'',''''} \Delta_{p,q}^{'',''''} f'_{\alpha} f''_{\beta} + \\ &+ 30 \Delta_{i,j,k}^{'',''''} \Delta_{p,q}^{'','''} f'_{\alpha} f''_{\beta} - 6 \Delta_{i,j,k}^{'',''''} \Delta_{p,q}^{'',''''} f'_{\alpha} f''_{\beta} - \\ &- 24 \Delta_{i,j,k}^{'',''''} \Delta_{p,q}^{'','''} f'_{\alpha} f''_{\beta} - 40 \Delta_{i,j,k}^{'',''''} \Delta_{p,q}^{'','''} f'_{\alpha} f'''_{\beta} - \\ &- 75 \Delta_{i,j,k}^{'',''''} \Delta_{p,q}^{'','''} f''_{\alpha} f''_{\beta} + 30 \Delta_{i,j,k}^{'',''''} \Delta_{p,q}^{'','''} f''_{\alpha} f''_{\beta} + \\ &+ 120 \Delta_{i,j,k}^{'',''''} \Delta_{p,q}^{'','''} f''_{\alpha} f'''_{\beta}, \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} R_{[i,j,k],[p,q,r];\alpha}^{15} &:= \Delta_{i,j,k}^{'',''''} \Delta_{p,q,r}^{'',''''} f'_{\alpha} - 12 \Delta_{i,j,k}^{'',''''} \Delta_{p,q,r}^{'',''''} f'_{\alpha} + \\ &+ 24 \Delta_{i,j,k}^{'',''''} \Delta_{p,q,r}^{'',''''} f''_{\alpha} - 48 \Delta_{i,j,k}^{'',''''} \Delta_{p,q,r}^{'',''''} f'''_{\alpha}, \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} U_{[i,j,k],[p,q,r],[s,t]}^{17} &:= 15 \Delta_{i,j,k}^{'',''''} \Delta_{p,q,r}^{'',''''} \Delta_{s,t}^{'',''} - 36 \Delta_{i,j,k}^{'',''''} \Delta_{p,q,r}^{'',''''} \Delta_{s,t}^{'',''} - \\ &- 24 \Delta_{i,j,k}^{'',''''} \Delta_{p,q,r}^{'',''''} \Delta_{s,t}^{'','''} + 144 \Delta_{i,j,k}^{'',''''} \Delta_{p,q,r}^{'',''''} \Delta_{s,t}^{'','''}, \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} V_{[i,j,k],[p,q,r],[s,t];\alpha}^{19} &:= 24 \Delta_{i,j,k}^{'',''''} \Delta_{p,q,r}^{'',''''} \Delta_{s,t}^{'',''} f'_{\alpha} - 60 \Delta_{i,j,k}^{'',''''} \Delta_{p,q,r}^{'',''''} \Delta_{s,t}^{'',''} f'_{\alpha} + \\ &+ \Delta_{i,j,k}^{'',''''} \Delta_{p,q,r}^{'',''''} \Delta_{s,t}^{'','''} f'_{\alpha} - 75 \Delta_{i,j,k}^{'',''''} \Delta_{p,q,r}^{'',''''} \Delta_{s,t}^{'','''} f''_{\alpha} + \\ &+ 36 \Delta_{i,j,k}^{'',''''} \Delta_{p,q,r}^{'',''''} \Delta_{s,t}^{'','''} f''_{\alpha} + 168 \Delta_{i,j,k}^{'',''''} \Delta_{p,q,r}^{'',''''} \Delta_{s,t}^{'','''} f''_{\alpha} - \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
& - 144 \Delta_{i,j,k}^{',",,,,} \Delta_{p,q,r}^{',",,,} \Delta_{s,t}^{'',,,,} f''_\alpha + 96 \Delta_{i,j,k}^{',",,,,} \Delta_{p,q,r}^{',",,,} \Delta_{s,t}^{',,,} f'''_\alpha - \\
& - 240 \Delta_{i,j,k}^{',",,,,} \Delta_{p,q,r}^{',",,,} \Delta_{s,t}^{',,,} f'''_\alpha,
\end{aligned}$$

$X_{[i,j,k],[p,q,r],[s,t];\alpha,\beta}^{21} :=$

$$\begin{aligned}
& := -40 \Delta_{i,j,k}^{',",,,,} \Delta_{p,q,r}^{',",,,} \Delta_{s,t}^{',,,} f'_\alpha f'_\beta - 4 \Delta_{i,j,k}^{',",,,,} \Delta_{p,q,r}^{',",,,} \Delta_{s,t}^{',,,} f'_\alpha f''_\beta - \\
& - 4 \Delta_{i,j,k}^{',",,,,} \Delta_{p,q,r}^{',",,,} \Delta_{s,t}^{'',,,} f'_\alpha f'_\beta + 60 \Delta_{i,j,k}^{',",,,,} \Delta_{p,q,r}^{',",,,} \Delta_{s,t}^{',,,} f'_\alpha f'_\beta + \\
& + 240 \Delta_{i,j,k}^{',",,,,} \Delta_{p,q,r}^{',",,,} \Delta_{s,t}^{'',,,} f'_\alpha f''_\beta + 130 \Delta_{i,j,k}^{',",,,,} \Delta_{p,q,r}^{',",,,} \Delta_{s,t}^{',,,} f'_\alpha f''_\beta + \\
& + 120 \Delta_{i,j,k}^{',",,,,} \Delta_{p,q,r}^{',",,,} \Delta_{s,t}^{',,,} f'_\alpha f''_\beta - 168 \Delta_{i,j,k}^{',",,,,} \Delta_{p,q,r}^{',",,,} \Delta_{s,t}^{',,,} f'_\alpha f''_\beta - \\
& - 668 \Delta_{i,j,k}^{',",,,,} \Delta_{p,q,r}^{',",,,} \Delta_{s,t}^{'',,,} f'_\alpha f''_\beta - 360 \Delta_{i,j,k}^{',",,,,} \Delta_{p,q,r}^{',",,,} \Delta_{s,t}^{',,,} f'_\alpha f''_\beta - \\
& - 160 \Delta_{i,j,k}^{',",,,,} \Delta_{p,q,r}^{',",,,} \Delta_{s,t}^{',,,} f'_\alpha f'''_\beta + 240 \Delta_{i,j,k}^{',",,,,} \Delta_{p,q,r}^{',",,,} \Delta_{s,t}^{',,,} f'_\alpha f'''_\beta + \\
& + 960 \Delta_{i,j,k}^{',",,,,} \Delta_{p,q,r}^{',",,,} \Delta_{s,t}^{'',,,} f'_\alpha f'''_\beta - 375 \Delta_{i,j,k}^{',",,,,} \Delta_{p,q,r}^{',",,,} \Delta_{s,t}^{',,,} f''_\alpha f''_\beta + \\
& + 840 \Delta_{i,j,k}^{',",,,,} \Delta_{p,q,r}^{',",,,} \Delta_{s,t}^{',,,} f''_\alpha f''_\beta + 180 \Delta_{i,j,k}^{',",,,,} \Delta_{p,q,r}^{',",,,} \Delta_{s,t}^{',,,} f''_\alpha f''_\beta + \\
& + 144 \Delta_{i,j,k}^{',",,,,} \Delta_{p,q,r}^{',",,,} \Delta_{s,t}^{',,,} f''_\alpha f''_\beta + 144 \Delta_{i,j,k}^{',",,,,} \Delta_{p,q,r}^{',",,,} \Delta_{s,t}^{',,,} f''_\alpha f''_\beta - \\
& - 1440 \Delta_{i,j,k}^{',",,,,} \Delta_{p,q,r}^{',",,,} \Delta_{s,t}^{',,,} f''_\alpha f'''_\beta + 480 \Delta_{i,j,k}^{',",,,,} \Delta_{p,q,r}^{',",,,} \Delta_{s,t}^{',,,} f''_\alpha f'''_\beta,
\end{aligned}$$

où les indices romains satisfont $1 \leq i < j < k \leq 4$, où $1 \leq p < q < r \leq 4$, où $1 \leq s < r \leq 4$ et où les indices grecs α, β satisfont sans restriction $1 \leq \alpha, \beta \leq 4$, d'où en définitive, le nombre total d'invariants engendrant l'algèbre de Demainly-Semple E_4^4 est égal à :

$$\begin{aligned}
& 1 + 4 + 6 + 24 + 96 + 4 + 16 + 64 + \\
& + 36 + 24 + 96 + 384 + 64 + 96 + 384 + 1536 = \boxed{2835}.
\end{aligned}$$

Insights Towards the Speculative Thought of Formal Computations

JOËL MERKER

DMA, École Normale Supérieure, Paris

LATP, Université de Provence, Marseille

www.dma.ens.fr/~merker/

I – Prologue

II – Ideals of polynomials

III – The basic principle of Gröbner bases

IV – Speculative Intermezzo

V – Dickson's lemma

VI – Speculative Intermezzo

VII – Summary

VIII – Buchberger Algorithm

Workshop Mathematical Understanding

Monday 9 June 2008 – Friday 13 June 2008

I – Prologue

- Today :
 - Show **hard formal computations**.
 - Emphasize the **unreasonable openness** of a few deep mathematical questions.
 - Demonstrate the **everywhere denseness** of **residues of mathematical understanding**.
 - Discuss the **metaphysics of symbolic expression swelling**
 - Remind the **Gaussche Strenge**.
- Starting study : The effective treatment of polynomial ideals understood as the aim of systematically controlling Algebra's indefinite potentialities.
- Main example : Classical invariant theory.

Coloring conventions

- **Questions, problems, obstacles, difficulties**
- **Definitions, terminology, easies, new notation, conjectures**
- **Theorems, propositions, assertions, important facts, mathematical symbols**
- **Items, current text**

II – Ideals of polynomials

- **Work in :** \mathbb{R} or in \mathbb{R}^n .
- **Coordinates :** x or (x_1, \dots, x_n) .
- **Polynomials in one variable :**
 - $7x^3 + 5x^2 + 1$
 - $2x + 1$
 - $x(x - 1)(x - 2) \cdots (x - k)$
- **Generally :**
$$P(x) = a_n x^n + a_{n-1} x^{n-1} + \cdots + a_1 x + a_0,$$
where the integer $n \geq 0$ is the **degree** of P and where $a_n, a_{n-1}, \dots, a_1, a_0$ are real constants.
- **Denote the algebras of polynomials :** $\mathbb{R}[x]$.
- **Notion of Ideal :** Collection $\mathcal{J} \subset \mathbb{R}[x]$ of polynomials :
 - Stable under addition :
$$P + Q \in \mathcal{J} \quad \text{whenever both } P, Q \in \mathcal{J}$$
 - Stable under multiplication by **arbitrary** polynomials :
$$r \cdot P \in \mathcal{J} \quad \text{if } P \in \mathcal{J} \text{ for any } r \in \mathbb{R}[x].$$
- **Mathematical disease :** There is a universal quantification over an infinite set of polynomials.

- **Abstract thought of totality** : Manipulate objects abstractly without finitary control. Only operations are finite. Then do we really understand what we touch ?
- **Philosophical feature** : An abstract, concise algebraic definition may somehow hide what is the real size of the involved objects.
- **In fact :**

Lemma. Every ideal of $\mathbb{R}[x]$ is **principal**, namely there exists a single generator $P \in \mathcal{J}$ such that :

$$\mathcal{J} = P \cdot \mathbb{R}[x].$$

- **Consequently** : In one variable, an arbitrary element of an ideal is just P times something, hence we have an **underlying finitary control** of what we manipulate, algebraically speaking.
- **Passage to several variables** : The structure is more complicated : ideals are almost never principal.
- **Example** : The ideal \mathcal{J} of $\mathbb{R}[x_1, x_2]$ generated by x_1 and by x_2 is not principal.

- **More complicated example :** Example : What to think of the following ideal in $\mathbb{C}[\Lambda^3, \Lambda^5, \Lambda^9, M^8, M^{10}, K^{12}]$??

$$\begin{aligned}
& -5\Lambda^5\Lambda^5 + 3\Lambda^3\Lambda^7 \\
& -7\Lambda^5\Lambda^7 + 3\Lambda^3\Lambda^9 \\
& -7\Lambda^7\Lambda^7 + 5\Lambda^5\Lambda^9 \\
& -8\Lambda^5M^8 + 3\Lambda^3M^{10} \\
& -\Lambda^7M^8 + 3\Lambda^3K^{12} \\
& -8\Lambda^7M^8 + 5\Lambda^5M^{10} \\
& -\Lambda^9M^8 + 7\Lambda^5K^{12} \\
& -8\Lambda^9M^8 + 7\Lambda^7M^{10} \\
& -5\Lambda^9M^{10} + 56\Lambda^7K^{12} \\
& -5M^{10}M^{10} + 64M^8K^{12}
\end{aligned}$$

- **Mathematical Understanding :**

Albert Lautman's thesis : One should recognize and reconstitute the problems that lie at the roots of a given theory, *e.g.* the theory of Gröbner bases.

Deeper, Gromovian-Socratic thesis :

- △ Understanding is intrinsically **problematic** ;
- △ Openness is widespread.
- △ Questions stay.

We have to assume that we are very stupid and our natural questions are stupid, and only by hard work, by conceptualizing, working hard, calculating, whatever, we can make good questions or good mathematics. And it's naive to think that we all have intuition or something. It's a stupid opinion. That's what I believe.

Mikhail GROMOV.

- **General question :** How to **organize** computations ?

Thesis. There is an implicit, invisible and incredibly complicated **history of individual paths** followed by various mathematical publications at various ages in some archetypal, incredibly wide “reality”.

- **Implicit history of Gröbner bases :** In their principle, they are omnipresent in 19-th century algebra, especially : Lie, Killing, É. Cartan, Schur, Ricci, Young, Amaldi, ...
- **Modern rebirth of Gröbner bases :** Enhanced by the spreading of symbolic computation softwares.
- **Most of what we, as thinkers, do is almost immediately forgotten.**
- **The virtue of history of mathematics :** To demonstrate us that what we achieve and what we publish is negligible and will almost surely be forgotten.

III – The basic principle of Gröbner bases

- In one variable : Emphasize the highest term :

$$a_n x^n + a_{n-1} x^{n-1} + \cdots + a_1 x + a_0,$$

- In several variables : Choose a **term order** on $\mathbb{R}[x_1, \dots, x_n]$, namely a relation $>$ on monomials :

$$x^\alpha = x_1^{\alpha_1} x_2^{\alpha_2} \cdots x_n^{\alpha_n}$$

having the following properties :

(i) It is a **total ordering**, namely any two x^α and x^β are either $>$, or $<$, or $=$.

(ii) The multiplication by any monomial x^γ **preserves** any relation $x^\alpha > x^\beta$, namely :

$$x^\gamma \cdot x^\alpha > x^\gamma \cdot x^\beta.$$

(iii) The ordering is a **well-ordering** in the sense that every nonempty subset of monomials has a (unique) smallest element.

- Example : The **Lexicographic ordering** : We say :

$$x_1^{\alpha_1} x_2^{\alpha_2} \cdots x_n^{\alpha_n} >_{\text{lex}} x_1^{\beta_1} x_2^{\beta_2} \cdots x_n^{\beta_n}$$

if, in the difference :

$$(\alpha_1 - \beta_1, \dots, \alpha_n - \beta_n),$$

the left-most nonzero entry is positive, e.g. :

$$x_1^1 x_2^2 >_{\text{lex}} x_2^2 x_3^4 \quad \text{and} \quad x_1^3 x_2^2 x_3^4 >_{\text{lex}} x_1^3 x_2^2 x_3^1.$$

- Example : The **Graded Lexicographic Ordering** :

$$x_1^{\alpha_1} x_2^{\alpha_2} \cdots x_n^{\alpha_n} >_{\text{grlex}} x_1^{\beta_1} x_2^{\beta_2} \cdots x_n^{\beta_n}$$

if either

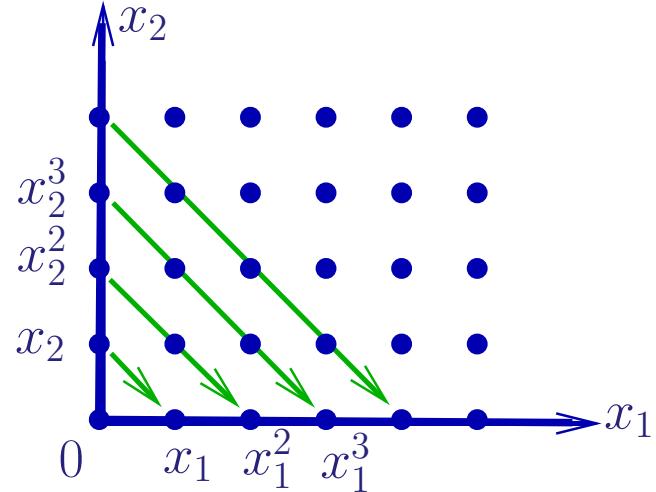
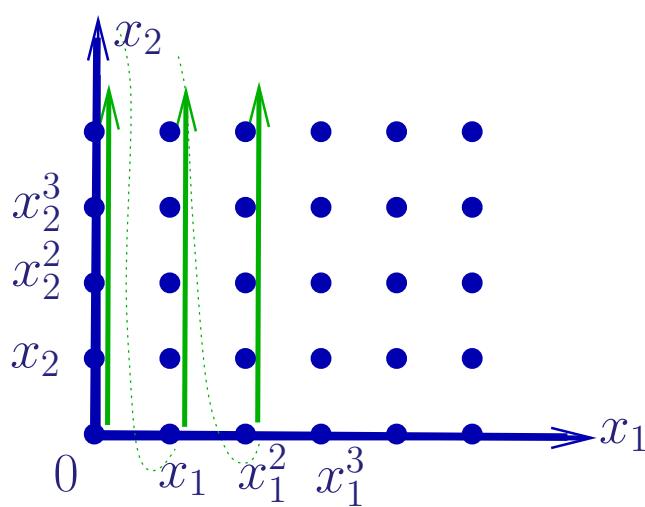
$$\alpha_1 + \cdots + \alpha_n = |\alpha| > |\beta| = \beta_1 + \cdots + \beta_n$$

or if :

$$|\alpha| = |\beta| \quad \text{and} \quad \alpha >_{\text{lex}} \beta.$$

- Mathematical Understanding : When, how and why a definition can be considered to be **understood** ?

- Geometer's opinion : When a **diagrammatic view** immediately exhibits some **global Gestalt of the concept**, possibly dialectical, in order to **feed intuition**.



- More deeply : In any situation, the **mathematician's good reflex** is to pretend for one's mind that :

One has “not yet” understood (everything)

- Socratic-rooted mental perspective :

“Almost never”, do we understand really

IV – Speculative Intermezzo

Thesis. Understanding not only involves absorbing the concepts, it further requires surfing within a certain imprecise, amorphous, space of virtual questions, full of possible thoughts.

- **One of the secrets of mathematical survival :**

Always maintain alive one's precious ignorance

Il ne suffit pas que tu comprennes dans quelle ignorance vivent l'homme et l'animal ; il faut encore que tu aies la volonté d'ignorance et que tu en fasses l'apprentissage. Il est nécessaire pour toi que tu comprennes que sans ce genre d'ignorance la vie elle-même serait impossible, qu'elle est une condition nécessaire pour que le vivant se conserve et prospère : une grande, une solide cloche d'ignorance doit t'enclore de toutes parts.

Friedrich

NIETZSCHE

- **Question-Example :** What are all the possible monomial orders ? Is there any classification ?

- **Question-Example :** Why is the **Graded Reverse Lexicographic** ordering usually more economical in

Gröbner bases computations ?

$$\left\{ \begin{array}{l} x^\alpha >_{\text{grevlex}} x^\beta \text{ if } |\alpha| > |\beta| \\ \text{or if the right-most nonzero entry of } \alpha - \beta \text{ is } < 0. \end{array} \right.$$

- **Example :** Gauss was able to **maintain open** for more than **10 years** the question **why** curvature seemed to only depend on intrinsic metrical data, and for him, answering the “**why**” was nothing but finding his

Theorema Egregium

- **Statement :** For an intrinsic Gaussian metric :

$$ds^2 = E du^2 + 2F dudv + G dv^2$$

on a surface equipped with two local coordinates (u, v) , the Gauss curvature

$$\begin{aligned} \text{curvature} &= \frac{1}{4(EG - F^2)^2} \left\{ E \left[\frac{\partial E}{\partial v} \cdot \frac{\partial G}{\partial v} - 2 \frac{\partial F}{\partial u} \cdot \frac{\partial G}{\partial v} + \left(\frac{\partial G}{\partial u} \right)^2 \right] + \right. \\ &\quad + F \left[\frac{\partial E}{\partial u} \cdot \frac{\partial G}{\partial v} - \frac{\partial E}{\partial v} \cdot \frac{\partial G}{\partial u} - 2 \frac{\partial E}{\partial v} \cdot \frac{\partial F}{\partial v} + 4 \frac{\partial F}{\partial u} \cdot \frac{\partial F}{\partial v} - 2 \frac{\partial F}{\partial u} \cdot \frac{\partial G}{\partial u} \right] + \\ &\quad + G \left[\frac{\partial E}{\partial u} \cdot \frac{\partial G}{\partial u} - 2 \frac{\partial E}{\partial u} \cdot \frac{\partial F}{\partial v} + \left(\frac{\partial E}{\partial v} \right)^2 \right] - \\ &\quad \left. - 2(EG - F^2) \left[\frac{\partial^2 E}{\partial v^2} - 2 \frac{\partial^2 F}{\partial u \partial v} + \frac{\partial^2 G}{\partial u^2} \right] \right\}. \end{aligned}$$

only depends on the coefficients E, F, G .

Thesis. In mathematics, instead of playing the game of formalistically hiding the thought, one should exhibit the speculative, quasi-purely-philosophical tensions which dominate reality and one should intentionally expose theories by regularly emphasizing such tensions.

Thesis. In contact with achieved, difficult, perfected theories, to get for one's mind a true **mathematical understanding**, it is absolutely necessary to reconstruct :

- Some of the problems which lie at the initial core of the theory (Lautman's view).
- The speculative tensions which govern specific organizations of the mathematical exposition.
- The insertion of the theory in some broad unified mathematical perspective.
- The permanent openness of mathematical questions present in-behind.

Mathematics is amazingly compressible : you may struggle a long time, step by step, to work through some process or idea from several approaches. But once you really understand it and have the mental perspective to see it as a whole, there is often a *tremendous mental compression*. You can file it away, recall it quickly and completely when you need it, and use it as just one step in some other mental process. The insight that goes with this compression is one of the real joys of mathematics

William P. THURSTON

Thesis. There is an indefinitely available collection of questions that everybody can raise ; **questioning is just a preliminary act of understanding !**

V – Back to Gröbner bases : Dicskon's lemma

- Choose and fix a monomial order, say Lex.
- File in decreasing order all the mononomials of any polynomial of the ideal \mathcal{J} :

$$7x_1^3x_2 + 5x_1^3x_3 + 8x_1^2x_2^3x_4^5.$$

- Call the highest monomial of a polynomial its Leading Term (*monôme de tête*), just the x^n in one variable.
- Pick the leading monomial of each polynomial P belonging to the ideal \mathcal{J} :

$$\text{LT}(\mathcal{J}) := \text{Ideal generated by} \{ \text{LT}(P) : P \in \mathcal{J} \}.$$

- What happens ?

$$P_1 = x^3y^2 - xy + x$$

$$P_2 = 2x^3y^2 + 7xy + 1$$

$$P_2 - 2P_1 = 9xy - 2x + 1$$

- Unavoidably, new invisible Leading monomials appear in any ideal, because infinitely many combinations still belong to the ideal, by definition !

How to repair such an imperfection ?

- Metaphysical thesis : One must always start by trying to understand some simplest cases which already exhibit some not understood new features.

- **Definition :** An ideal \mathcal{J} in $\mathbb{R}[x_1, \dots, x_n]$ is a **monomial ideal** if it is generated by a collection of monomials, possibly infinite in number.

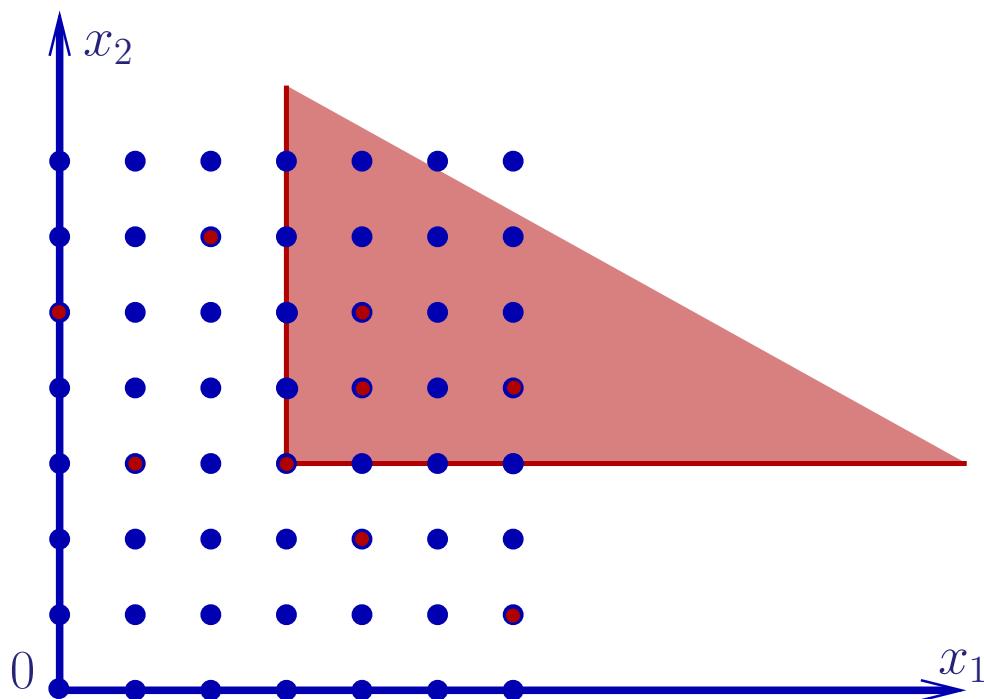
- **Example :**

$$\langle y^5, xy^3, x^2y^6, x^3y^3, x^4y^4, x^4y^5, x^6y, x^6y^4 \rangle.$$

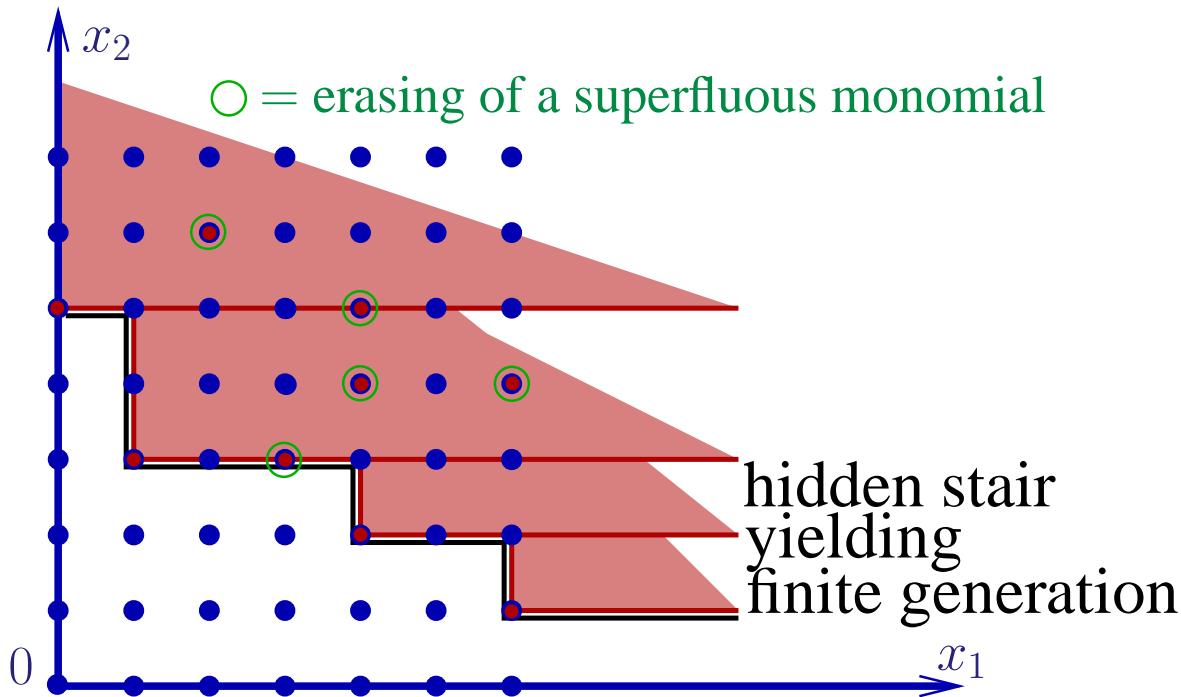
- **Observation :** Then syzygies between leading terms cannot give anything new :

- **Reformulation :** In other words, there is a (possibly infinite) subset $A \subset \mathbb{Z}^n$ such that \mathcal{J} is generated by the x^α for $\alpha \in A$.

Lemma. (DICKSON) A monomial ideal $\mathcal{J} = \langle x^\alpha : \alpha \in A \rangle$ always has a finite number of generators that are all themselves also monomials.



- **Erasing what is inside the shadows** : Every monomial x^α erases all monomials $x^\gamma x^\alpha$, for any $\gamma \in \mathbb{N}^n$ (Ideal!).



- **Conclusion** : This graphically “proves” Dickson’s lemma, because the corners are “visibly” finite in number in **any** case.

Some appropriate acts of speculative thought

- See **why** stair finiteness holds in the **two**-dimensional picture by cooking **visual rigorous arguments**.
- Come back to **dimension one**, confirm, and again **see the why** in another perspective.
- Ask what happens in dimension **three**, draw pictures for one’s mind, and try to **let the arguments have their own animated life** in one’s head.

- **Formal proof** : Two lengthy pages plenty of indices difficult to read.

Thesis. *In order to mathematically understand a specific proof, one should always exploit the duality between formalistically written proofs and :*

visions with questions

which feed intuition by tracing a somehow chaotic path in mathematical abstracta and help to progressively reconstitute for oneself :

- speculative tensions** ;
- mathematical causalities** (Georges BOULIGAND).

- **Coming back to the general case** : Study ideals of general polynomials that are not necessarily monomials.

- **Hope** : By looking at all leading terms $\text{LT}(P)$ of all existing polynomials P in some ideal \mathcal{J} , one could probably reach the desired finitary control.

- **Definition** : Let P and Q be two polynomials in $\mathbb{R}[x_1, \dots, x_n]$, for instance :

$$P = x^3y^2 - x^2y^3 + x,$$

$$Q = 3x^4y + y^2.$$

One may **eliminate** the leading terms by multiplying both P and Q by the appropriate monomials to reach the

least common multiple :

$$3x P = 3x^4y^2 - 3x^3y^3 + 3x^2,$$

$$y Q = 3x^4y^2 + y^3,$$

$$3x P - y Q = -3x^3y^3 + 3x^2 - y^3,$$

and then subtract to remove the leading terms, getting a **new polynomial**, together with a **new leading term**.

- **Definition :** In general, for any two polynomials whose monomials are written in decreasing order by emphasizing at first their leading terms :

$$P = c_p \cdot x^{\alpha^p} + \text{sum lower monomials},$$

$$Q = c_q \cdot x^{\alpha^q} + \text{sum lower monomials},$$

one may define the **S-polynomial**

$$S(P, Q)$$

of **P** and **Q** as follows.

In order to eliminate the leading terms, one multiplies **P** and **Q** by some appropriate monomial :

$$\frac{x^{\gamma - \alpha_p}}{c_p} P = x^\gamma + \text{remainder},$$

$$\frac{x^{\gamma - \alpha_q}}{c_q} Q = x^\gamma + \text{remainder},$$

to reach the *least common multiple monomial* x^γ , where :

$$\gamma_1 = \max(\alpha_1^p, \alpha_1^q), \dots, \gamma_n = \max(\alpha_n^p, \alpha_n^q),$$

and then one subtracts the result. Equivalently, the S-polynomial of P and Q is simply the combination :

$$S(P, Q) = \frac{x^\gamma}{\text{LT}(P)} \cdot P - \frac{x^\gamma}{\text{LT}(Q)} \cdot Q.$$

- **Case of an ideal :** When both P and Q belong to an ideal \mathcal{J} , their S-polynomial also clearly belongs to the ideal.
- **Observation :** The letter S here stands for Syzygy, and indeed, forming an S-polynomial is the process of looking at syzygies (relations) between the leading terms.

VI – Speculative Intermezzo

- **Metaphysical interpretation of the S-polynomial :**
Just the basic, most obvious, most elementary less costful process of chasing new leading terms in our ideal.
- **Analogy :**
 - **Hironaka desingularization theorem :** For any complex analytic subset X of \mathbb{C}^n defined as the zero-set of a finite number of arbitrary holomorphic functions, there is a smooth complex manifold M and a proper complex analytic morphism $\pi : M \rightarrow X$ which is an isomorphism away from the singularities of X (rough statement).
 - **14** interdependent inductions ! (Herwig HAUSER's version, 2002 ; cf. also Ken MANDERS' talk).
 - Huge **mobile** of intertwined quantities.
 - Definition of an invariant, made of orders, labels counting divisors, *etc.*, belonging to \mathbb{N}^{4n} .
 - The desingularization relies upon just **one** very elementary process at each step : blowing up the current analytic set along a certain globally defined **smooth** center which **only** yields a **tiny improvement** of the invariant.

- The theorem then shows how to find the locus where one has to blow up at each step, and it states that the invariant then decreases somehow, somewhere.
- **Here, our basic process is :** Computing the S-polynomial, which gives a new polynomial in our ideal, and a new leading term.

Thesis. MYSTERY OF THE METAPHYSICS OF MATHEMATICS : *How is it possible that some simplest basic processes may come to an end, may be pushed so far as furnishing some apparently satisfactory theorems concerning very complicated objects for which one cannot hope in any case to possess a completely full understanding ?*

- **Scholium :** In fact, already in dimension 3, deingularization is not fully understood.

- **Scholium :** One will never be able to view the structures of all possible ideals of polynomials.

In fact, infinitely many possible precise, meaningful problems of algebraic geometry come down to understanding features of certain polynomial ideals.

- **Some partial answers to such a mystery :**

- Dialectics :** Mathematical “reality” always puts many obstacles on your pedestrian, naive way to a big theorem (LAKATOS).

Lucidity : The signification of your big theorem identifies to the proof you give : it is just one partial path (WITTGENSTEIN) in an incredibly wide “reality” ; stupid Wittgenstein ! He missed this crucial point !).

VII – Summary

- Ideal is infinite, uncontrolled.
- However (Noether's theorem), any ideal of is finitely generated :

$$\begin{aligned}\mathcal{J} &= \langle P_1, \dots, P_k \rangle \\ &= P_1 \cdot \mathbb{R}[x_1, \dots, x_n] + \dots + P_k \cdot \mathbb{R}[x_1, \dots, x_n].\end{aligned}$$

- The goal is to **dominate by a finitary control** the infinity multiplication “ $\cdot \times \mathbb{R}[x_1, \dots, x_n]$ ”.
- We know that when there is just one variable x , by considering the leading term $a_n x^n$ of any polynomial $P(x)$, one easily checks that every ideal \mathcal{J} of $\mathbb{R}[x]$ is principal, namely it is of the form :

$$\mathcal{J} = P \cdot \mathbb{R}[x],$$

for a certain single polynomial $P(x)$.

- We hope that in the context of several variables (x_1, \dots, x_n) , by looking at the leading terms of **all** polynomials in an ideal \mathcal{J} , we could presumably reach some finitary control (which one ? we do'nt really know yet).
- Fortunately, Dickson's lemma shows us that ideals of leading terms are always generated by a finite number of monomials.
- A free process to produce new leading terms is to construct the S-polynomial between any two polynomials in a given ideal.

- **Starting with an ideal** : Noether's theorem assures that there always is a finite number of generators :

$$\mathcal{J} = \langle P_1, \dots, P_k \rangle.$$

- **Then compute all S-polynomials** :

$$S(P_1, P_2), \quad S(P_1, P_3), \quad \dots, \quad S(P_1, P_k), \\ S(P_2, P_3), \quad \dots, \quad S(P_2, P_k),$$

.....

$$S(P_{k-1}, P_k),$$

Principle of Mathematical Economy :
Always remove what is superfluous

- **Must economize some S-polynomials** : Suppose that the leading term of some S-polynomial $S(P_i, P_j)$ belongs to the collection of already known leading terms :

$$\text{LT}(P_1), \dots, \text{LT}(P_k).$$

Then one should **divide** such an S-polynomial $S(P_i, P_j)$ by the already known generators P_1, \dots, P_k , since otherwise, the S-polynomial in question would bring nothing new.

- **Euclidean Division** : Divide $S(P_i, P_j)$ by P_1 :

$$S(P_i, P_j) = 3x^3y^2 - x^2y^3 + x \\ P_1 = xy + y^2$$

$$S(P_i, P_j) - 3x^2yP_1 = -x^2y^3 + x - 3x^2y^2.$$

- **Observation** : Above, as long as the leading term of $P := S(P_i, P_j)$ is the leading term of some P_k , we can do :

Replace P by P minus the appropriate multiple of P_1 .

- **Division algorithm for multivariate polynomials** :

Theorem. Fix a monomial order $>$ on monomials and let $\mathbf{P} = (P_1, \dots, P_k)$ be an ordered k -tuple of polynomials in $\mathbb{R}[x_1, \dots, x_n]$. Then every polynomial $P \in \mathbb{R}[x_1, \dots, x_n]$ can be written as :

$$P = q_1 \cdot P_1 + \dots + q_k \cdot P_k + \mathbf{r},$$

where $q_i, \mathbf{r} \in \mathbb{R}[x_1, \dots, x_n]$ and either $\mathbf{r} = 0$ or \mathbf{r} is a linear combination of monomials, none of which is divisible by $\text{LT}(f_1), \dots, \text{LT}(f_k)$. We will call \mathbf{r} a **remainder** of P on division by (P_1, \dots, P_k) .

- **Algorithm** : At each step, read in the specified order the leading terms $\text{LT}(P_1), \dots, \text{LT}(P_k)$, test whether any $\text{LT}(P_i)$ divides the leading term $\text{LT}(P)$ of the current form of P , and if the first encountered $\text{LT}(P_i)$ divides $\text{LT}(P)$, then divide P by this P_i , and by no further P_k .

- **Speculative observation** : **Imperfection** of such a division algorithm : the process in general **depends upon the order** in which one lists the polynomials P_1, \dots, P_k . The division would in general give another remainder $\widehat{\mathbf{r}}$ for any other listing.

VIII – Buchberger Algorithm

- Start with an ideal :

$$\mathcal{J} = \langle P_1, \dots, P_k \rangle$$

- Compute all the S-polynomials $S(P_i, P_j)$ and compute their remainder on division by the list P_1, \dots, P_k .
- Call Q_{ij} the resulting polynomials.
- By construction, either Q_{ij} is identically zero, or the leading term of Q_{ij} does not divide any leading term $\text{LT}(P_1), \dots, \text{LT}(P_k)$.
- If all the Q_{ij} are zero, the algorithm stops.
- Otherwise, add to the list all the nonzero Q_{ij} .
- Call the so obtained new list $P_1, \dots, P_k, P_{k+1}, \dots, P_l$.
- Restart the same game with this new list.

Metaphysical principle of the process

Add missing polynomials
Hope to erase the imperfections
Fill in the list until stabilization

- **The theorem is :** Such a process always stops after a finite number of steps.

The final list reaches a perfect harmony

Theorem. (CHARACTERIZING GRÖBNER BASES)

Let P_1, \dots, P_k be generators of an ideal \mathcal{J} of $\mathbb{R}[x_1, \dots, x_n]$:

$$\mathcal{J} = \langle P_1, P_2, \dots, P_n \rangle.$$

Call these generators a **Gröbner basis** provided at least one among the following mutually equivalent conditions holds true :

- (i) For every element $P \in \mathcal{J}$ of the ideal, the leading term of P is divisible by the leading term of some P_i .
- (ii) For every element $P \in \mathcal{J}$, the remainder of P on division by the generators P_1, \dots, P_k is zero.
- (iii) For every two polynomials P_i and P_j among the generators, the S-polynomial $S(P_i, P_j)$ has zero remainder on division by the generators P_1, \dots, P_k .
- (iv) For every polynomial $P \in \mathbb{R}[x_1, \dots, x_n]$, there is a **unique** remainder of P on division by the generators P_1, \dots, P_k .

Remainder of the talk

Some features of Demainly-Semple jets

Kobayashi hyperbolicity conjecture

And invariant theory

- **Diophante's realm** : Search **integer** or **rational** solutions of polynomial equations :

$$0 = P(X, Y, Z, \dots, T).$$

- **Example** :

$$0 = 1 - X^{27} + Y^9 - Z^8,$$

$$0 = 2X + Y^3 - 7XZ^2 + 240YZ^4.$$

- **Comment** : Integers in Arithmetic and Polynomials in Algebra both enjoy indefinite, free generativity

Réservoir inépuisable de réalité mathématique potentielle

- **Robinson, Matyjaszewitch** : Intrinsic undecidability of Hilbert's Tenth Problem :

No universal algorithm to decide existence of solutions

- **Serge Lang's conjecture** : For almost all polynomials $P(X, Y, Z, \dots, T)$ of high degree, the number of solutions having rational coordinates is finite.

- Working now over complex numbers : **Complex Projective Space** : $\mathbb{P}^n(\mathbb{C})$, considered as the affine space \mathbb{C}^n to which a copy of \mathbb{C}^n at infinity is added.

- Homogeneous coordinates on $\mathbb{P}^n(\mathbb{C})$:

$$[z_0 : z_1 : z_2 : \cdots : z_n].$$

with the z_i not all zero and with the convention of identifying, for any nonzero complex number λ , any two multiple points :

$$[z_0 : \cdots : z_n] \equiv [\lambda z_0 : \cdots : \lambda z_n]$$

- Homogeneous polynomial equations : Thus, consider a homogeneous polynomial in $[z_0 : z_1 : \cdots : z_n]$.

- Kobayashi Hyperbolicity Conjecture (1970) : For general coefficients $a_{\alpha_0 \dots \alpha_n}$, the complex algebraic hypersurface of degree d defined as set X of projective points $[z_0 : z_1 : \cdots : z_n]$ where the polynomial vanishes :

$$X = \left\{ [z_0 : \cdots : z_n] : \sum_{\substack{\alpha \in \mathbb{N}^{n+1} \\ |\alpha|=d}} a_{\alpha_0 \dots \alpha_n} \cdot z_0^{\alpha_0} \cdots z_n^{\alpha_n} = 0 \right\}$$

is **Kobayashi-hyperbolic** (taking account of Brody's 1978 theorem), namely every entire holomorphic map :

$$f : \mathbb{C} \rightarrow X$$

must be **constant**, provided the degree d of X is high enough.

- Open question : Understand the algebraic structure of the bundle of polynomials in the jet of an entire map that are **invariant under reparametrization**.

- **Basic idea** : From the constraint equation :

$$0 = P(f_0(\zeta), f_1(\zeta), \dots, f_n(\zeta)),$$

saying that $f(\zeta)$ lies in X for all $\zeta \in \mathbb{C}$, one may infinitely many more equations by just differentiating with respect to ζ ,

- **Strong Hope of specialists** (SIU, DEMAILLY) :

“**Understanding jets** would conduct to **optimal degree**.”

- **Lower the degree bound** on generic algebraic varieties $X \subset \mathbb{P}^n(\mathbb{C})$ for them to be **hyperbolic**.
- **Construct global differential equations vanishing on an ample line bundle** (skipped).
- **Ahlfors-Schwarz lemma** (skipped).

Only expose the algebraic problem

- **Definition** : In a local chart, denote by :

$$j^\kappa f := (f'_1, \dots, f'_n, f''_1, \dots, f''_n, \dots, f_1^{(\kappa)}, \dots, f_n^{(\kappa)})$$

the jet of order κ of a holomorphic map :

$$f = (f_1, f_2, \dots, f_n) : \mathbb{C} \longrightarrow X^n,$$

We seek the polynomials $P = P(j^\kappa f)$ such that :

$$P(j^\kappa(f \circ \phi)) = (\phi')^m P((j^\kappa f) \circ \phi),$$

for every local reparametrization $U \xrightarrow{\phi} \phi(U) \subset \mathbb{C}$, of the disc, where $m \geq 1$ is the **weight** of the polynomial.

- **Concretely :** Basic high-school formula for the derivative of the composition of the i -th component f_i with the reparametrization ϕ :

$$(f_i \circ \phi)' = f'_i \cdot \phi',$$

where we abbreviate f'_i for $f'_i \circ \phi$.

- **Second and third derivative :**

$$(f_i \circ \phi)'' = f''_i \cdot \phi' \phi' + f'_i \cdot \phi'',$$

$$(f_i \circ \phi)''' = f'''_i \cdot \phi' \phi' \phi' + 3 f''_i \cdot \phi' \phi'' + f'_i \cdot \phi'''.$$

- **Demailly 1997 :** In the case $n = 2, \kappa = 2$, There are only three fundamental polynomials invariant under reparametrizations :

$$f'_1, \quad f'_2, \quad \begin{vmatrix} f'_1 & f'_2 \\ f''_1 & f''_2 \end{vmatrix}.$$

- **Check invariance :**

$$\begin{vmatrix} f'_1 \phi' \\ f''_1 \phi' \phi' + f'_1 \phi'' & f'_2 \phi' \\ f''_2 \phi' \phi' + f'_2 \phi'' \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} f'_1 & f'_2 \\ f''_1 & f''_2 \end{vmatrix}.$$

- **Further derivatives up to order $\kappa = 5$:** Setting $g_i := f_i \circ \phi$ for $i = 1, \dots, n$, further derivations provide derivatives of g_i with respect to the source variable

$\zeta \in \mathbb{C} :$

$$\begin{aligned} g'_i &= \phi' f'_i, \\ g''_i &= \phi'' f'_i + \phi'^2 f''_i, \\ g'''_i &= \phi''' f'_i + 3\phi'' \phi' f''_i + \phi'^3 f'''_i, \\ g''''_i &= \phi'''' f'_i + 4\phi'''' \phi' f''_i + 3\phi''^2 f''_i + 6\phi'' \phi'^2 f'''_i + \phi'^4 f''''_i, \\ g'''''_i &:= \phi''''' f'_i + 5\phi''''' \phi' f''_i + 10\phi'''' \phi'' f''_i + 15\phi''^2 \phi' f'''_i + \\ &\quad + 10\phi'''' \phi'^2 f'''_i + 10\phi'' \phi'^3 f''''_i + \phi'^5 f'''''_i. \end{aligned}$$

- **Mathematical understanding :** Is there a general formula ?
- **Clear necessity :** To treat Demailly's general problem, one must at least be able to write down such a general formula :

$$g_i^{(\kappa)} = \phi^{(\kappa)} f'_i + \kappa \phi^{(\kappa-1)} \phi' f''_i + \text{complicated terms}$$

before trying to find the desired polynomials satisfying :

$$P(g', \dots, g^{(\kappa)}) = (\phi')^m P(f', \dots, f^{(\kappa)}),$$

isn't it ?

- **Faà di Bruno formula :**

$$g_i^{(\kappa)} = \sum_{e=1}^{\kappa} \sum_{1 \leqslant \lambda_1 < \dots < \lambda_e \leqslant \kappa} \sum_{\mu_1 \geqslant 1, \dots, \mu_e \geqslant 1} \sum_{\mu_1 \lambda_1 + \dots + \mu_e \lambda_e = \kappa} \frac{\kappa!}{(\lambda_1!)^{\mu_1} \mu_1! \cdots (\lambda_e!)^{\mu_e} \mu_e!} (\phi^{(\lambda_1)})^{\mu_1} \cdots (\phi^{(\lambda_e)})^{\mu_e} f_i^{(\mu_1 + \dots + \mu_e)}.$$

- **Mathematical understanding :** Read ; Compare ;

- Denote : for all $\alpha, \beta \geq 1$:

$$\Delta^{\alpha, \beta} := \begin{vmatrix} f_1^{(\alpha)} & f_2^{(\alpha)} \\ f_1^{(\beta)} & f_2^{(\beta)} \end{vmatrix}.$$

- Examples :

$$\Delta^{1,2} = \begin{vmatrix} f'_1 & f'_2 \\ f''_1 & f''_2 \end{vmatrix}, \quad \Delta^{2,3} = \begin{vmatrix} f''_1 & f''_2 \\ f'''_1 & f'''_2 \end{vmatrix}.$$

- Introduce :

$$\Lambda^3 := \Delta^{1,2},$$

$$\Lambda_1^5 := \Delta^{1,3} f'_1 - 3 \Delta^{1,2} f''_1$$

$$\Lambda_2^5 := \Delta^{1,3} f'_2 - 3 \Delta^{1,2} f''_2$$

Theorem. (DEMAILLY ; ROUSSEAU ; 2005) In dimension $n = 2$ and for jets of order $\kappa = 3$, every polynomial $P(j^3 f)$ invariant by reparametrization writes uniquely :

$$P(j^3 f) = \mathcal{P}(f'_1, f'_2, \Lambda_1^5, \Lambda_2^5) + \Lambda^3 \mathcal{Q}(f'_1, f'_2, \Lambda_1^5, \Lambda_2^5),$$

with arbitrary polynomials \mathcal{P} and \mathcal{Q} .

- Unique syzygie :

$$0 \equiv f'_2 \Lambda_1^5 - f'_1 \Lambda_2^5 - 3 \Lambda^3 \Lambda^3,$$

- We admit : Only what one calls **bi-invariants** do appear in the Schur decomposition of the Demainly bundle $E_{\kappa, m}^n T_X^*$.

- It suffices to seek directly the polynomials invariant by reparametrization $P^{\text{inv}}(j^4 f)$ that are also invariant by the unipotent action :

$$\mathbf{u} := \begin{pmatrix} 1 & \textcolor{teal}{u} \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \quad \mathbf{u} \cdot f_1^{(\lambda)} = f_1^{(\lambda)} \quad \mathbf{u} \cdot f_2^{(\lambda)} = f_2^{(\lambda)} + \textcolor{teal}{u} f_1^{(\lambda)},$$

where $\textcolor{teal}{u} \in \mathbb{C}$, for every λ such that $1 \leq \lambda \leq \kappa$, namely which satisfy :

$$P^{\text{inv}}(\mathbf{u} \cdot j^4 f) \equiv P^{\text{inv}}(j^4 f),$$

for every $\textcolor{teal}{u} \in \mathbb{C}$.

- Call them **bi-invariants**.

- Example : For $n = 2$ and $\kappa = 2$, the fundamental bi-invariant polynomials are :

$$f'_1 \quad \text{and} \quad \begin{vmatrix} f'_1 & f'_2 \\ f''_1 & f''_2 \end{vmatrix}$$

- We admit :

A bi-invariant monomial \iff A Schur bundle $\Gamma^{(\bullet)} T_X^*$

Theorem. (M. 2007) In dimension **2** for jets of order **4**, every bi-invariant polynomial writes uniquely :

$$Q(f'_1, \Lambda^3, \Lambda_{1,1}^7, M^8) + \Lambda_1^5 R(f'_1, \Lambda^3, \Lambda_{1,1}^7, M^8),$$

where **Q** and **R** are arbitrary polynomials of weight **m** and **m - 5** and where the five fundamental bi-invariant polynomials :

$$(f'_1 \quad \Lambda^3 \quad \Lambda_1^5 \quad \Lambda_{1,1}^7 \quad M^8),$$

are explicitly defined by :

$$f'_1$$

$$\Lambda^3 := \Delta^{1,2}$$

$$\Lambda_1^5 := \Delta^{1,3} f'_1 - 3 \Delta^{1,2} f''_1$$

$$\Lambda_{1,1}^7 := \Delta^{1,4} f'_1 f'_1 + 4 \Delta^{2,3} f'_1 f'_1 - 10 \Delta^{1,3} f'_1 f''_1 + \\ + 15 \Delta^{1,2} f''_1 f''_1,$$

$$M^8 := 3 \Delta^{1,4} \Delta^{1,2} + 12 \Delta^{2,3} \Delta^{1,2} - 5 \Delta^{1,3} \Delta^{1,3}$$

and are visibly doubly invariant. Furthermore, the ideal of relations between these five polynomials is principal :

$$0 \equiv f'_1 f'_1 M^8 - 3 \Lambda^3 \Lambda_{1,1}^7 + 5 \Lambda_1^5 \Lambda_1^5.$$

- **Question :** How to grasp the Demailly invariants in general ?

An inappropriate algorithm

- **Question :** How to generate all fundamental invariants ?
- **Cross-product between invariants :** Suppose we know two invariants P of weight m and Q of weight n :

$$P(j^\kappa g) = (\phi')^m P((j^\kappa f) \circ \phi),$$

$$Q(j^\tau g) = (\phi')^n Q((j^\tau f) \circ \phi),$$

where we have set $g := f \circ \phi$.

- **To differentiate** with respect to the variable $z \in \mathbb{C}$ amounts to applying the **total differentiation operator** :

$$D := \sum_{\lambda \in \mathbb{N}} \frac{\partial(\bullet)}{\partial f^{(\lambda)}} \cdot f^{(\lambda+1)},$$

which gives here :

$$[DP](j^{\kappa+1}g) = m \phi'' \phi'^{m-1} P((j^\kappa f) \circ \phi) + \\ + \phi'^m \phi' [DP]((j^{\kappa+1}f) \circ \phi),$$

$$[DQ](j^{\tau+1}g) = n \phi'' \phi'^{n-1} Q((j^\tau f) \circ \phi) + \\ + \phi'^n \phi' [DQ]((j^{\tau+1}f) \circ \phi).$$

- **One must eliminate the second derivative ϕ'' .**

- Perform the **cross-product** :

$$\begin{aligned}
& \left| \begin{array}{cc} [\text{DP}] (j^{\kappa+1} g) & m \text{P}(j^\kappa g) \\ [\text{DQ}] (j^{\tau+1} g) & n \text{Q}(j^\tau g) \end{array} \right| = \\
&= \left| \begin{array}{cc} m \phi'' \phi'^{m-1} \text{P}((j^\kappa f) \circ \phi) + \phi'^{m+1} [\text{DP}] ((j^{\kappa+1} f) \circ \phi) & m \phi'^m \text{P}((j^\kappa f) \circ \phi) \\ n \phi'' \phi'^{n-1} \text{Q}((j^\kappa f) \circ \phi) + \phi'^{n+1} [\text{DQ}] ((j^{\tau+1} f) \circ \phi) & n \phi'^n \text{Q}((j^\kappa f) \circ \phi) \end{array} \right| \\
&= \left| \begin{array}{cc} \phi'^{m+1} [\text{DP}] ((j^{\kappa+1} f) \circ \phi) & m \phi'^m \text{P}((j^\kappa f) \circ \phi) \\ \phi'^{n+1} [\text{DQ}] ((j^{\tau+1} f) \circ \phi) & n \phi'^n \text{Q}((j^\kappa f) \circ \phi) \end{array} \right| \\
&= \phi'^{m+n+1} \left| \begin{array}{cc} [\text{DP}] (j^{\kappa+1} f) & m \text{P}(j^\kappa f) \\ [\text{DQ}] (j^{\tau+1} f) & n \text{Q}(j^\tau f) \end{array} \right|
\end{aligned}$$

and obtain a new invariant of weight $m + n + 1$.

Observation. Every pair of invariants automatically produces a new invariant :

$$[\text{P}, \text{Q}] := n \text{DP} \cdot \text{Q} - m \text{P} \cdot \text{DQ},$$

which visibly is skew-symmetric in P and Q .

- **Three generatig families of syzygies :**

$$(\mathcal{J}ac) \quad 0 \equiv [[\text{P}, \text{Q}], \text{R}] + [[\text{R}, \text{P}], \text{Q}] + [[\text{Q}, \text{R}], \text{P}].$$

$$(\mathcal{Plck}_1) \quad 0 \equiv m \text{P} [\text{Q}, \text{R}] + o \text{R} [\text{P}, \text{Q}] + n \text{Q} [\text{R}, \text{P}].$$

$$(\mathcal{Plck}_2) \quad 0 \equiv [\text{P}, \text{Q}] \cdot [\text{R}, \text{S}] + [\text{S}, \text{P}] \cdot [\text{R}, \text{Q}] + [\text{Q}, \text{S}] \cdot [\text{R}, \text{P}].$$

- **Fact :** All previously known descriptions of Demainly jets were built by taking brackets between invariants from the lower order jet-level.

- **Counterexample :** (M., 2007) For jets of order $\kappa = 5$ in dimension $n = 2$, one has exactly **11** principal bi-invariants obtained by taking all the possible brackets between the **5** bi-invariants at the previous level $\kappa = 4$:

$$f'_1, \quad \Lambda^3, \quad \Lambda_1^5, \quad \Lambda_{1,1}^7, \quad M^8,$$

namely the following brackets :

$$\begin{aligned}\Lambda_{1,1,1}^9 &:= [\Lambda_{1,1}^7, f'_1] \\ M_1^{10} &:= [M^8, f'_1] \\ N^{12} &:= [M^8, \Lambda^3] \\ K_{1,1}^{12} &:= [\Lambda_{1,1}^7, \Lambda_1^5] / f'_1 \\ H_1^{14} &:= [M^8, \Lambda_1^5] \\ F_{1,1}^{16} &:= [M^8, \Lambda_{1,1}^7]\end{aligned}$$

- **But there are 6 further bi-invariants :**

$$X^{18}$$

$$X^{19}$$

$$X^{21}$$

$$X^{23}$$

$$X^{25}$$

$$Y^{27}$$

and in the list of these **17** bi-invariants, no one identifies with any polynomial in the remaining 16 bi-invariants.

- **Explicit expressions :** Below, the indices i, j, k are equal to 1 or 2.

$$f'_i$$

$$\Lambda^3 := \Delta^{1,2}$$

$$\Lambda_i^5 := \Delta^{1,3} f'_i - 3 \Delta^{1,2} f''_i$$

$$\Lambda_{i,j}^7 := \Delta^{1,4} f'_i f'_j + 4 \Delta^{2,3} f'_i f'_j - 5 \Delta^{1,3} (f''_i f'_j + f'_i f''_j) + 15 \Delta^{1,2} f''_i f''_j$$

$$M^8 := 3 \Delta^{1,4} \Delta^{1,2} + 12 \Delta^{2,3} \Delta^{1,2} - 5 \Delta^{1,3} \Delta^{1,3}$$

$$\begin{aligned} \Lambda_{i,j,k}^9 := & \Delta^{1,5} f'_i f'_j f'_k + 5 \Delta^{2,4} f'_i f'_j f'_k - \\ & - 4 \Delta^{1,4} (f''_i f'_j + f'_i f''_j) f'_k - 7 \Delta^{1,4} f'_i f'_j f''_k - \\ & - 16 \Delta^{2,3} (f''_i f'_j + f'_i f''_j) f'_k - 28 \Delta^{2,3} f'_i f'_j f''_k - \\ & - 5 \Delta^{1,3} (f'''_i f'_j + f'_i f'''_j) f'_k + 35 \Delta^{1,3} (f''_i f''_j f'_k + f''_i f'_j f''_k + f'_i f''_j f''_k) - \\ & - 105 \Delta^{1,2} f''_i f''_j f''_k, \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} M_i^{10} := & [3 \Delta^{1,5} \Delta^{1,2} + 15 \Delta^{2,4} \Delta^{1,2} - 7 \Delta^{1,4} \Delta^{1,3} + 2 \Delta^{2,3} \Delta^{1,3}] f'_i - \\ & - [24 \Delta^{1,4} \Delta^{1,2} + 96 \Delta^{2,3} \Delta^{1,2} - 40 \Delta^{1,3} \Delta^{1,3}] f''_i, \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} N^{12} := & 9 \Delta^{1,5} \Delta^{1,2} \Delta^{1,2} + 45 \Delta^{2,4} \Delta^{1,2} \Delta^{1,2} - 45 \Delta^{1,4} \Delta^{1,3} \Delta^{1,2} - \\ & - 90 \Delta^{2,3} \Delta^{1,3} \Delta^{1,2} + 40 \Delta^{1,3} \Delta^{1,3} \Delta^{1,3}, \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} K_{i,j}^{12} := & f'_i f'_j \left(5 \Delta^{1,5} \Delta^{1,3} + 25 \Delta^{2,4} \Delta^{1,3} - 7 \Delta^{1,4} \Delta^{1,4} - 56 \Delta^{2,3} \Delta^{1,4} - 112 \Delta^{2,3} \Delta^{2,3} \right) + \\ & + \frac{(f'_i f''_j + f''_i f'_j)}{2} \left(- 15 \Delta^{1,5} \Delta^{1,2} - 75 \Delta^{2,4} \Delta^{1,2} + 65 \Delta^{1,4} \Delta^{1,3} + 110 \Delta^{2,3} \Delta^{1,3} \right) + \\ & + \frac{(f'_i f'''_j + f'''_i f'_j)}{2} \left(- 50 \Delta^{1,3} \Delta^{1,3} \right) + \\ & + f''_i f''_j \left(- 25 \Delta^{1,3} \Delta^{1,3} + 15 \Delta^{1,4} \Delta^{1,2} + 60 \Delta^{2,3} \Delta^{1,2} \right), \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} H_i^{14} := & \left(15 \Delta^{1,5} \Delta^{1,3} \Delta^{1,2} + 75 \Delta^{2,4} \Delta^{1,3} \Delta^{1,2} + 5 \Delta^{1,4} \Delta^{1,3} \Delta^{1,3} + \right. \\ & + 170 \Delta^{2,3} \Delta^{1,3} \Delta^{1,3} - 24 \Delta^{1,4} \Delta^{1,4} \Delta^{1,2} - 192 \Delta^{1,4} \Delta^{2,3} \Delta^{1,2} - \\ & - 384 \Delta^{2,3} \Delta^{2,3} \Delta^{1,2} \Big) f'_i + \left(- 45 \Delta^{1,5} \Delta^{1,2} \Delta^{1,2} - 225 \Delta^{2,4} \Delta^{1,2} \Delta^{1,2} + \right. \\ & + 225 \Delta^{1,4} \Delta^{1,3} \Delta^{1,2} + 450 \Delta^{2,3} \Delta^{1,3} \Delta^{1,2} - 200 \Delta^{1,3} \Delta^{1,3} \Delta^{1,3} \Big) f''_i, \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
F_{i,j}^{16} := & \left(-3 \Delta^{1,5} \Delta^{1,4} \Delta^{1,2} - 15 \Delta^{2,4} \Delta^{1,4} \Delta^{1,2} - 12 \Delta^{1,5} \Delta^{2,3} \Delta^{1,2} + \right. \\
& + 40 \Delta^{1,5} \Delta^{1,3} \Delta^{1,3} - 60 \Delta^{2,4} \Delta^{2,3} \Delta^{1,2} + 200 \Delta^{2,4} \Delta^{1,3} \Delta^{1,3} - \\
& - 49 \Delta^{1,4} \Delta^{1,4} \Delta^{1,3} - 422 \Delta^{1,4} \Delta^{2,3} \Delta^{1,3} - 904 \Delta^{2,3} \Delta^{2,3} \Delta^{1,3} \Big) f'_i f'_j + \\
& + \left(-105 \Delta^{1,5} \Delta^{1,3} \Delta^{1,2} - 525 \Delta^{2,4} \Delta^{1,3} \Delta^{1,2} + 205 \Delta^{1,4} \Delta^{1,3} \Delta^{1,3} - \right. \\
& - 230 \Delta^{2,3} \Delta^{1,3} \Delta^{1,3} + 96 \Delta^{1,4} \Delta^{1,4} \Delta^{1,2} + 768 \Delta^{1,4} \Delta^{2,3} \Delta^{1,2} + \\
& + 1536 \Delta^{2,3} \Delta^{2,3} \Delta^{1,2} \Big) (f''_i f'_j + f'_i f''_j) + \\
& + \left(-200 \Delta^{1,3} \Delta^{1,3} \Delta^{1,3} \right) (f'''_i f'_j + f'_i f'''_j) + \\
& + \left(315 \Delta^{1,5} \Delta^{1,2} \Delta^{1,2} + 1575 \Delta^{2,4} \Delta^{1,2} \Delta^{1,2} - 1575 \Delta^{1,4} \Delta^{1,3} \Delta^{1,2} - \right. \\
& - 3150 \Delta^{2,3} \Delta^{1,3} \Delta^{1,2} + 1400 \Delta^{1,3} \Delta^{1,3} \Delta^{1,3} \Big) f''_i f''_j,
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
X^{18} := & \frac{-5 \Lambda_{1,1,1}^9 M_1^{10} + 56 \Lambda_{1,1}^7 K_{1,1}^{12}}{f'_1} \\
= & f'_1 f'_1 f'_1 \left(-18816 \Delta^{1,4} [\Delta^{2,3}]^2 - 25088 [\Delta^{2,3}]^3 - 15 [\Delta^{1,5}]^2 \Delta^{1,2} - 150 \Delta^{1,5} \Delta^{2,4} \Delta^{1,2} \right. \\
& + 315 \Delta^{1,5} \Delta^{1,4} \Delta^{1,3} + 960 \Delta^{1,5} \Delta^{2,3} \Delta^{1,3} - 375 [\Delta^{2,4}]^2 \Delta^{1,2} + 1575 \Delta^{2,4} \Delta^{1,4} \Delta^{1,3} \\
& + 4800 \Delta^{2,4} \Delta^{2,3} \Delta^{1,3} - 392 [\Delta^{1,4}]^3 - 4704 [\Delta^{1,4}]^2 \Delta^{2,3} \Big) - f'_1 f'_1 f''_1 \left(-2475 \Delta^{2,4} \Delta^{1,4} \Delta^{1,2} \right. \\
& - 9900 \Delta^{2,4} \Delta^{2,3} \Delta^{1,2} - 2850 \Delta^{1,5} [\Delta^{1,3}]^2 + 51330 \Delta^{1,4} \Delta^{2,3} \Delta^{1,3} \\
& + 92760 [\Delta^{2,3}]^2 \Delta^{1,3} - 14250 \Delta^{2,4} [\Delta^{1,3}]^2 + 7035 [\Delta^{1,4}]^2 \Delta^{1,3} - 495 \Delta^{1,5} \Delta^{1,4} \Delta^{1,2} \\
& - 1980 \Delta^{1,5} \Delta^{2,3} \Delta^{1,2} \Big) - f'_1 f'_1 f'''_1 \left(-11100 \Delta^{2,3} [\Delta^{1,3}]^2 - 3150 \Delta^{1,4} [\Delta^{1,3}]^2 \right) \\
& + f'_1 f''_1 f'_1 \left(-109440 [\Delta^{2,3}]^2 \Delta^{1,2} - 19050 \Delta^{2,3} [\Delta^{1,3}]^2 - 32325 \Delta^{1,4} [\Delta^{1,3}]^2 \right. \\
& + 11025 \Delta^{1,5} \Delta^{1,3} \Delta^{1,2} + 55125 \Delta^{2,4} \Delta^{1,3} \Delta^{1,2} - 6840 [\Delta^{1,4}]^2 \Delta^{1,2} \\
& - 54720 \Delta^{1,4} \Delta^{2,3} \Delta^{1,2} \Big) - f'_1 f''_1 f'''_1 \left(+30000 [\Delta^{1,3}]^3 \right) - f''_1 f''_1 f''_1 \left(11025 \Delta^{1,5} [\Delta^{1,2}]^2 \right. \\
& - 55125 \Delta^{2,4} [\Delta^{1,2}]^2 + 55125 \Delta^{1,4} \Delta^{1,3} \Delta^{1,2} + 110250 \Delta^{2,3} \Delta^{1,3} \Delta^{1,2} \\
& \left. \left. - 49000 [\Delta^{1,3}]^3 \right) \right).
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
X^{19} := & \frac{-5 M_1^{10} M_1^{10} + 64 M^8 K_{1,1}^{12}}{f'_1} \\
= & f'_1 \left(1170 \Delta^{1,5} \Delta^{1,4} \Delta^{1,3} \Delta^{1,2} - 45 [\Delta^{1,5}]^2 [\Delta^{1,2}]^2 - 450 \Delta^{1,5} \Delta^{2,4} [\Delta^{1,2}]^2 \right. \\
& + 74220 [\Delta^{2,3}]^2 [\Delta^{1,3}]^2 + 3780 \Delta^{1,5} \Delta^{2,3} \Delta^{1,3} \Delta^{1,2} - 1600 \Delta^{1,5} [\Delta^{1,3}]^3 \\
& - 1125 [\Delta^{2,4}]^2 [\Delta^{1,2}]^2 + 5850 \Delta^{2,4} \Delta^{1,4} \Delta^{1,3} \Delta^{1,2} + 18900 \Delta^{2,4} \Delta^{2,3} \Delta^{1,3} \Delta^{1,2} \\
& - 8000 \Delta^{2,4} [\Delta^{1,3}]^3 - 1344 [\Delta^{1,4}]^3 \Delta^{1,2} - 16128 [\Delta^{1,4}]^2 \Delta^{2,3} \Delta^{1,2} + 1995 [\Delta^{1,4}]^2 [\Delta^{1,3}]^2 \\
& - 64512 \Delta^{1,4} [\Delta^{2,3}]^2 \Delta^{1,2} + 27660 \Delta^{1,4} \Delta^{2,3} [\Delta^{1,3}]^2 - 86016 [\Delta^{2,3}]^3 \Delta^{1,2} \Big) \\
& + f''_1 \left(-74400 \Delta^{2,3} [\Delta^{1,3}]^3 - 10800 \Delta^{2,4} \Delta^{1,4} [\Delta^{1,2}]^2 - 2160 \Delta^{1,5} \Delta^{1,4} [\Delta^{1,2}]^2 \right. \\
& - 8640 \Delta^{1,5} \Delta^{2,3} [\Delta^{1,2}]^2 + 3600 \Delta^{1,5} [\Delta^{1,3}]^2 \Delta^{1,2} + 64800 \Delta^{1,4} \Delta^{2,3} \Delta^{1,3} \Delta^{1,2} \\
& - 43200 \Delta^{2,4} \Delta^{2,3} [\Delta^{1,2}]^2 + 18000 \Delta^{2,4} [\Delta^{1,3}]^2 \Delta^{1,2} + 10800 [\Delta^{1,4}]^2 \Delta^{1,3} \Delta^{1,2} \\
& \left. \left. - 27600 \Delta^{1,4} [\Delta^{1,3}]^3 + 86400 [\Delta^{2,3}]^2 \Delta^{1,3} \Delta^{1,2} \right) + f'''_1 \left(16000 [\Delta^{1,3}]^4 \right) \right).
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
X^{21} &:= \frac{-5 M_1^{10} N^{12} + 8 M_1^8 H_1^{14}}{f'_1} \\
&= -135 [\Delta^{1,5}]^2 [\Delta^{1,2}]^3 - 1350 \Delta^{1,5} \Delta^{2,4} [\Delta^{1,2}]^3 + 1350 \Delta^{1,5} \Delta^{1,4} \Delta^{1,3} [\Delta^{1,2}]^2 \\
&\quad + 2700 \Delta^{1,5} \Delta^{2,3} \Delta^{1,3} [\Delta^{1,2}]^2 - 1200 \Delta^{1,5} [\Delta^{1,3}]^3 \Delta^{1,2} - 3375 [\Delta^{2,4}]^2 [\Delta^{1,2}]^3 \\
&\quad + 6750 \Delta^{2,4} \Delta^{1,4} \Delta^{1,3} [\Delta^{1,2}]^2 + 13500 \Delta^{2,4} \Delta^{2,3} \Delta^{1,3} [\Delta^{1,2}]^2 - 6000 \Delta^{2,4} [\Delta^{1,3}]^3 \Delta^{1,2} \\
&\quad - 576 [\Delta^{1,4}]^3 [\Delta^{1,2}]^2 - 6912 [\Delta^{1,4}]^2 \Delta^{2,3} [\Delta^{1,2}]^2 - 495 [\Delta^{1,4}]^2 [\Delta^{1,3}]^2 \Delta^{1,2} \\
&\quad - 27648 \Delta^{1,4} [\Delta^{2,3}]^2 [\Delta^{1,2}]^2 + 9540 \Delta^{1,4} \Delta^{2,3} [\Delta^{1,3}]^2 \Delta^{1,2} + 1200 \Delta^{1,4} [\Delta^{1,3}]^4 \\
&\quad - 36864 [\Delta^{2,3}]^3 [\Delta^{1,2}]^2 + 32580 [\Delta^{2,3}]^2 [\Delta^{1,3}]^2 \Delta^{1,2} - 7200 \Delta^{2,3} [\Delta^{1,3}]^4.
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
X^{23} &:= \frac{-7 N^{12} K_{1,1}^{12} + M_1^8 F_{1,1}^{16}}{f'_1} \\
&= f'_1 \left(432 \Delta^{1,5} [\Delta^{1,4}]^2 [\Delta^{1,2}]^2 + 3456 \Delta^{1,5} \Delta^{1,4} \Delta^{2,3} [\Delta^{1,2}]^2 + 1710 \Delta^{1,5} \Delta^{1,4} [\Delta^{1,3}]^2 \Delta^{1,2} \right. \\
&\quad - 3150 \Delta^{1,5} \Delta^{2,4} \Delta^{1,3} [\Delta^{1,2}]^2 + 540 \Delta^{1,5} \Delta^{2,3} [\Delta^{1,3}]^2 \Delta^{1,2} - 1600 \Delta^{1,5} [\Delta^{1,3}]^4 \\
&\quad - 7875 [\Delta^{2,4}]^2 \Delta^{1,3} [\Delta^{1,2}]^2 + 6912 \Delta^{1,5} [\Delta^{2,3}]^2 [\Delta^{1,2}]^2 - 8000 \Delta^{2,4} [\Delta^{1,3}]^4 \\
&\quad - 2352 [\Delta^{1,4}]^3 \Delta^{1,3} \Delta^{1,2} - 23904 [\Delta^{1,4}]^2 \Delta^{2,3} \Delta^{1,3} \Delta^{1,2} + 2205 [\Delta^{1,4}]^2 [\Delta^{1,3}]^3 \\
&\quad - 78336 \Delta^{1,4} [\Delta^{2,3}]^2 \Delta^{1,3} \Delta^{1,2} + 34740 \Delta^{1,4} \Delta^{2,3} [\Delta^{1,3}]^3 - 81408 [\Delta^{2,3}]^3 \Delta^{1,3} \Delta^{1,2} \\
&\quad + 72180 [\Delta^{2,3}]^2 [\Delta^{1,3}]^3 + 2160 \Delta^{2,4} [\Delta^{1,4}]^2 [\Delta^{1,2}]^2 + 17280 \Delta^{2,4} \Delta^{1,4} \Delta^{2,3} [\Delta^{1,2}]^2 \\
&\quad + 8550 \Delta^{2,4} \Delta^{1,4} [\Delta^{1,3}]^2 \Delta^{1,2} + 34560 \Delta^{2,4} [\Delta^{2,3}]^2 [\Delta^{1,2}]^2 + 2700 \Delta^{2,4} \Delta^{2,3} [\Delta^{1,3}]^2 \Delta^{1,2} \\
&\quad - 315 [\Delta^{1,5}]^2 \Delta^{1,3} [\Delta^{1,2}]^2 \Big) + f''_1 \left(23625 [\Delta^{2,4}]^2 [\Delta^{1,2}]^3 - 47250 \Delta^{2,4} \Delta^{1,4} \Delta^{1,3} [\Delta^{1,2}]^2 \right. \\
&\quad - 94500 \Delta^{2,4} \Delta^{2,3} \Delta^{1,3} [\Delta^{1,2}]^2 + 42000 \Delta^{2,4} [\Delta^{1,3}]^3 \Delta^{1,2} + 576 [\Delta^{1,4}]^3 [\Delta^{1,2}]^2 \\
&\quad + 6912 [\Delta^{1,4}]^2 \Delta^{2,3} [\Delta^{1,2}]^2 + 20745 [\Delta^{1,4}]^2 [\Delta^{1,3}]^2 \Delta^{1,2} + 27648 \Delta^{1,4} [\Delta^{2,3}]^2 [\Delta^{1,2}]^2 \\
&\quad + 945 [\Delta^{1,5}]^2 [\Delta^{1,2}]^3 + 9450 \Delta^{1,5} \Delta^{2,4} [\Delta^{1,2}]^3 - 9450 \Delta^{1,5} \Delta^{1,4} \Delta^{1,3} [\Delta^{1,2}]^2 \\
&\quad - 18900 \Delta^{1,5} \Delta^{2,3} \Delta^{1,3} [\Delta^{1,2}]^2 + 8400 \Delta^{1,5} [\Delta^{1,3}]^3 \Delta^{1,2} + 71460 \Delta^{1,4} \Delta^{2,3} [\Delta^{1,3}]^2 \Delta^{1,2} \\
&\quad - 37200 \Delta^{1,4} [\Delta^{1,3}]^4 + 36864 [\Delta^{2,3}]^3 [\Delta^{1,2}]^2 + 48420 [\Delta^{2,3}]^2 [\Delta^{1,3}]^2 \Delta^{1,2} \\
&\quad \left. - 64800 \Delta^{2,3} [\Delta^{1,3}]^4 \right) + f'''_1 \left(16000 [\Delta^{1,3}]^5 \right).
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
Y^{23} &:= \frac{-8 N^{12} K_{1,1}^{12} + M_1^{10} H_1^{14}}{f'_1} \\
&= X^{23}.
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
X^{25} &:= \frac{-56 K_{1,1}^{12} H_1^{14} + 5 M_1^{10} F_{1,1}^{16}}{f'_1} \\
&= f'_1 f'_1 \left(-45 [\Delta^{1,5}]^2 \Delta^{1,4} [\Delta^{1,2}]^2 - 180 [\Delta^{1,5}]^2 \Delta^{2,3} [\Delta^{1,2}]^2 - 3600 [\Delta^{1,5}]^2 [\Delta^{1,3}]^2 \Delta^{1,2} \right. \\
&\quad - 2800 \Delta^{1,5} \Delta^{1,4} [\Delta^{1,3}]^3 - 83200 \Delta^{1,5} \Delta^{2,3} [\Delta^{1,3}]^3 - 1125 [\Delta^{2,4}]^2 \Delta^{1,4} [\Delta^{1,2}]^2 \\
&\quad - 4500 [\Delta^{2,4}]^2 \Delta^{2,3} [\Delta^{1,2}]^2 - 90000 [\Delta^{2,4}]^2 [\Delta^{1,3}]^2 \Delta^{1,2} - 14000 \Delta^{2,4} \Delta^{1,4} [\Delta^{1,3}]^3 \\
&\quad - 416000 \Delta^{2,4} \Delta^{2,3} [\Delta^{1,3}]^3 - 150528 [\Delta^{1,4}]^3 \Delta^{2,3} \Delta^{1,2} - 903168 [\Delta^{1,4}]^2 [\Delta^{2,3}]^2 \Delta^{1,2} \\
&\quad + 163800 [\Delta^{1,4}]^2 \Delta^{2,3} [\Delta^{1,3}]^2 - 2408448 \Delta^{1,4} [\Delta^{2,3}]^3 \Delta^{1,2} + 1129500 \Delta^{1,4} [\Delta^{2,3}]^2 [\Delta^{1,3}]^2 \\
&\quad - 9408 [\Delta^{1,4}]^4 \Delta^{1,2} + 3675 [\Delta^{1,4}]^3 [\Delta^{1,3}]^2 - 2408448 [\Delta^{2,3}]^4 \Delta^{1,2} + 2132400 [\Delta^{2,3}]^3 [\Delta^{1,3}]^2 \\
&\quad - 450 \Delta^{1,5} \Delta^{2,4} \Delta^{1,4} [\Delta^{1,2}]^2 - 1800 \Delta^{1,5} \Delta^{2,4} \Delta^{2,3} [\Delta^{1,2}]^2 \\
&\quad - 36000 \Delta^{1,5} \Delta^{2,4} [\Delta^{1,3}]^2 \Delta^{1,2} + 11970 \Delta^{1,5} [\Delta^{1,4}]^2 \Delta^{1,3} \Delta^{1,2} \\
&\quad + 187920 \Delta^{1,5} [\Delta^{2,3}]^2 \Delta^{1,3} \Delta^{1,2} + 59850 \Delta^{2,4} [\Delta^{1,4}]^2 \Delta^{1,3} \Delta^{1,2} \\
&\quad + 939600 \Delta^{2,4} [\Delta^{2,3}]^2 \Delta^{1,3} \Delta^{1,2} + 474300 \Delta^{2,4} \Delta^{1,4} \Delta^{2,3} \Delta^{1,3} \Delta^{1,2} \\
&\quad \left. + 94860 \Delta^{1,5} \Delta^{1,4} \Delta^{2,3} \Delta^{1,3} \Delta^{1,2} \right) + f'_1 f''_1 \left(-2556600 \Delta^{1,4} \Delta^{2,3} [\Delta^{1,3}]^3 \right)
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
& -5014200 [\Delta^{2,3}]^2 [\Delta^{1,3}]^3 - 187950 [\Delta^{1,4}]^2 [\Delta^{1,3}]^3 + 5621760 \Delta^{1,4} [\Delta^{2,3}]^2 \Delta^{1,3} \Delta^{1,2} \\
& + 5652480 [\Delta^{2,3}]^3 \Delta^{1,3} \Delta^{1,2} - 2764800 \Delta^{2,4} [\Delta^{2,3}]^2 [\Delta^{1,2}]^2 \\
& + 99000 \Delta^{2,4} \Delta^{2,3} [\Delta^{1,3}]^2 \Delta^{1,2} + 500000 \Delta^{2,4} [\Delta^{1,3}]^4 + 174720 [\Delta^{1,4}]^3 \Delta^{1,3} \Delta^{1,2} \\
& + 1751040 [\Delta^{1,4}]^2 \Delta^{2,3} \Delta^{1,3} \Delta^{1,2} - 276480 \Delta^{1,5} \Delta^{1,4} \Delta^{2,3} [\Delta^{1,2}]^2 \\
& - 105300 \Delta^{1,5} \Delta^{1,4} [\Delta^{1,3}]^2 \Delta^{1,2} - 552960 \Delta^{1,5} [\Delta^{2,3}]^2 [\Delta^{1,2}]^2 \\
& + 19800 \Delta^{1,5} \Delta^{2,3} [\Delta^{1,3}]^2 \Delta^{1,2} + 100000 \Delta^{1,5} [\Delta^{1,3}]^4 + 551250 [\Delta^{2,4}]^2 \Delta^{1,3} [\Delta^{1,2}]^2 \\
& - 172800 \Delta^{2,4} [\Delta^{1,4}]^2 [\Delta^{1,2}]^2 - 1382400 \Delta^{2,4} \Delta^{1,4} \Delta^{2,3} [\Delta^{1,2}]^2 \\
& - 526500 \Delta^{2,4} \Delta^{1,4} [\Delta^{1,3}]^2 \Delta^{1,2} - 34560 \Delta^{1,5} [\Delta^{1,4}]^2 [\Delta^{1,2}]^2 + 22050 [\Delta^{1,5}]^2 \Delta^{1,3} [\Delta^{1,2}]^2 \\
& + 220500 \Delta^{1,5} \Delta^{2,4} \Delta^{1,3} [\Delta^{1,2}]^2 \Big) \\
& + f'_1 f'''_1 \left(28000 \Delta^{1,4} [\Delta^{1,3}]^4 + 472000 \Delta^{2,3} [\Delta^{1,3}]^4 \right) \\
& + f''_1 f''_1 \left(330750 \Delta^{1,5} \Delta^{1,4} \Delta^{1,3} [\Delta^{1,2}]^2 + 661500 \Delta^{1,5} \Delta^{2,3} \Delta^{1,3} [\Delta^{1,2}]^2 \right. \\
& \left. - 294000 \Delta^{1,5} [\Delta^{1,3}]^3 \Delta^{1,2} - 330750 \Delta^{1,5} \Delta^{2,4} [\Delta^{1,2}]^3 \right. \\
& \left. + 1653750 \Delta^{2,4} \Delta^{1,4} \Delta^{1,3} [\Delta^{1,2}]^2 + 3307500 \Delta^{2,4} \Delta^{2,3} \Delta^{1,3} [\Delta^{1,2}]^2 \right. \\
& \left. - 1470000 \Delta^{2,4} [\Delta^{1,3}]^3 \Delta^{1,2} - 2880 [\Delta^{1,4}]^3 [\Delta^{1,2}]^2 - 34560 [\Delta^{1,4}]^2 \Delta^{2,3} [\Delta^{1,2}]^2 \right. \\
& \left. - 812475 [\Delta^{1,4}]^2 [\Delta^{1,3}]^2 \Delta^{1,2} - 138240 \Delta^{1,4} [\Delta^{2,3}]^2 [\Delta^{1,2}]^2 - 33075 [\Delta^{1,5}]^2 [\Delta^{1,2}]^3 \right. \\
& \left. + 1446000 \Delta^{1,4} [\Delta^{1,3}]^4 - 184320 [\Delta^{2,3}]^3 \Delta^{1,2}]^2 - 3077100 [\Delta^{2,3}]^2 [\Delta^{1,3}]^2 \Delta^{1,2} \right. \\
& \left. + 2844000 \Delta^{2,3} [\Delta^{1,3}]^4 - 826875 [\Delta^{2,4}]^2 [\Delta^{1,2}]^3 - 3192300 \Delta^{1,4} \Delta^{2,3} [\Delta^{1,3}]^2 \Delta^{1,2} \right) \\
& + f''_1 f'''_1 \left(- 640000 [\Delta^{1,3}]^5 \right).
\end{aligned}$$

$Y^{27} :=$ Not yet explicitly computed,
but this would be in fact essentially useless.

The adequate algorithm

- Apply the definition :

$$\mathsf{P}(j^4(f \circ \phi)) = \phi'^m \mathsf{P}((j^4 f) \circ \phi),$$

to $\phi := f_1^{-1}$ to get nice formulas :

$$(f_2 \circ f_1^{-1})' = \frac{f'_2}{f'_1} \circ f_1^{-1},$$

$$(f_2 \circ f_1^{-1})'' = \frac{\Lambda^3}{(f'_1)^3} \circ f_1^{-1},$$

$$(f_2 \circ f_1^{-1})''' = \frac{\Lambda_1^5}{(f'_1)^5} \circ f_1^{-1},$$

$$(f_2 \circ f_1^{-1})'''' = \frac{\Lambda_{1,1}^7}{(f'_1)^7} \circ f_1^{-1},$$

whence :

$$\begin{aligned} \mathsf{P}\left(1, \frac{f'_2}{f'_1}, 0, \frac{\Lambda^3}{(f'_1)^3}, 0, \frac{\Lambda_1^5}{(f'_1)^5}, 0, \frac{\Lambda_{1,1}^7}{(f'_1)^7}\right) \circ f_1^{-1} = \\ = \left(\frac{1}{f'_1} \circ f_1^{-1}\right)^m \mathsf{P}((j^4 f \circ f_1^{-1})). \end{aligned}$$

then after reparametrizing by f_1 and simplifying :

$$\boxed{\mathsf{P}(j^4 f) = \sum_{-\frac{3}{4}m \leq a \leq m} (f'_1)^a \mathsf{P}_a(f'_2, \Lambda^3, \Lambda_1^5, \Lambda_{1,1}^7)}.$$

 **Problem :** there are **possibly negative** powers of f'_1 .

?

Why ? But this should be a polynomial !

?

How to **eliminate** negative powers ?

- **Unipotent invariance :**

$$\textcolor{blue}{u} \cdot f'_2 = f'_2 + \textcolor{blue}{u} f'_1,$$

$$\textcolor{blue}{u} \cdot \Lambda^3 = \Lambda^3, \quad \textcolor{blue}{u} \cdot \Lambda_1^5 = \Lambda_1^5, \quad \textcolor{blue}{u} \cdot \Lambda_{1,1}^7 = \Lambda_{1,1}^7,$$

therefore each P_a is in fact **independent** of f'_2 , and in conclusion, our representation of a **bi-invariant** polynomial is :

$$P(j^4 f) = \sum_{-\frac{3}{4}m \leq a \leq m} (f'_1)^a P_a(\Lambda^3, \Lambda_1^5, \Lambda_{1,1}^7).$$

- Negative powers of f'_1 are unavoidable and their presence is necessary.

- Indeed, for example : Remind the unique syzygie at the previous level $\kappa = 4$:

$$0 \equiv f'_1 f'_1 M^8 - 3 \Lambda^3 \Lambda_{1,1}^7 + 5 \Lambda_1^5 \Lambda_1^5.$$

We can solve the bi-invariant M^8 in the form :

$$M^8 = \frac{3 \Lambda^3 \Lambda_{1,1}^7 - 5 \Lambda_1^5 \Lambda_1^5}{f'_1 f'_1}$$

and there is a negative power of f'_1 .

Plan for the study of Demailly jets in the general case

- Generalize immediately the rational expression :

$$\sum_{-\frac{\kappa-1}{\kappa}m \leqslant a \leqslant m} (f'_1)^a P_a(\Lambda^3, \Lambda_1^5, \Lambda_{1,1}^7, \Lambda_{1,1,1}^9, \dots, \Lambda_{1,\dots,1}^{2\kappa-1}).$$

- Illustrate the algorithm for $\nu = 2$ and $\kappa = 5$.

- Starting point :

$$\sum_{-\frac{4}{5}m \leqslant a \leqslant m} (f'_1)^a P_a(\Lambda^3, \Lambda_1^5, \Lambda_{1,1}^7, \Lambda_{1,1,1}^9).$$

- Compute the Ideal of Relations of the bi-invariants restricted to $\{f'_1 = 0\}$:

$$\text{Ideal-Rel}\left(\Lambda^3|_0, \Lambda_1^5|_0, \Lambda_{1,1}^7|_0, \Lambda_{1,1,1}^9|_0\right),$$

namely a generating set of the ideal of all polynomials in four variables that give zero, identically, after substituting these four restricted invariants.

- Get the three relations valuable for $f'_1 = 0$:

$$\begin{aligned} 0 &\equiv -5\Lambda^5\Lambda^5 + 3\Lambda^3\Lambda^7 \Big|_0 \\ 0 &\equiv -7\Lambda^5\Lambda^7 + 3\Lambda^3\Lambda^9 \Big|_0 \\ 0 &\equiv -7\Lambda^7\Lambda^7 + 5\Lambda^5\Lambda^9 \Big|_0. \end{aligned}$$

- So without setting $f'_1 = 0$, there should be three remainders that are a multiple of f'_1 :

$$0 \equiv -5\Lambda^5\Lambda^5 + 3\Lambda^3\Lambda^7 + f'_1 \times \text{something}$$

$$0 \equiv -7\Lambda^5\Lambda^7 + 3\Lambda^3\Lambda^9 + f'_1 \times \text{something}$$

$$0 \equiv -7\Lambda^7\Lambda^7 + 5\Lambda^5\Lambda^9 + f'_1 \times \text{something}$$

- Each something necessarily also is a bi-invariant.
- Find the maximal power of f'_1 which factors each something.
- Get the three expressions :

$$0 \equiv -5\Lambda^5\Lambda^5 + 3\Lambda^3\Lambda^7 + f'_1 f'_1 M^8$$

$$0 \equiv -7\Lambda^5\Lambda^7 + 3\Lambda^3\Lambda^9 + f'_1 f'_1 M^{10}$$

$$0 \equiv -7\Lambda^7\Lambda^7 + 5\Lambda^5\Lambda^9 + f'_1 f'_1 K^{12}$$

- Test whether or not the obtained bi-invariants :

$$M^8$$

$$M^{10}$$

$$K^{12}$$

belong or do not belong to the algebra generated by the previously known bi-invariants :

$$f'_1$$

$$\Lambda^3$$

$$\Lambda^5$$

$$\Lambda^7$$

$$\Lambda^9$$

- Here : none of the above 8 bi-invariants is equal to a polynomial with respect to the 7 remaining ones.

Then restart the process with the 8 bi-invariants.

Compute the Ideal of Relations of these bi-invariants restricted to $\{f'_1 = 0\}$:

Ideal-Rel $(\Lambda^3|_0, \Lambda^5|_0, \Lambda^7|_0, \Lambda^9|_0, M^8|_0, M^{10}|_0, K^{12}|_0)$

Get the ten relations valuable for $f'_1 = 0$:

$$0 \equiv -5 \Lambda^5 \Lambda^5 + 3 \Lambda^3 \Lambda^7 \Big|_0$$

$$0 \equiv -7 \Lambda^5 \Lambda^7 + 3 \Lambda^3 \Lambda^9 \Big|_0$$

$$0 \equiv -7 \Lambda^7 \Lambda^7 + 5 \Lambda^5 \Lambda^9 \Big|_0$$

$$0 \equiv -8 \Lambda^5 M^8 + 3 \Lambda^3 M^{10} \Big|_0$$

$$0 \equiv -\Lambda^7 M^8 + 3 \Lambda^3 K^{12} \Big|_0$$

$$0 \equiv -8 \Lambda^7 M^8 + 5 \Lambda^5 M^{10} \Big|_0$$

$$0 \equiv -\Lambda^9 M^8 + 7 \Lambda^5 K^{12} \Big|_0$$

$$0 \equiv -8 \Lambda^9 M^8 + 7 \Lambda^7 M^{10} \Big|_0$$

$$0 \equiv -5 \Lambda^9 M^{10} + 56 \Lambda^7 K^{12} \Big|_0$$

$$0 \equiv -5 M^{10} M^{10} + 64 M^8 K^{12} \Big|_0$$

□ Compute carefully the remainders behind f'_1 :

$$0 \equiv -5\Lambda^5\Lambda^5 + 3\Lambda^3\Lambda^7 - f'_1 f'_1 M^8$$

$$0 \equiv -7\Lambda^5\Lambda^7 + 3\Lambda^3\Lambda^9 - f'_1 f'_1 M^{10}$$

$$0 \equiv -7\Lambda^7\Lambda^7 + 5\Lambda^5\Lambda^9 - f'_1 f'_1 K^{12}$$

$$0 \equiv -8\Lambda^5M^8 + 3\Lambda^3M^{10} - f'_1 N^{12}$$

$$0 \equiv -\Lambda^7M^8 + 3\Lambda^3K^{12} - f'_1 H^{14}$$

$$0 \equiv -8\Lambda^7M^8 + 5\Lambda^5M^{10} - f'_1 H^{14}$$

$$0 \equiv -\Lambda^9M^8 + 7\Lambda^5K^{12} - f'_1 F^{16}$$

$$0 \equiv -8\Lambda^9M^8 + 7\Lambda^7M^{10} - f'_1 F^{16}$$

$$0 \equiv -5\Lambda^9M^{10} + 56\Lambda^7K^{12} - f'_1 X^{18}$$

$$0 \equiv -5M^{10}M^{10} + 64M^8K^{12} - f'_1 X^{19}$$

□ Convention : In blue, the new invariants and in green, the already known bi-invariants.

□ In sum : 5 new bi-invariants, and again, no one is superfluous.

□ Then restart the process with the 13 bi-invariants.

□ Compute the Ideal of Relations of these bi-invariants restricted to $\{f'_1 = 0\}$:

Id-Rel $\left(\begin{array}{c} \Lambda^3|_0, \quad \Lambda^5|_0, \quad \Lambda^7|_0, \quad \Lambda^7|_0, \quad M^8|_0, \quad M^{10}|_0, \quad K^{12}|_0 \\ N^{12}|_0, \quad H^{14}|_0, \quad F^{16}|_0, \quad X^{18}|_0, \quad X^{19}|_0 \end{array} \right)$

Use Gröbner basis computations.

Get **32** equations, hence only **22 new** :

$$0 \equiv -5 F^{16} F^{16} + H^{14} X^{18} - f'_1 K^{12} X^{19}$$

$$0 \equiv -7 H^{14} F^{16} + N^{12} X^{18} - f'_1 M^{10} X^{19}$$

$$0 \equiv -7 H^{14} H^{14} + 5 N^{12} F^{16} - f'_1 M^8 X^{19}$$

$$0 \equiv -56 K^{12} F^{16} + M^{10} X^{18} - f'_1 Y^{27}$$

$$0 \equiv -56 K^{12} H^{14} + 5 M^{10} F^{16} - f'_1 X^{25}$$

$$0 \equiv -8 K^{12} N^{12} + M^{10} H^{14} - f'_1 X^{23}$$

$$0 \equiv -49 K^{12} H^{14} + M^8 X^{18} - f'_1 X^{25}$$

$$0 \equiv -7 K^{12} N^{12} + M^8 F^{16} - f'_1 X^{23}$$

$$0 \equiv -5 M^{10} N^{12} + 8 M^8 H^{14} - f'_1 X^{21}$$

$$0 \equiv -48 K^{12} F^{16} + \Lambda^9 X^{19} - f'_1 Y^{27}$$

$$0 \equiv -48 K^{12} H^{14} + \Lambda^7 X^{19} - f'_1 X^{25}$$

$$0 \equiv -5 \Lambda^9 F^{16} + \Lambda^7 X^{18} + 8 f'_1 K^{12} K^{12}$$

$$0 \equiv -\Lambda^9 H^{14} + \Lambda^7 F^{16} + f'_1 M^{10} K^{12}$$

$$0 \equiv -5 \Lambda^9 N^{12} + 7 \Lambda^7 H^{14} + 56 f'_1 M^8 K^{12} - f'_1 f'_1 X^{19}$$

$$0 \equiv -48 K^{12} N^{12} + \Lambda^5 X^{19} - 7 f'_1 X^{23}$$

$$0 \equiv -7 \Lambda^9 H^{14} + \Lambda^5 X^{18} + 8 f'_1 M^{10} K^{12}$$

$$0 \equiv -\Lambda^9 N^{12} + \Lambda^5 F^{16} + f'_1 M^{10} M^{10}$$

$$0 \equiv -\Lambda^7 N^{12} + \Lambda^5 H^{14} + f'_1 M^8 M^{10}$$

$$0 \equiv -10 M^{10} N^{12} + \Lambda^3 X^{19} - \frac{7}{3} f'_1 X^{21}$$

$$0 \equiv -35 \Lambda^9 N^{12} + 3 \Lambda^3 X^{18} - \frac{285}{8} f'_1 M^{10} M^{10} - \frac{7}{8} f'_1 f'_1 X^{19}$$

$$0 \equiv -7 \Lambda^7 N^{12} + 3 \Lambda^3 F^{16} + 8 f'_1 M^8 M^{10}$$

$$0 \equiv -5 \Lambda^5 N^{12} + 3 \Lambda^3 H^{14} + 8 f'_1 M^8 M^8$$

- In blue : 4 new invariants :

X^{21}	X^{23}	X^{25}	Y^{27}
----------	----------	----------	----------

- Compute the Ideal of Relations of these bi-invariants restricted to $\{f'_1 = 0\}$:

$$\text{Id-Rel} \left(\begin{array}{l} \Lambda^3|_0, \Lambda^5|_0, \Lambda^7|_0, M^8|_0, M^{10}|_0, K^{12}|_0 \\ N^{12}|_0, H^{14}|_0, F^{16}|_0, X^{18}|_0, X^{19}|_0, \\ X^{21}|_0, X^{23}|_0, X^{25}|_0, Y^{27}|_0 \end{array} \right)$$

- Next step : Special Gröbner bases package FGb.
- The standard Groebner Maple package was already unable to give the Ideal of Relations at the previous step.
- Get ~ 110 relations (depending on the order).
- It seems that no new bi-invariant appears, unfortunately.

- Hilbert's 14-th problem.
- Locally nilpotent derivations. (VAN DEN ESSEN, FREUDENBURG, DERKSEN, ROBERT, TANIMOTO).
- Van den Essen's kernel algorithm.

Proposition. Suppose that at a certain stage of the algorithm, at which one has a finite number of bi-invariants $\Lambda^3, \Lambda^5, \dots, \Lambda^{\text{last}}$, the corresponding Ideal of Restricted Relations :

$$\text{Ideal-Rel}\left(\Lambda^3|_0, \Lambda^5|_0, \dots, \Lambda^{\text{last}}|_0\right)$$

is generated by syzygies :

$$0 \equiv \text{Poly}(\Lambda^3, \dots, \Lambda^{\text{last}}) + (f'_1)^b \text{Rem}(\Lambda^3, \dots, \Lambda^{\text{last}})$$

for which **no** new bi-invariant appears behind f'_1 . Then the algebra of bi-invariants coincides with :

$$\mathbb{C}[\Lambda^3, \Lambda^5, \dots, \Lambda^{\text{last}}].$$

Démonstration. At first, we remind the initial rational expression with possibly negative powers of (f'_1) :

$$\sum_{-\frac{\kappa-1}{\kappa}m \leq a \leq m} (f'_1)^a P_a(\Lambda^3, \dots, \Lambda^{\text{last}}).$$

Next, we have to normalize each appearing polynomial P_a . To this aim, we compute a Gröbner basis for the Ideal of Restricted Relations with respect to some term-order. By eliminating all monomials of each P_a which belong to

the monomial ideal of leading monomials, we therefore get an expression of each bi-invariant polynomial :

$$P_a(j^\kappa f) \text{ modulo syzygies} = \sum \text{monomials}$$

where the appearing monomials constitute a basis of the quotient vector space :

$$\mathbb{C}[\Lambda^3, \dots, \Lambda^{\text{last}}] / \text{Ideal of Leading Monomials}.$$

Achieving such a normalization for each P_a , we get :

$$P(j^\kappa f) = \sum_{-\frac{\kappa-1}{\kappa}m \leq a \leq m} (f'_1)^a \sum \text{monomials}.$$

- **Then there are no negative powers of f'_1 anymore.**
- **Indeed :** If, in this representation, a negative power of f'_1 is still present, by clearing out we get :

$$\sum \text{monomials} = f'_1 \cdot \text{Remainder}.$$

Then by setting $f'_1 = 0$, we deduce :

$$\sum \text{monomials} \Big|_0 \equiv 0,$$

but this is impossible, because, by definition, there can be no syzygy between the monomials. \square

Theorem. (M. 2008)

- (i) At each step of the algorithm, there can only appear **finitely many bi-invariants** which do not belong to the algebra generated by all the bi-invariants known from the preceding level.
- (ii) If at some next level, **no new bi-invariant appears**, then the algorithm terminates : no new further bi-invariant exists, and there are no negative powers of f'_1 anymore.
- (iii) In this case, a unique writing of every polynomial :

$$\mathcal{P}_a(\Lambda^3, \Lambda^5, \dots, X^{\text{last}})$$

modulo the Gröbner basis of the finitely many bi-invariants yields an exact **denumbering** of all the **Schur bundles** $\Gamma^{(\bullet)}T_X^*$ decomposing the Demainly bundle $E_{k,m}T_X^*$.

- (iv) One deduces (**easier computation**) an estimate of the Euler characteristic :

$$\chi(X, E_{\kappa,m}T_X^*) = m^{\kappa+2} \left(A^\kappa \cdot c_1^2 - B^\kappa \cdot c_2 \right) + O(m^{\kappa+1}).$$

Morse-theoretical proof of the Hartogs extension theorem in $(n - 1)$ -complete complex spaces

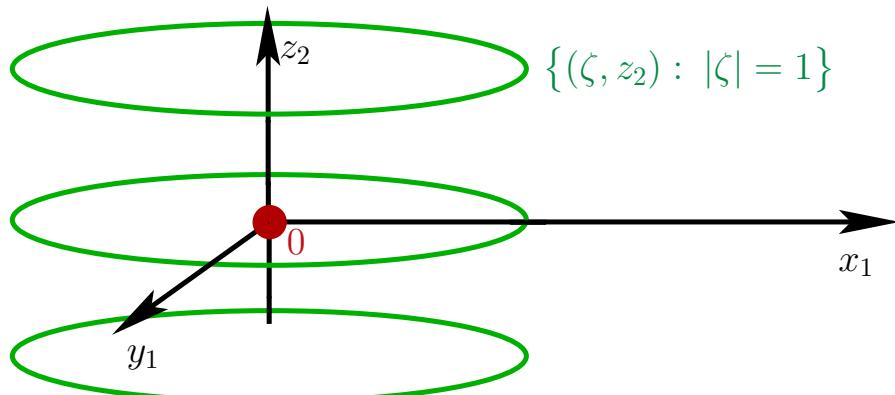
J. MERKER (j.w.w. E. PORTEN)

DMA, École Normale Supérieure, Paris
LATP, Université de Provence, Marseille

Hartogs theorem. Let $\Omega \Subset \mathbb{C}^n$ be a bounded domain. If $K \Subset \Omega$ is a compact such that $\Omega \setminus K$ is connected, then :

$$\mathcal{O}(\Omega \setminus K) = \mathcal{O}(\Omega).$$

Hurwitz theorem. $\mathcal{O}(\mathbb{C}^2 \setminus \{0\}) = \mathcal{O}(\mathbb{C}^2)$, i.e. there cannot exist isolated singularities.

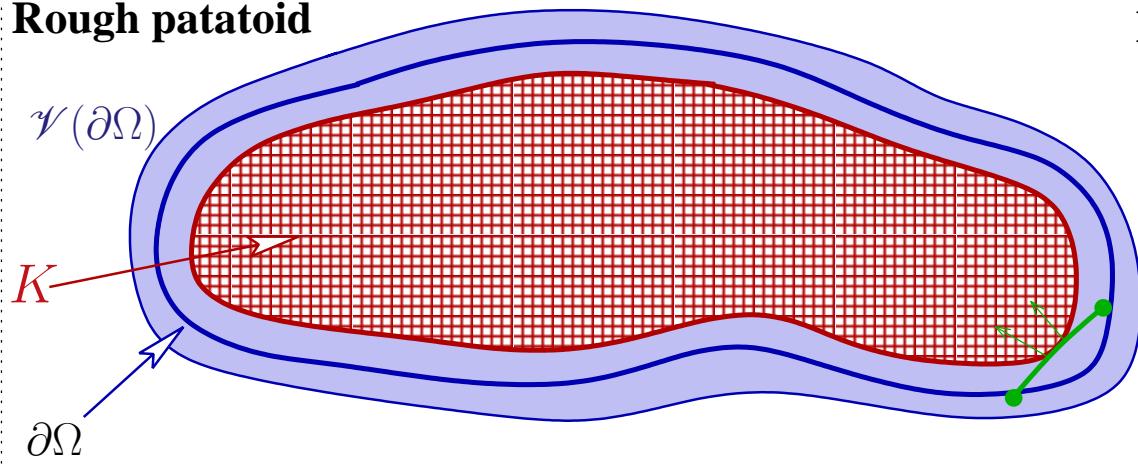


Démonstration. Let f be holomorphic in $\mathbb{C}^2 \setminus \{0\}$ and compute its prolongation

$$F(z_1, z_2) := \frac{1}{2\pi i} \int_{|\zeta|=1} \frac{f(\zeta, z_2)}{\zeta - z_1} d\zeta.$$

For $z_2 \neq 0$, recover f ; for $z_2 = 0$, get extension. □

Rough patatoid



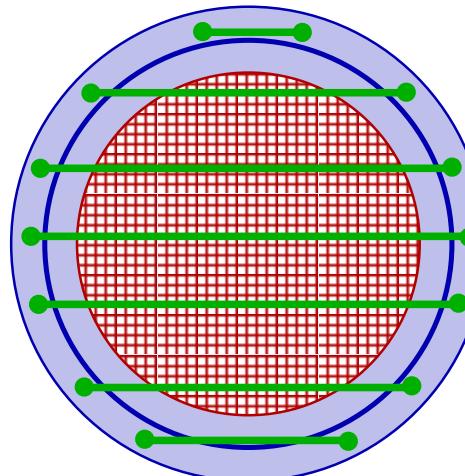
Recipe :

Good analytic disc

Eat a part of K

Reduce K

Restart



$\Omega = \text{ball of radius } r_1$

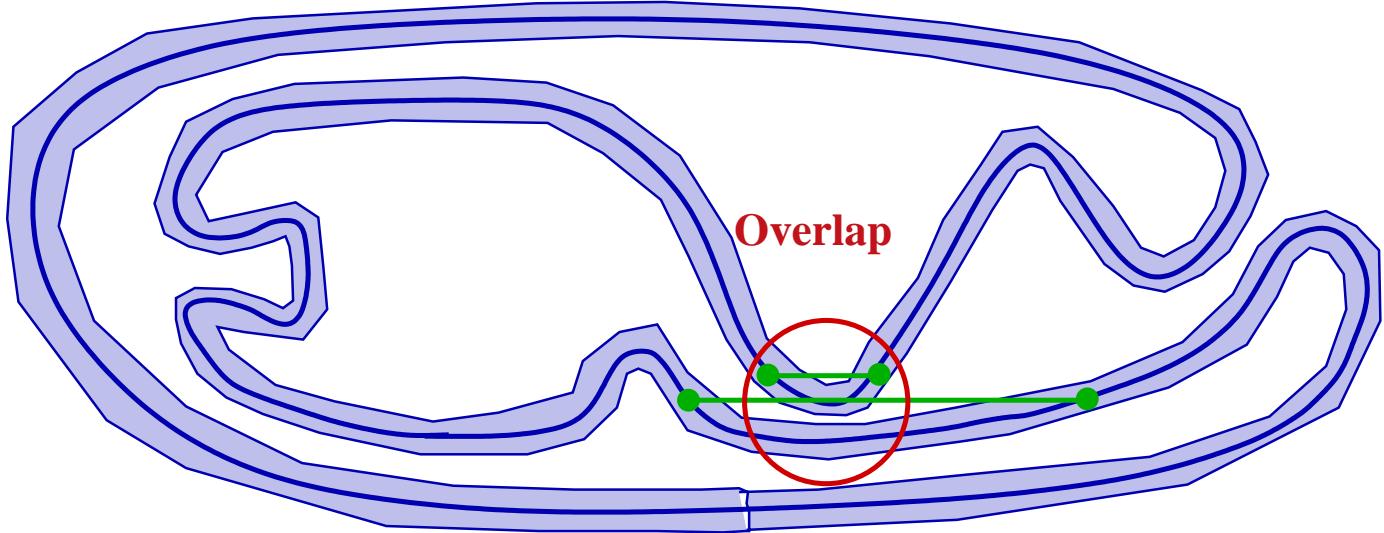
$K = \text{ball of radius } r_2$

Discs :

adapted radius ;

enveloping K fully

Monodromy problems :

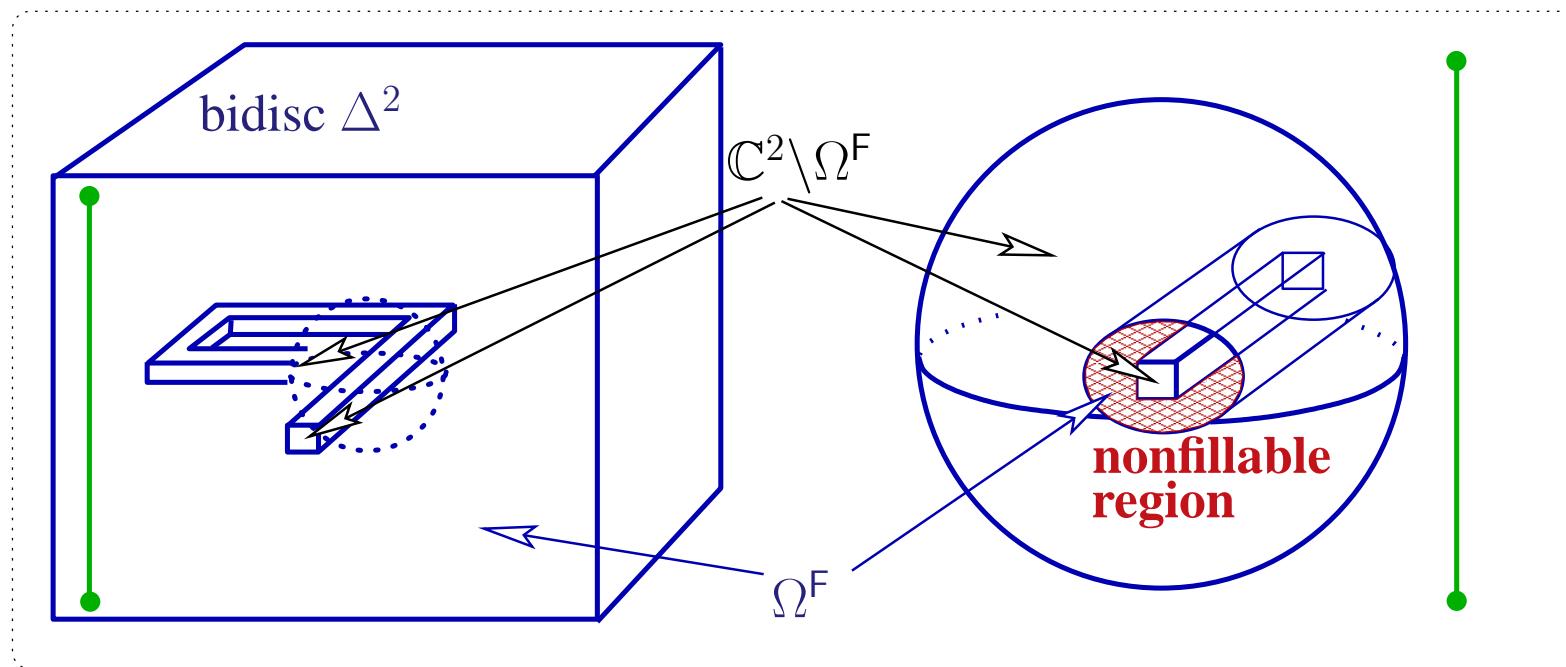


Two known rigorous true proofs by Analysis :

- Martinelli kernel.
- Ehrenpreis : $\bar{\partial}$ with compact support.

No correct geometric proof known since 1906.

Fornæss 1998 : There exists a domain $\Omega^F \subset \mathbb{C}^2$ which is not fillable by discs, with the constraint that all discs remain inside Ω^F .



But : (Bedford, Math. Reviews) : there is an obvious filling of Ω^F if we allow discs to go outside Ω^F : just take vertical discs !

Theorem. (M.-PORTEN, J. Geom. Anal. 2007) The Hartogs extension theorem can be proved by means of a finite number of families of analytic discs :

Equivalent Hartogs theorem. Let $\Omega \subset \mathbb{C}^n$ be a bounded domain having connected boundary. If $n \geq 2$, every function holomorphic in some **connected open neighborhood of $\partial\Omega$** extends holomorphically and uniquely to the inside of Ω :

$$\forall f \in \mathcal{O}(\mathcal{V}(\partial\Omega)) \quad \exists F \in \mathcal{O}(\Omega \cup \mathcal{V}(\partial\Omega)) \quad F|_{\mathcal{V}(\partial\Omega)} = f$$

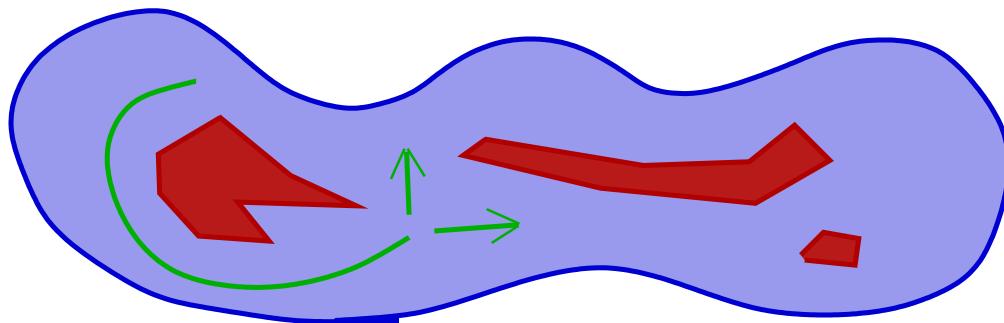
- **Equivalence of the two versions :**

assume $\Omega \setminus K$ connected \iff assume $\mathcal{V}(\partial\Omega)$ connected

- If $\mathcal{V}(\partial\Omega)$ is assumed to be connected, set :

$$K := \Omega \setminus \mathcal{V}(\partial\Omega).$$

- Conversely, if $\Omega \setminus K$ is connected, how to construct a **connected** boundary $\partial\Omega' \subset \Omega \setminus K$?



- **Recipe :** choose a regularized Whitney distance function a \mathcal{C}^∞ real-valued function d such that $K = \{d = 0\}$ and $\frac{1}{c} \text{dist}(x, K) \leq d(x) \leq c \text{dist}(x, K)$.

- The candidate **green** boundary :

$$\{d = \varepsilon\}$$

is not necessarily connected (K can be disconnected) :

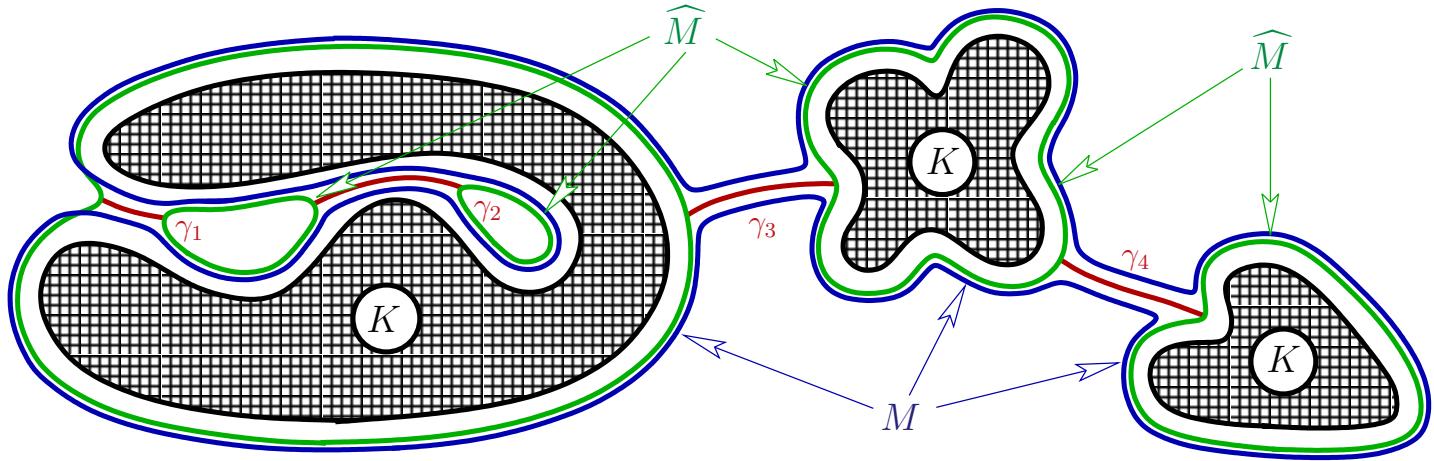


Fig. 1 : Connectifying the smoothed out boundary

but thanks to the assumed connectedness, we can find connecting **red** curves joining the islands $\{d = \varepsilon\}$ and running in the **connected** $\Omega \setminus K$, we can then thicken them slightly as thin tubes, glue, smooth out, and get a **connected blue** boundary $\partial\Omega'$.

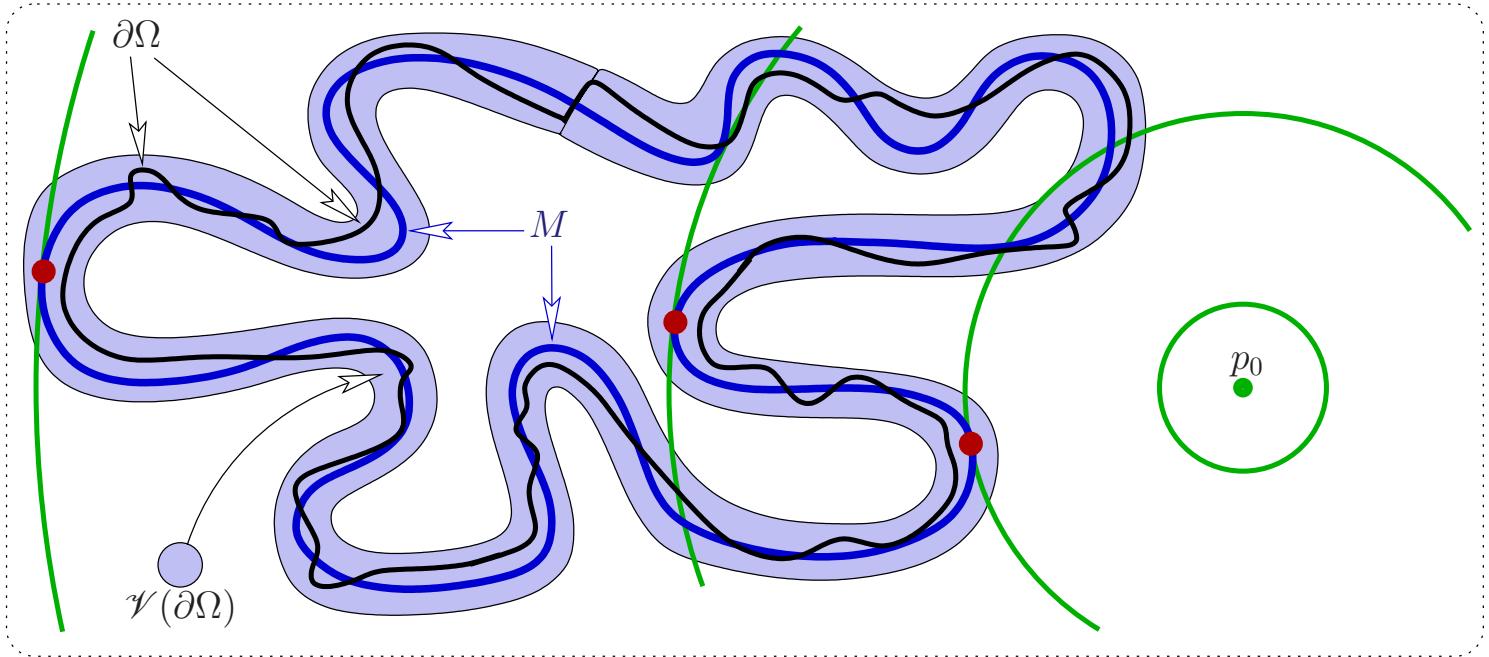
- **Summary :** Start with $\partial\Omega$ and $\mathcal{V}(\partial\Omega)$ connected.

I. Preparation of a good \mathcal{C}^∞ boundary

- $\|z\| := (\lvert z_1 \rvert^2 + \cdots + \lvert z_n \rvert^2)^{1/2}$ the Euclidean norm of $z = (z_1, \dots, z_n) \in \mathbb{C}^n$.
- $\mathbb{B}^n(p, \delta) := \{\lVert z - p \rVert < \delta\}$ ball of radius $\delta > 0$.
- If $E \subset \mathbb{C}^n$ is any set, define its δ -neighborhood :

$$\mathcal{V}_\delta(E) := \bigcup_{p \in E} \mathbb{B}^n(p, \delta).$$

- Let $\Omega \subset \mathbb{C}^n$, $n \geq 2$, with $\partial\Omega$ **connected**.
- $\mathcal{V}(\partial\Omega)$ **connected** neighborhood of $\partial\Omega$.
- **Origin** := $p_0 \in \mathbb{C}^n$, far from $\overline{\Omega}$.
- **Distance function** : $r(z) := \lVert z - p_0 \rVert = \|z\|$.



Lemma. There exists a \mathcal{C}^∞ connected closed and oriented hypersurface $M \subset \mathcal{V}_{\delta_1/2}(\partial\Omega)$ such that :

(i) M bounds a unique bounded domain Ω_M with :

$$\Omega \subset \Omega_M \cup \mathcal{V}(\partial\Omega)$$

(ii) the restriction $r_M(z) := r(z)|_M$ of the distance function to M has only a finite number κ of critical points $\widehat{p}_1, \dots, \widehat{p}_\kappa \in M$ located on different sphere levels, namely :

$$\|\widehat{p}_1\| < \dots < \|\widehat{p}_\kappa\|$$

(iii) The critical points are nondegenerate in the sense of Morse.

- **Extrinsic Morse lemma** : there exist $2n$ real coordinates :

$$(\mathbf{v}, x_1, \dots, x_{k_\lambda}, y_1, \dots, y_{2n-k_\lambda-1})$$

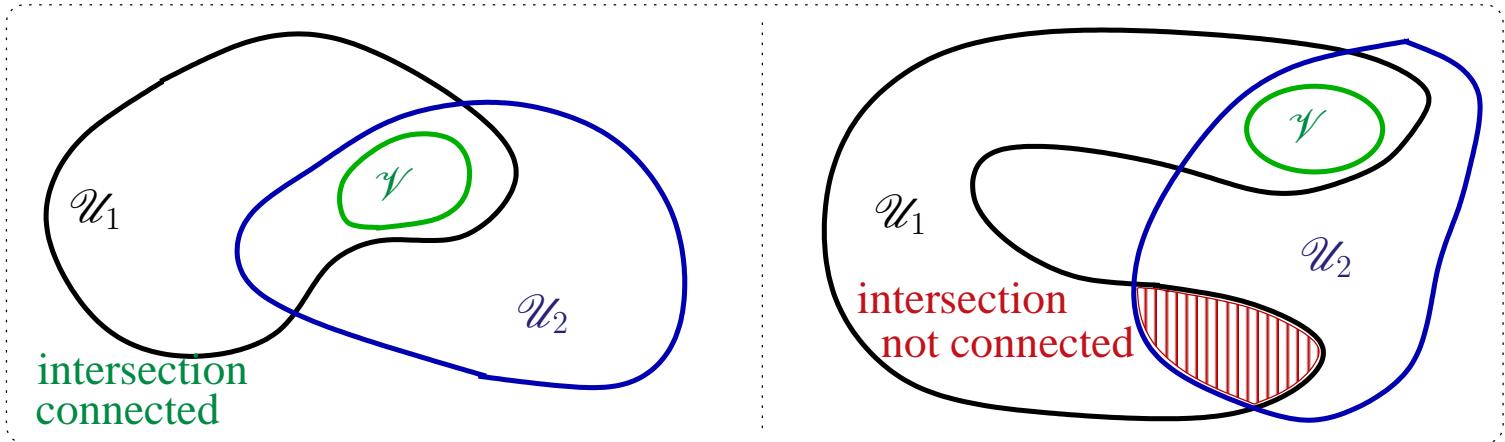
centered at \widehat{p}_λ such that :

- Sets $\{\mathbf{v} = \text{cst}\}$ coincide with spheres ;
- The graphed equation of M is :

$$\mathbf{v} = x_1^2 + \dots + x_{k_\lambda}^2 - y_1^2 - \dots - y_{2n-k_\lambda-1}^2.$$

- **Morse coindex** = k_λ = number of positive eigenvalues.

II. Unique holomorphic extension



Reduction to a good boundary. Suppose that for δ small with $\mathcal{V}_\delta(M)$ being a thin tubular neighborhood of the **good smooth boundary** M , the Hartogs theorem holds :

holomorphic in $\mathcal{V}_\delta(M)$ extends inside Ω_M .

Then the general Hartogs theorem holds :

$$\mathcal{O}(\mathcal{V}(\partial\Omega)) = \mathcal{O}(\Omega \cup \mathcal{V}(\partial\Omega))|_{\mathcal{V}(\partial\Omega)}.$$

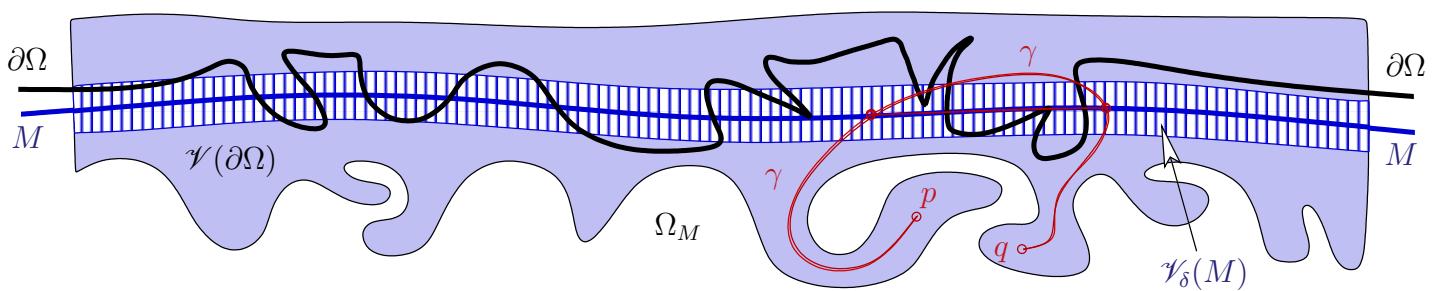


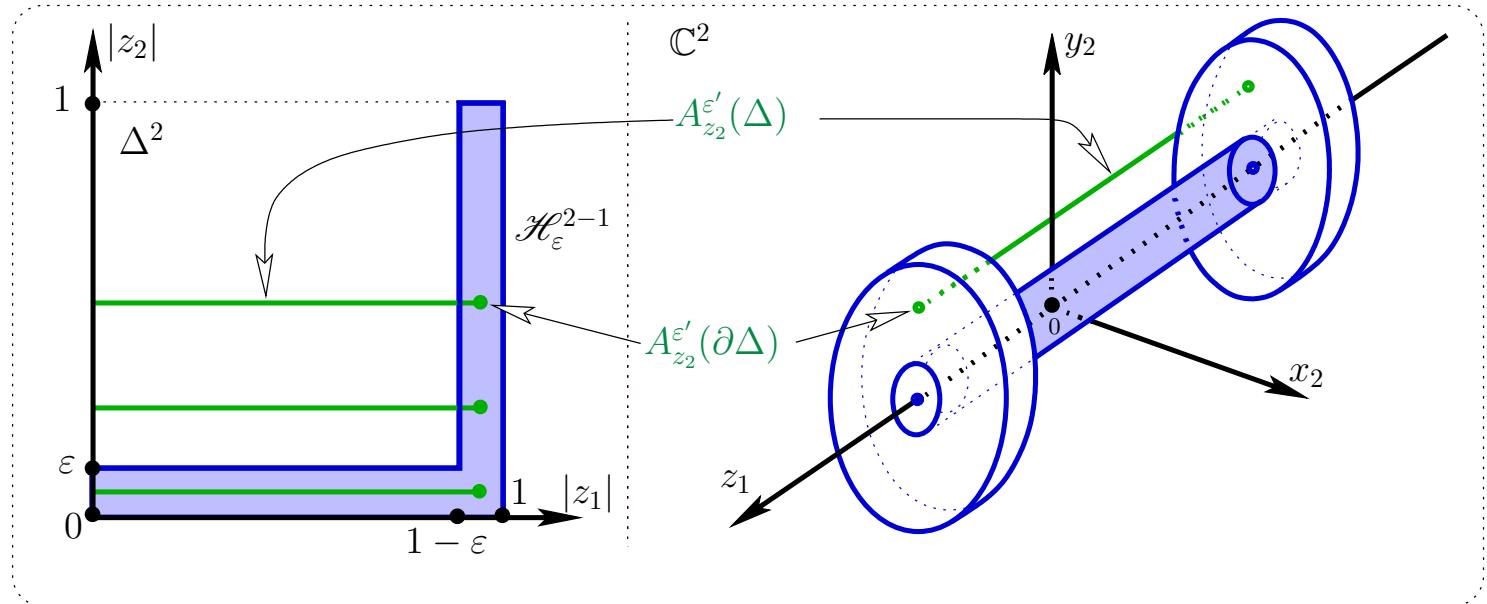
Fig. 3 : Checking connectedness of $\Omega_M \cap \mathcal{V}(\partial\Omega)$

Summary :

- $M = \partial\Omega_M$ good \mathcal{C}^∞ connected boundary
- controlled tubular neighborhood $\mathcal{V}_\delta(M)$ of $\partial\Omega_M$
- Goal = construct holomorphic extension with discs.

III. Hartogs and Levi-Hartogs figures

- Classical Hartogs figure :



Lemma. Holomorphic functions in the Hartogs figure extend holomorphically to the unit polydisc :

$$\Delta^n := \{z \in \mathbb{C}^n : |z_1| < 1, \dots, |z_n| < 1\}.$$

Démonstration. The green discs have their boundaries (the green bold points) inside the Hartogs figure and they fill in Δ^2 . We just use the Cauchy formula as did Hurwitz. \square

- **Spherical shells.** For a radius $r > 1$ and δ small, the sphere :

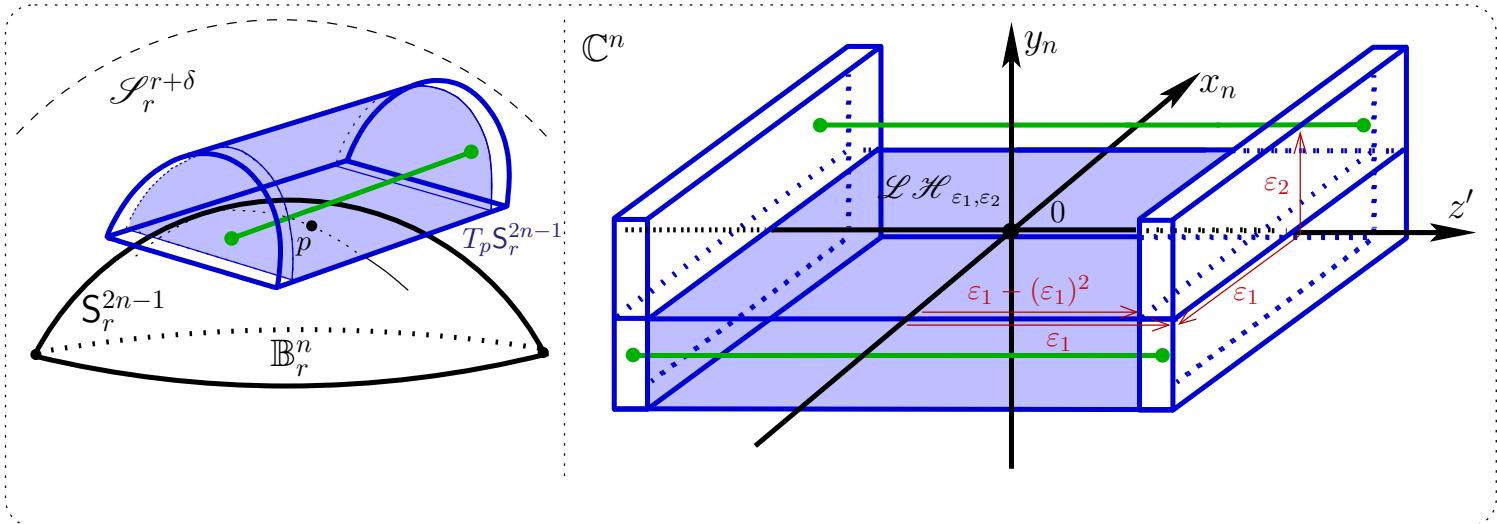
$$S_r^{2n-1} := \{z \in \mathbb{C}^n : \|z\| = r\}$$

of radius r is the interior (and strongly concave) boundary component of the **spherical shell domain** :

$$\mathcal{S}_r^{r+\delta} := \{r < \|z\| < r + \delta\}.$$

- **But** Hartogs figure is **not really** geometrically adapted.

- Modify slightly the Hartogs figure.



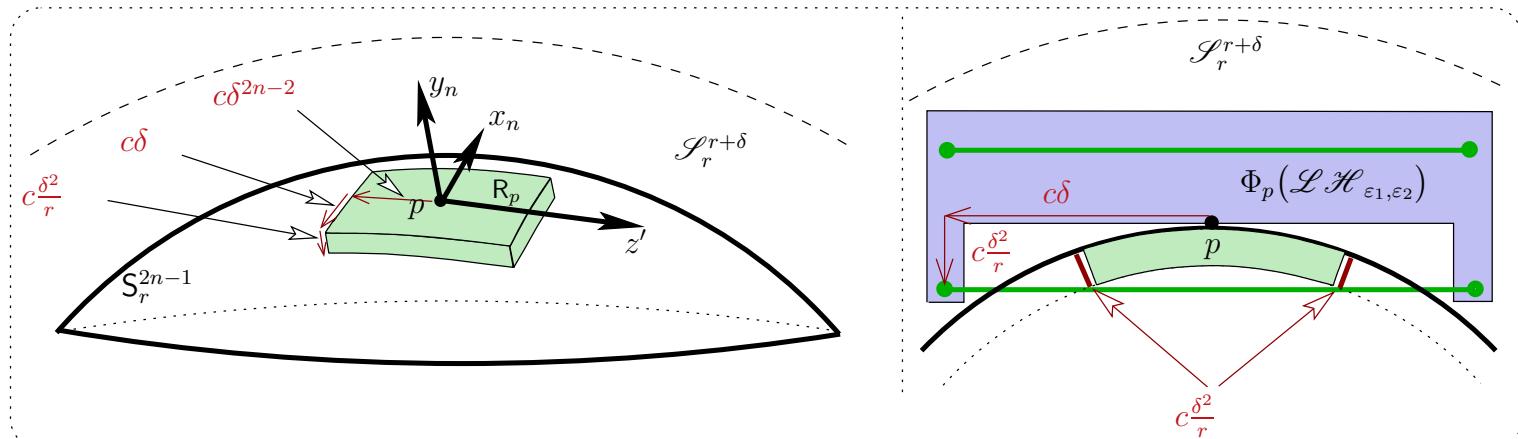
- **Levi-Hartogs figure :** Define in coordinates something called $\mathcal{L}\mathcal{H}_{\varepsilon_1, \varepsilon_2}$, resembling to a **small bed**.

Lemma. Holomorphic functions in the bed $\mathcal{L}\mathcal{H}_{\varepsilon_1, \varepsilon_2}$ extend holomorphically to the full parallelepiped.

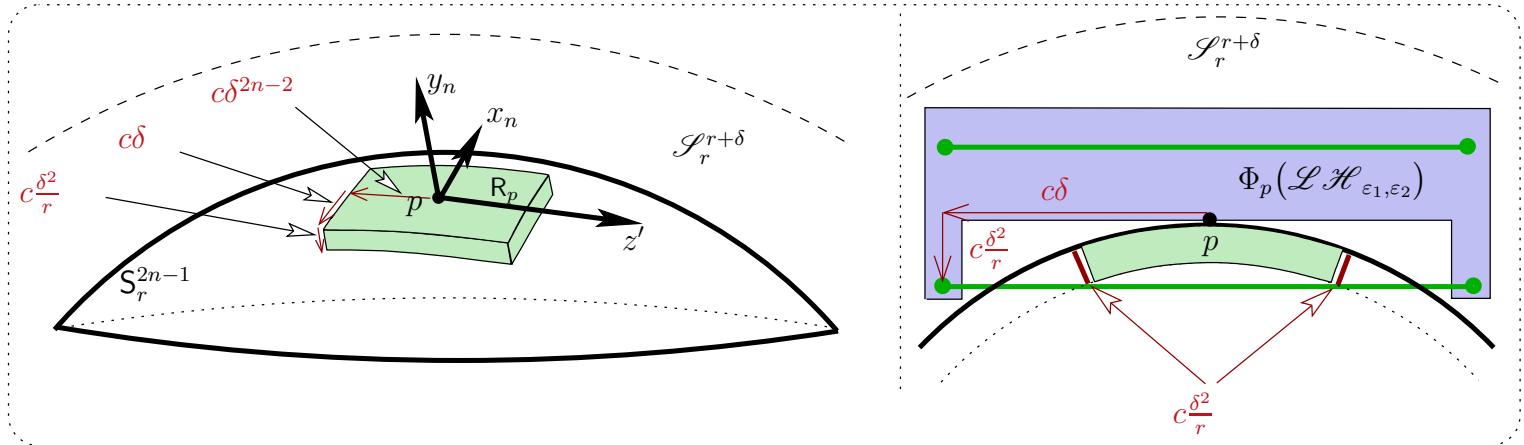
- **Rescale and reorient :** Let p be any point of the sphere S_r^{2n-1} and choose an affine map :

$$\Phi_p : z \longmapsto p + Uz,$$

with $U \in \mathrm{SU}(n, \mathbb{C})$, which sends the origin lying at the center of the bed, to the point p , and the tangent space to the bed, to the tangent space to the sphere $T_p S_r^{2n-1}$.



IV. Quantitative Hartogs-Levi extension



Lemma.

(i) By choosing $\varepsilon_1 = c\delta$ and $\varepsilon_2 = c\frac{\delta^2}{r}$ with some small positive constant $c < 1$, then the **rescaled bed** $\Phi_p(\mathcal{L} \mathcal{H}_{\varepsilon_1, \varepsilon_2})$ is **entirely contained** in the shell $\Sigma_r^{r+\delta}$.

(ii) Furthermore, the image of the full parallelepiped :

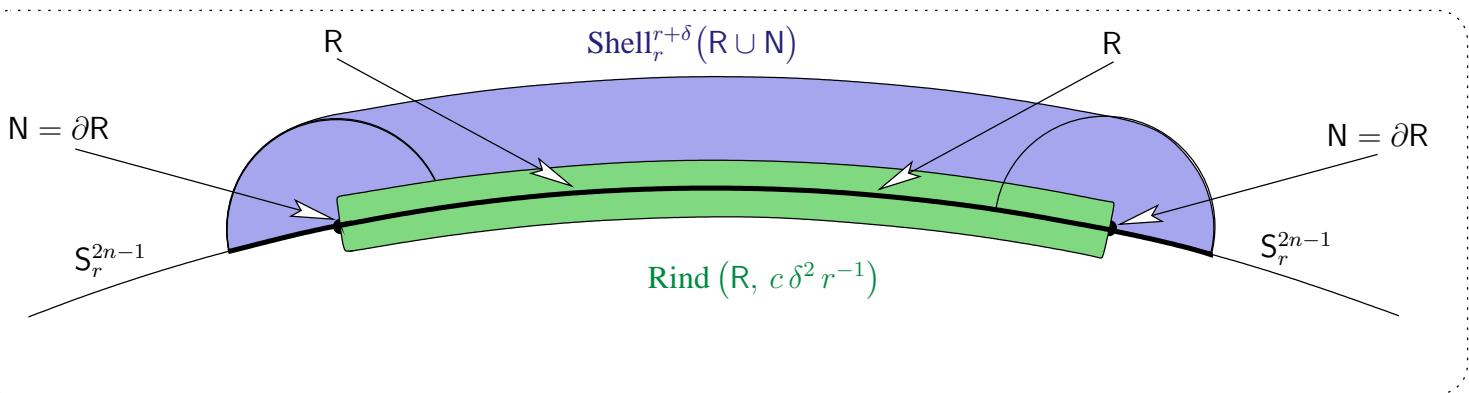
$$\widehat{\Phi_p(\mathcal{L} \mathcal{H}_{\varepsilon_1, \varepsilon_2})}$$

contains a **rind of thickness** $c\frac{\delta^2}{r}$ around a certain region $R_p \subset S_r^{2n-1}$ whose $(2n - 1)$ -dimensional area equals $\simeq c\delta^{2n-1}$.

Proposition. Let R be any region region of the sphere S_r^{2n-1} having \mathcal{C}^∞ boundary $N := \partial R$ and let $\delta > 0$ be small. Then holomorphic functions defined in the open **piece of shell** :

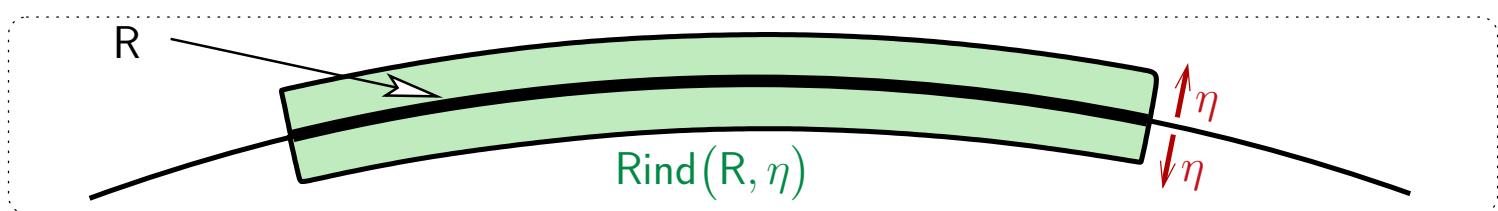
$$\text{Shell}_r^{r+\delta}(R \cup N) := (\mathbb{C}^n \setminus \overline{\mathbb{B}}_r^n) \cap \mathcal{V}_\delta(R \cup N)$$

do extend holomorphically to a **rind** of thickness $c \frac{\delta^2}{r}$ around R by means of a **finite number** of Levi-Hartogs figures.



- **Rind of thickness $\eta > 0$ around region $R \subset S_r^{2n-1}$:**

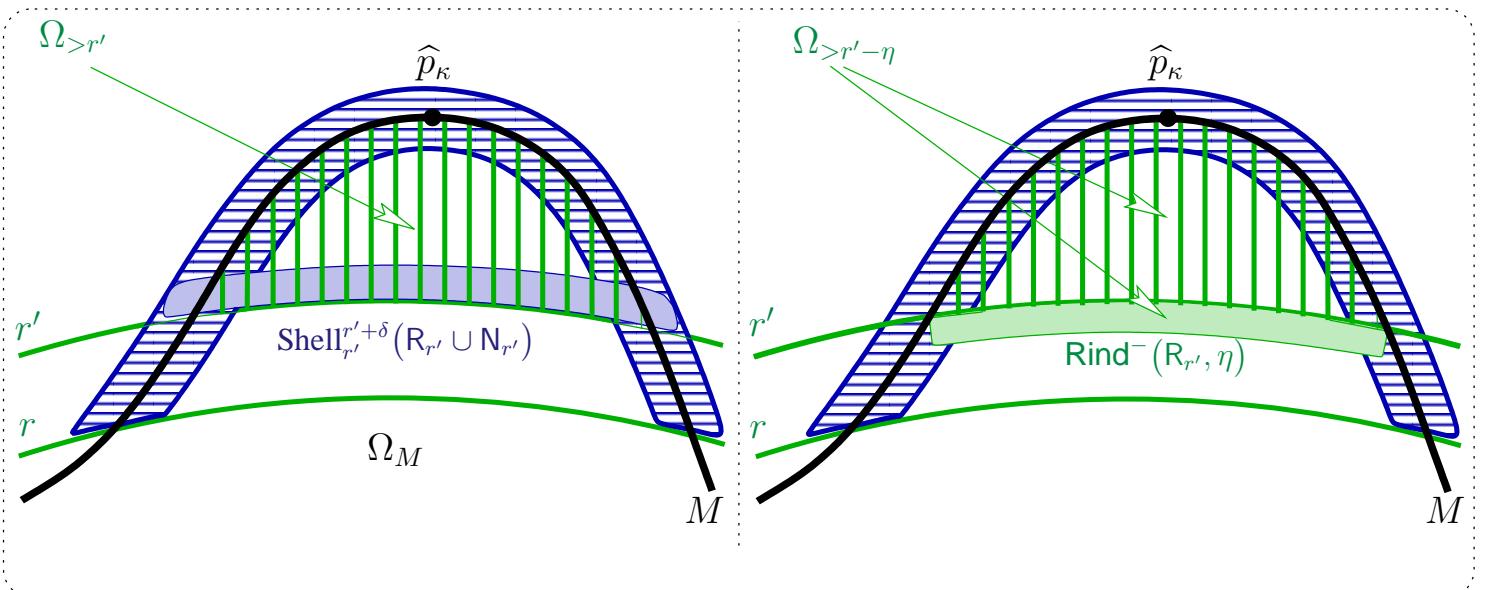
$$\text{Rind}(R, \eta) := \{(1+s)z : z \in R, |s| < \eta/r\}.$$



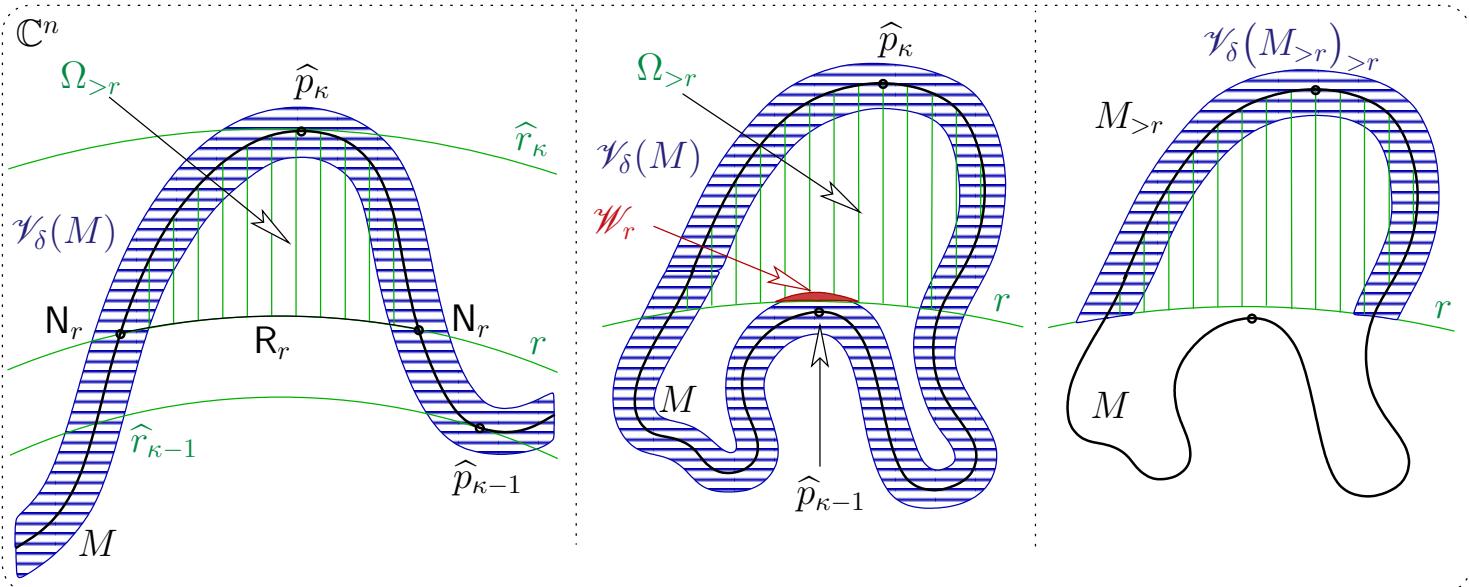
V. Filling domains outside balls of decreasing radius

$$\left\{ \begin{array}{ll} 0 < \delta & \text{neighborhood } \mathcal{V}_\delta(M) \\ 2 \leq r(\hat{p}_1) < \dots < r(\hat{p}_\kappa) & \text{Morse radii} \\ \delta \ll \min_{1 \leq \lambda \leq \kappa-1} \{\hat{r}_{\lambda+1} - \hat{r}_\lambda\} & \text{smallness of } \delta \\ \eta := c \delta^2 / \hat{r}_\kappa & \text{uniform useful rind thickness} \\ \eta \ll \delta & \text{thickness of extensional rinds is tiny} \end{array} \right.$$

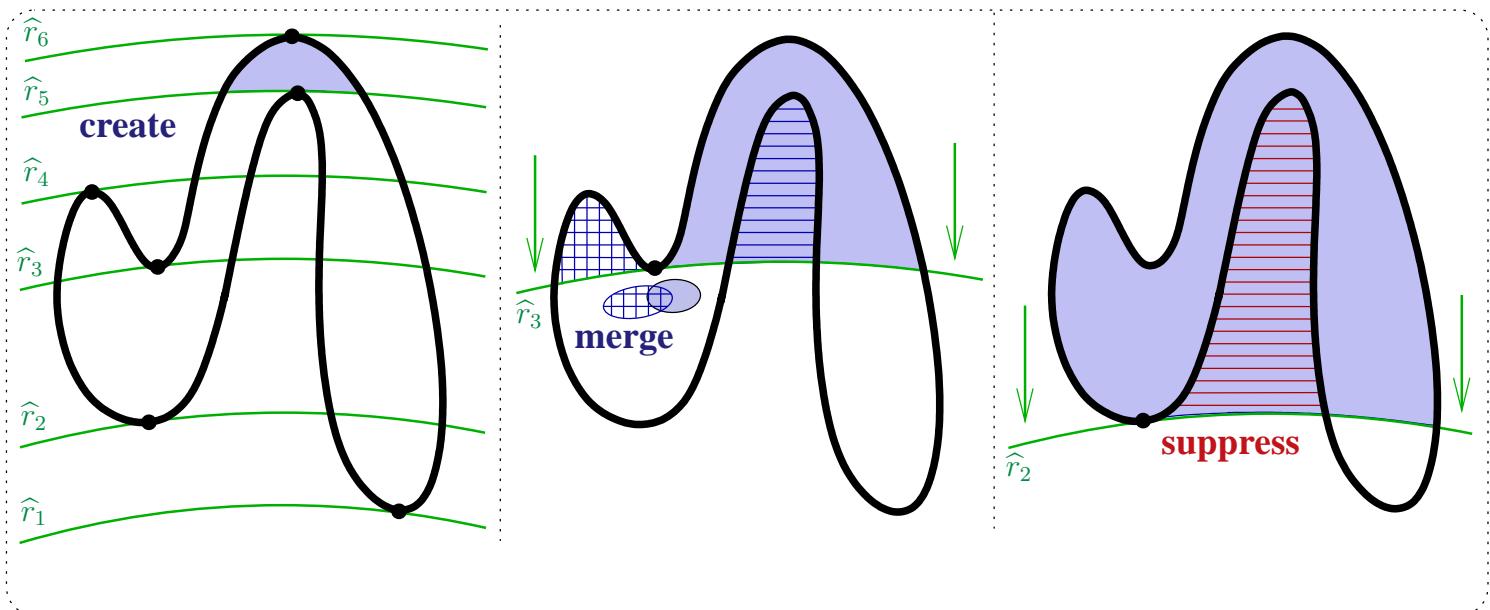
Starting the filling.



• Problem of monodromy :



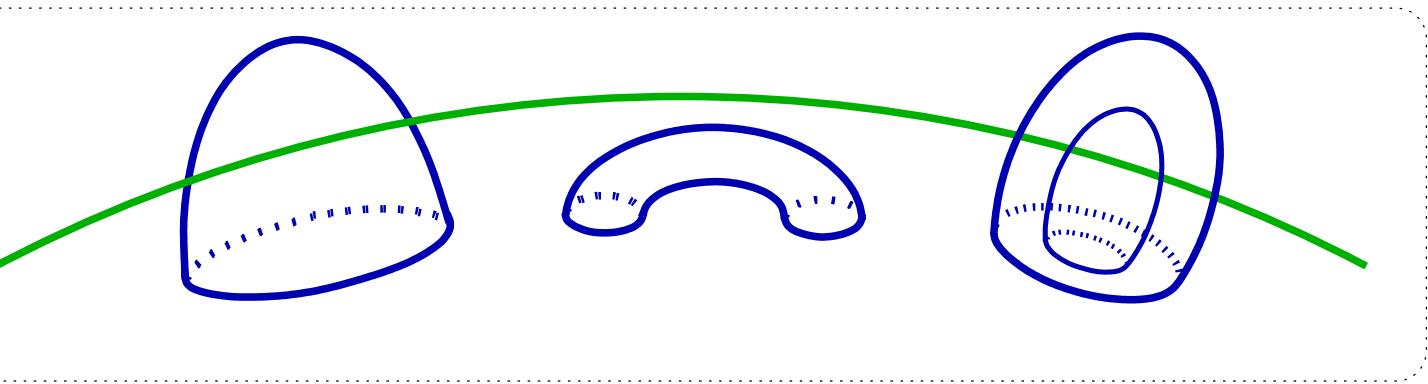
Heuristic illustration of the filling process :



VI. Creating, merging and suppressing subdomains

Lemma. Fix a radius r between two exceptional radii : $\widehat{r}_\lambda < r < \widehat{r}_{\lambda+1}$. Then :

(i) The intersection $M \cap S_r^{2n-1}$ is a \mathcal{C}^∞ compact hypersurface $N_r \subset S_r^{2n-1}$ of **codimension 2** in \mathbb{C}^n , without boundary having **finitely many** connected components ;



(ii) The part of the boundary of our domain which lies **outside the ball of radius r** :

$$M_{>r} := M \cap \{\|z\| > r\}$$

has **finitely many connected components** :

$$M_{>r}^1, M_{>r}^2, \dots, M_{>r}^{c_\lambda}$$

for some $c_\lambda < \infty$ which is independent of the radius r between two exceptional radii.

Main Proposition. Fix a non-exceptional radius r with $\widehat{r}_\lambda < r < \widehat{r}_{\lambda+1}$ and let $M_{>r}^1, \dots, M_{>r}^{c_\lambda}$, denote the collection of connected components of our M outside the ball of radius r . Then :

- (i) Each $M_{>r}^c$ bounds in $\{\|z\| > r\}$ a **unique domain** $\tilde{\Omega}_{>r}^c$ which is **relatively compact** in \mathbb{C}^n ;
- (ii) Two such domains $\tilde{\Omega}_{>r}^{c_1}$ and $\tilde{\Omega}_{>r}^{c_2}$, associated to two different connected components $M_{>r}^{c_1}$ and $M_{>r}^{c_2}$ of $M_{>r}$, are either **disjoint** or **one is contained in the other**;
- (iii) For each $c = 1, \dots, c_\lambda$, every function f holomorphic in $\mathcal{V}_\delta(M_{>r}^c)_{>r}$ **extends holomorphically and uniquely** to $\tilde{\Omega}_{>r}^c$ by means of a finite number of Levi-Hartogs figures.

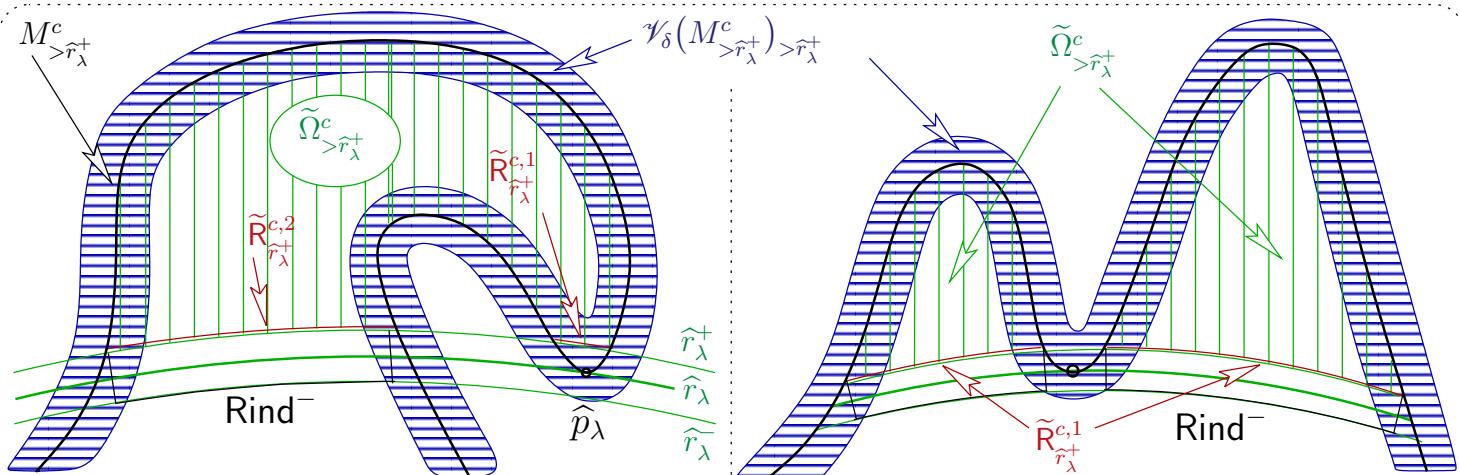


Fig. 16 : Two distinct Hartogs-Levi fillings at a point of Morse coindex $2n - 1$

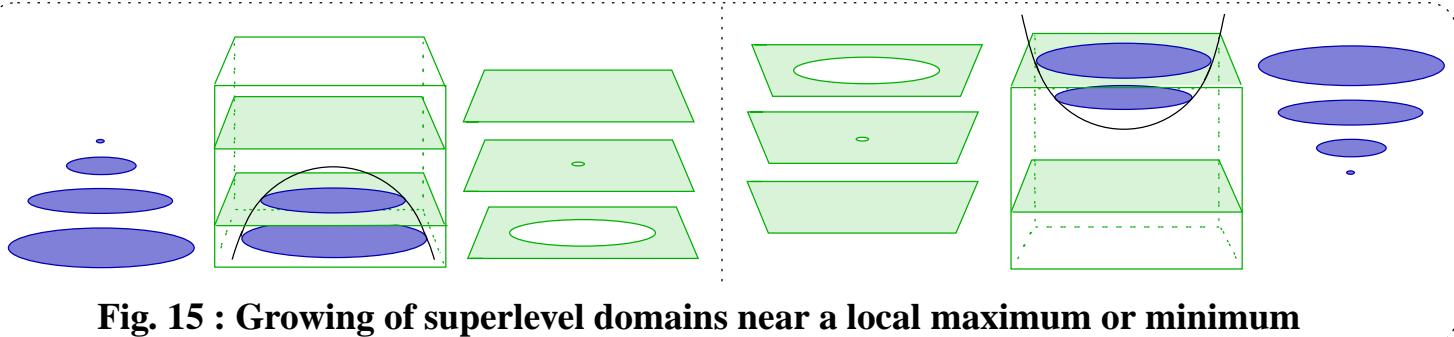
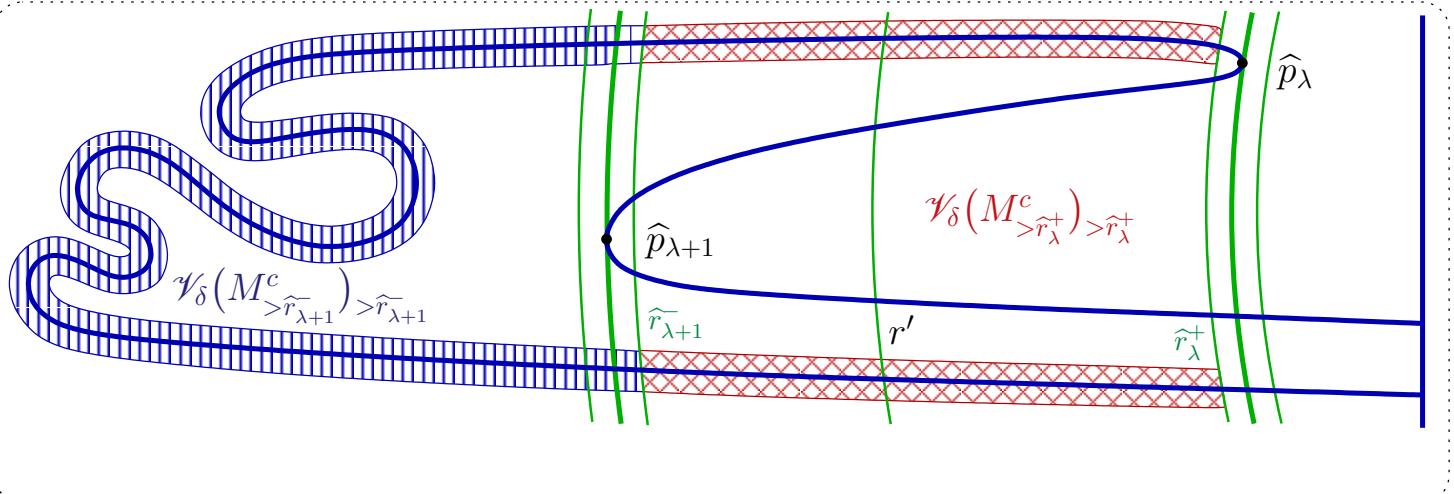


Fig. 15 : Growing of superlevel domains near a local maximum or minimum

$$v = x^2 - y_1^2 - \cdots - y_{2n-1}^2$$

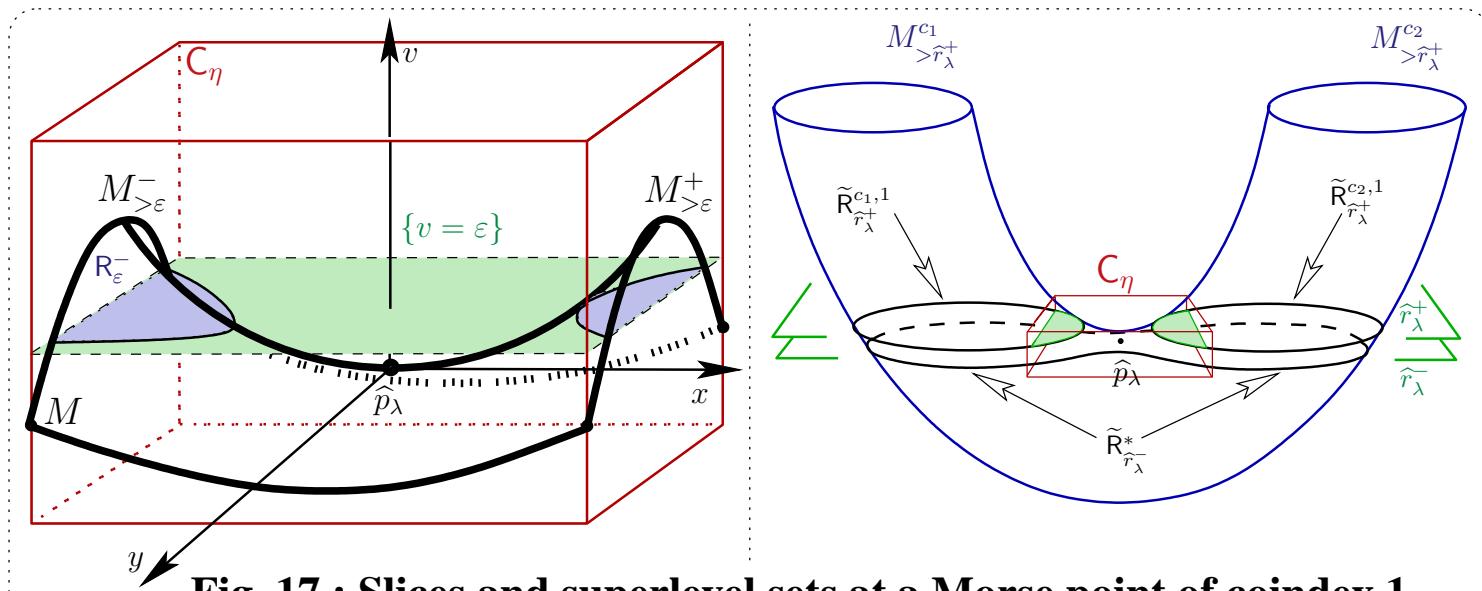


Fig. 17 : Slices and superlevel sets at a Morse point of coindex 1

$$\{v = \frac{2}{3}\eta\}$$

$$\{v = \frac{1}{2}\eta\}$$

$$\{v = 0\}$$

$$\{v = -\frac{1}{2}\eta\}$$

merge

Fig. 18 : Sliced view of the merging of the two domains in case (a)

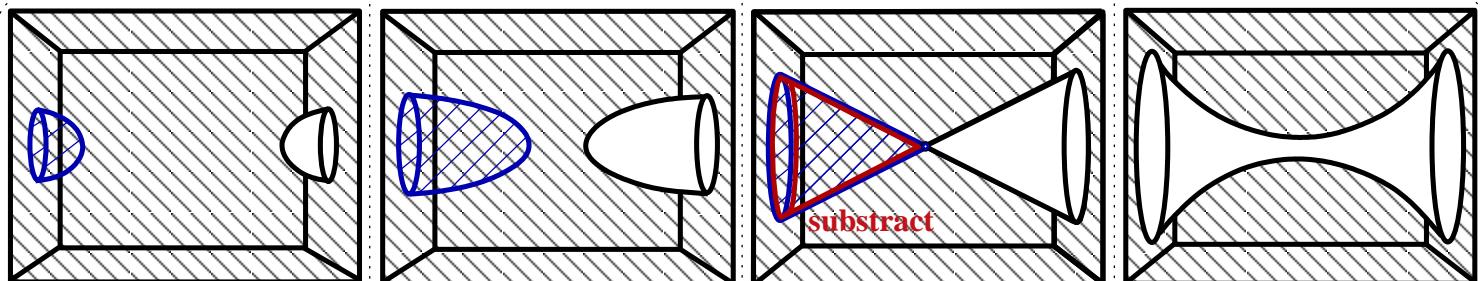


Fig. 19 : Sliced view of the substraction of the left domain in case (b)

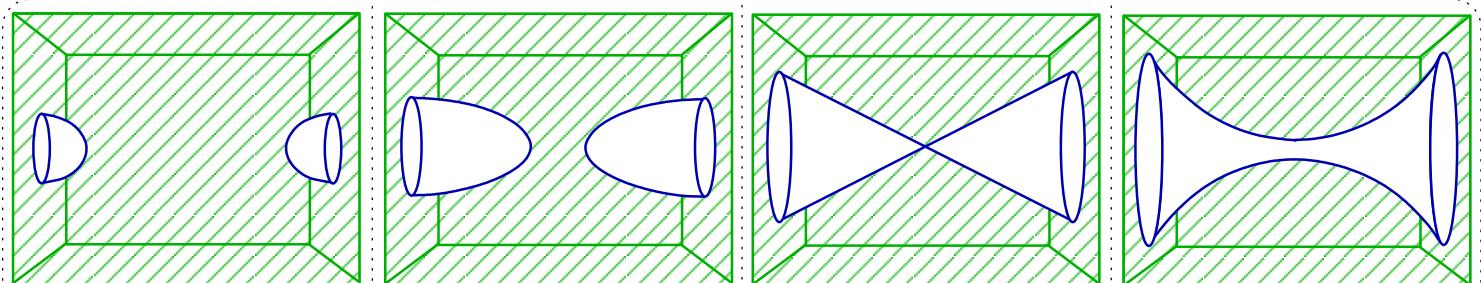


Fig. 20 : Sliced view of the growing of the external domain in case (e)

VII. Hartogs extension on singular complex spaces

- **Motivation** : get an extension theorem not currently available by means of $\bar{\partial}$ techniques.
- **$\bar{\partial}$ on singular complex spaces** : FORNÆSS-ØVRELID-VASSILIADOU ; RUPPENTHAL.
- Consider a complex space (X, \mathcal{O}_X) openly covered :

$$\bigcup_{j \in J} X_j = X.$$

- **Holomorphic isomorphisms** :

$\varphi_j : X_j \longrightarrow A_j :=$ complex analytic subset of
 $\tilde{B}_j :=$ ball $\subset \mathbb{C}^{N_j},$ some $N_j \geq 1$

- **Definition** : a \mathcal{C}^∞ function ρ is **strongly $(n - 1)$ -convex** if the extension $\tilde{\rho}_j$ can be chosen so that :

Levi form($\tilde{\rho}_j$) has at least $N_j - n + 2$ eigenvalues > 0
 $\Rightarrow \rho|_{X_{\text{reg}}}$ has at least 2 eigenvalues > 0
 \Rightarrow boundaries of super level sets (when smooth)
 $\{\rho > c\} \cap X_{\text{reg}}$ have at least 1 eigenvalue < 0

so that **superlevel sets $\{\rho > c\}$ are minimally pseudo-concave, on the regular part of X , for the local pushing of discs to be feasible.**

- **Definition** : X is **strongly $(n - 1)$ -complete** if X possesses a strongly $(n - 1)$ -convex exhaustion function.

Theorem. (M.-PORTEN, 2007) Let X be a connected $(n-1)$ -complete **normal** complex space of pure dimension $n \geq 2$. Then for every domain $\Omega \subset X$ and for every compact set $K \subset \Omega$ with the complement $\Omega \setminus K$ **connected**, holomorphic or meromorphic functions in $\Omega \setminus K$ extend holomorphically or meromorphically and uniquely to Ω :

$$\begin{aligned}\mathcal{O}_X(\Omega \setminus K) &= \mathcal{O}_X(\Omega)|_{\Omega \setminus K}, \\ \mathcal{M}_X(\Omega \setminus K) &= \mathcal{M}_X(\Omega)|_{\Omega \setminus K}.\end{aligned}$$

- **Complex manifold case** : Andreotti-Hill 1972.
- **Singular case** : We assume that X is **normal** ; **otherwise** : there exist Stein surfaces S with only one isolated singularity p such that holomorphic functions on S_{reg} fail to extend near p .
- RUPPENTHAL, Ann Arbor, December 2008 : X Stein having isolated normal singularities, with $\bar{\partial}$.
- ØVRELIID, Oslo 4 April 2008, *Flere Komplekse Variable* Seminar : **general case**, with $\bar{\partial}$.
- FORNÆSS-ØVRELIID-VASSILIADOU, Proc. AMS, 133 (2005), 2377–2386.

Geometrical proof (without $\bar{\partial}$) :

- **Idea** : filling process, similarly as previously.
- **Again** : Morse combinatorics of connected components of $\{\rho > r\} \cap M$.
- **But** : (cf. bump method) must take account of :

$$\text{Crit}(\rho) := \{p \in \Omega : d\rho(p) = 0\}$$

- **Arrange in advance that** : $\text{Crit}(\rho) \cap M = \emptyset$.
- Since the Levi form $\text{LF}(\rho)$ has ≥ 2 eigenvalues > 0 , in Morse, real coordinates at a critical point where :

$$\rho = x_1^2 + \cdots + x_k^2 - y_1^2 - \cdots - y_{2n-k}^2,$$

we have $k \geq 2$, hence all super-level sets

$$\{\rho > r\}$$

are **locally connected**, as in the figure.

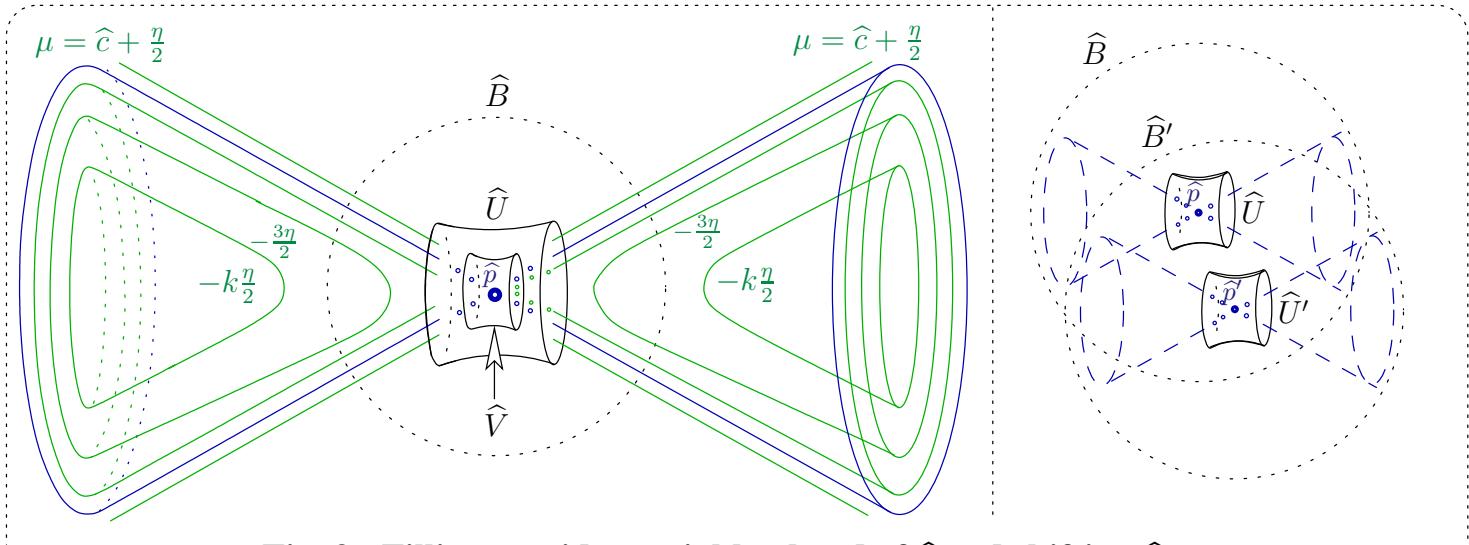


Fig. 3 : Filling outside a neighborhood of \hat{p} and shifting \hat{p}

- **Observation :** Extending from shells :

$$\{z : a < \rho(z) < b\}$$

into complete sublevel sets $\{\rho < b\}$ is much easier, because the combinatorics of connected components of $\{\rho > r\} \cap M$ **disappears**.

- **By normality of X :** For every open set $U \subset X$, both restriction maps :

$$\mathcal{O}_X(U) \longrightarrow \mathcal{O}_X(U \setminus X_{\text{sing}})$$

$$\mathcal{M}_X(U) \longrightarrow \mathcal{M}_X(U \setminus X_{\text{sing}})$$

are bijective.

Main Proposition. With X , Ω and K as in the Theorem, holomorphic or meromorphic functions on $[\Omega \setminus K]_{\text{reg}}$ extend holomorphically or meromorphically to Ω_{reg} .

- Then normality insures extension through Ω_{sing} , and the theorem is proved.

- **Smoothing out the boundary :** As in the first Hartogs Theorem :

Construct a new domain $D \Subset \Omega$ containing K such that

$$M := \partial D \cap X_{\text{reg}}$$

is a C^∞ connected hypersurface of X_{reg} , but without precise control how it approaches X_{sing} .

- Putting X_{sing} in a well :

Lemma. (Demailly 1990) There exists a quasi-psh function :

v

on X such that

$$X_{\text{sing}} = \{v = -\infty\}$$

- Quasi-psh = psh + \mathcal{C}^∞ or equivalently : for every compact $L \Subset X$, there exists $C_L > 0$ such that

$$i\partial\bar{\partial}v \geqslant -C_L > -\infty.$$

- Perturbing the exhaustion : Choose $\varepsilon > 0$ sufficiently small so that the new interesting function :

$$\mu := \rho + \varepsilon v$$

is \mathcal{C}^∞ on X_{reg} and satisfies :

- $X_{\text{sing}} = \{\mu = -\infty\}$;
- μ is strongly $(n-1)$ -convex near $\{\rho \leqslant C\} \supset D$.

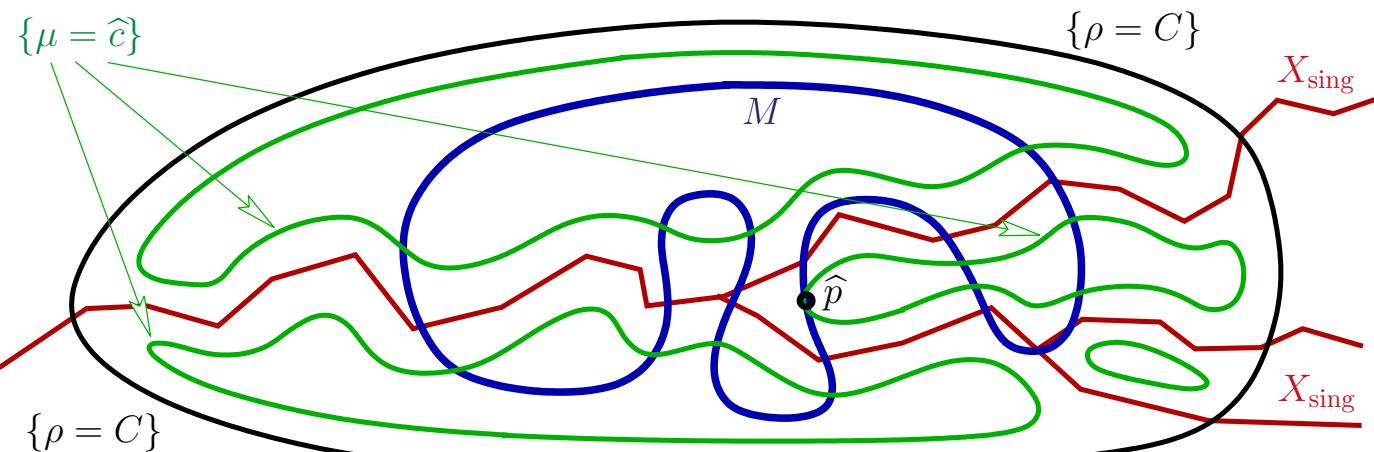


Fig. 2 : The smooth boundary M , a level-set of μ and X_{sing}

- **Morsify μ and $\mu|_{\partial D}$** : The critical points of μ and of $\mu|_{\partial D}$ are denumerable, located on different levels $\{\mu = c\}$, hence they can only accumulate toward X_{sing} .
- For $c \in \mathbb{R}$, introduce the super-level sets which play the role of the outside of balls :

$$X_{\mu>c} := \{z \in X : \mu(z) > c\}.$$

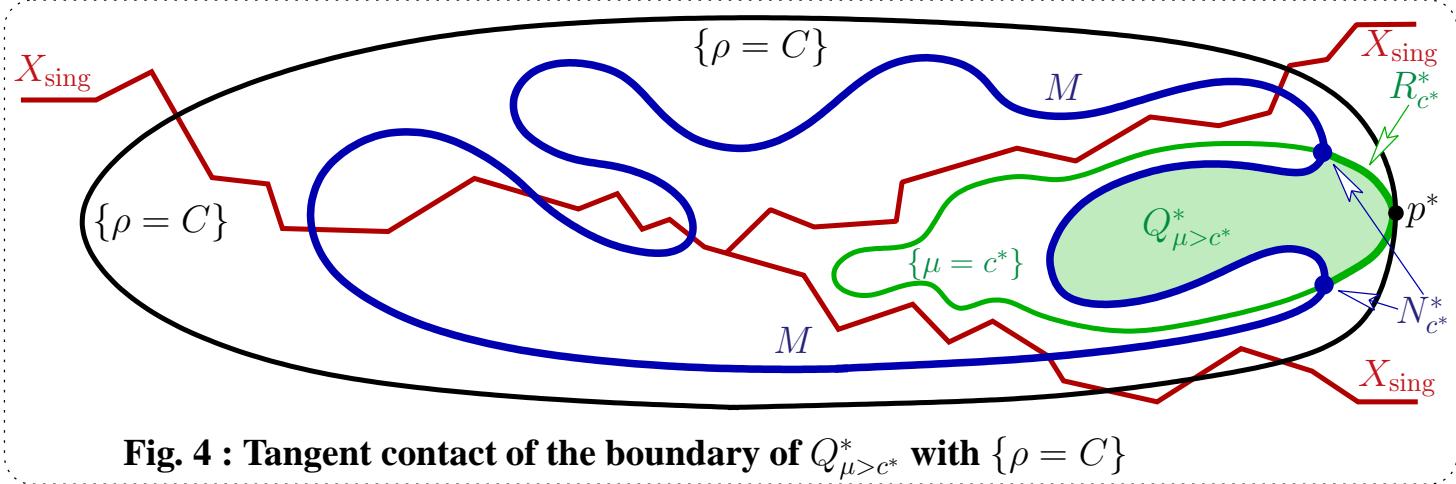
Then for every connected component $M'_{\mu>c}$ of :

$$M_{\mu>c} := M \cap X_{\mu>c} = M \cap \{\mu > c\},$$

we may perform a Levi-Hartogs filling of a certain domain $Q'_{\mu>c}$ which is enclosed by the cap $M'_{\mu>c}$.

Proposition.

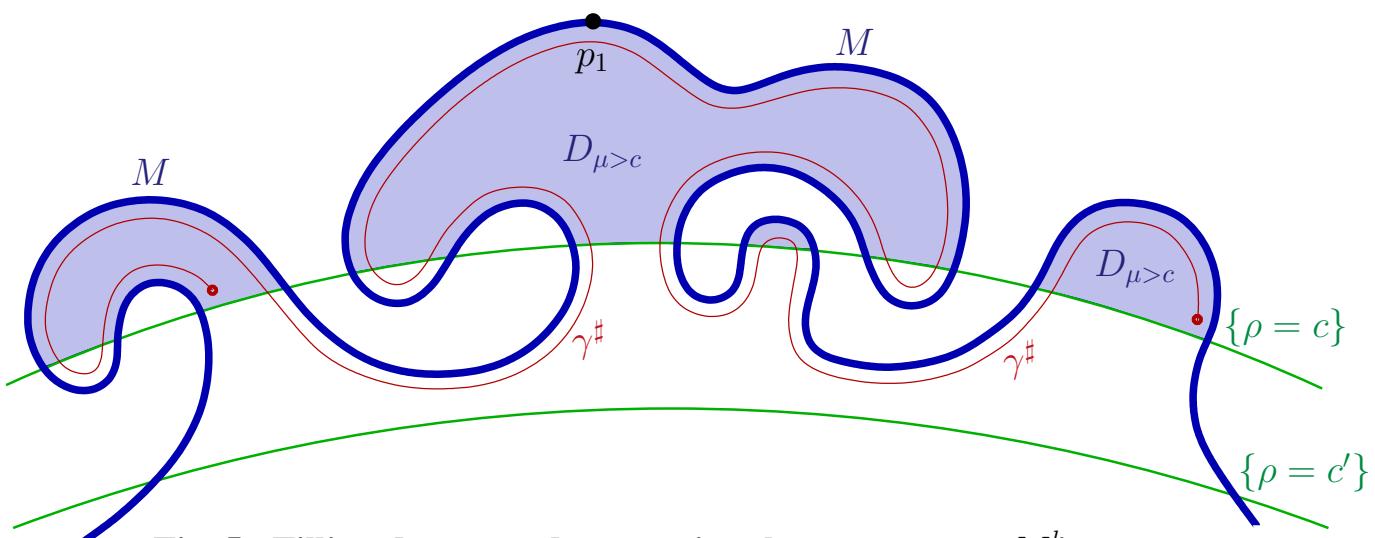
- (i) For any regular value c of μ and of $\mu|_M$, there is a unique connected component $Q'_{\mu>c}$ of $X_{\mu>c} \setminus M'_{\mu>c}$ which is relatively compact in X_{reg} and contained in $\{\rho < C\}$.
- (ii) Two different domains $Q'_{\mu>c}$ and $Q''_{\mu>c}$ are either disjoint or one is contained in the other.
- (iii) Holomorphic or meromorphic functions defined in a thin neighborhood of $M'_{\mu>c}$ extend holomorphically or meromorphically to $Q'_{\mu>c}$, by means of a finite number of $(n-1)$ -concave Levi-Hartogs figures.



Lemma. No exceptional domain $Q_{\mu>c^*}^*$ can go beyond the frontier $\{\rho < C\}$, or equivalently : all domains $Q'_{\mu>c}$ remain contained in $\{\rho < C\}$.

Proof : otherwise, along a complex tangential direction, the Levi curvature of $\partial Q_{\mu>c^*}^*$ is < 0 whereas it must be > 0 by $(n - 1)$ -convexity of ρ . \square

- **How do the components $Q'_{\mu>c}$ glue ?**



An algorithm to generate all Demailly-Semple invariants

- **Kobayashi Hyperbolicity Conjecture.**
- BLOCH, GREEN-GRIFFITHS, NOGUCHI, SIU, DEMAILLY, PAUN,
- Construct global differential equations vanishing on an ample line bundle.
- **Ahlfors-Schwarz lemma.**
- **Open question :** Understand the algebraic structure of the bundle of polynomials in the jet of an entire map that are **invariant under reparametrization**.
- **Hope :** Lower the degree bound on generic algebraic varieties $X^\nu \subset P_{\nu+1}(\mathbb{C})$ for them to be **hyperbolic**.
- **Definition :** In a local chart, denote by :

$$j^\kappa f := (f'_1, \dots, f'_\nu, f''_1, \dots, f''_\nu, \dots, f_1^{(\kappa)}, \dots, f_\nu^{(\kappa)})$$

the jet of order κ of a holomorphic disc :

$$f = (f_1, f_2, \dots, f_\nu) : \mathbb{C} \longrightarrow X^\nu,$$

We seek the polynomials $P = P(j^\kappa f)$ such that :

$$\boxed{P(j^\kappa(f \circ \phi)) = (\phi')^m P((j^\kappa f) \circ \phi)},$$

for every local reparametrization $U \xrightarrow{\phi} \phi(U) \subset \mathbb{C}$, of the disc, where $m \geq 1$ is the **weight** of the polynomial.

- DEMAILLY 1997 : $\nu = 2$, $\kappa = 2$.

$$f'_1, \quad f'_2, \quad \begin{vmatrix} f'_1 & f'_2 \\ f''_1 & f''_2 \end{vmatrix}.$$

- Denote : for all $\alpha, \beta \geq 1$:

$$\Delta^{\alpha, \beta} := \begin{vmatrix} f_1^{(\alpha)} & f_2^{(\alpha)} \\ f_1^{(\beta)} & f_2^{(\beta)} \end{vmatrix}.$$

- Examples :

$$\Delta^{1,2} = \begin{vmatrix} f'_1 & f'_2 \\ f''_1 & f''_2 \end{vmatrix}, \quad \Delta^{2,3} = \begin{vmatrix} f''_1 & f''_2 \\ f'''_1 & f'''_2 \end{vmatrix}.$$

- Introduce :

$$\Lambda^3 := \Delta^{1,2},$$

$$\Lambda_1^5 := \Delta^{1,3} f'_1 - 3 \Delta^{1,2} f''_1$$

$$\Lambda_2^5 := \Delta^{1,3} f'_2 - 3 \Delta^{1,2} f''_2$$

Theorem. (DEMAILLY ; ROUSSEAU ; 2005) In dimension $\nu = 2$ and for jets of order $\kappa = 3$, every polynomial $P(j^3 f)$ invariant by reparametrization writes uniquely :

$$P(j^3 f) = \mathcal{P}(f'_1, f'_2, \Lambda_1^5, \Lambda_2^5) + \Lambda^3 \mathcal{Q}(f'_1, f'_2, \Lambda_1^5, \Lambda_2^5),$$

with arbitrary polynomials \mathcal{P} and \mathcal{Q} .

- Unique syzygie :

$$0 \equiv f'_2 \Lambda_1^5 - f'_1 \Lambda_2^5 - 3 \Lambda^3 \Lambda^3,$$

- **Bi-invariants** : Only them do appear in the Schur decomposition of the Demainly bundle $E_{\kappa,m}T_X^*$.

- It suffices to seek directly the polynomials invariant by reparametrization $P^{inv}(j^4 f)$ that are also invariant by the unipotent action :

$$\textcolor{blue}{u} := \begin{pmatrix} 1 & \textcolor{blue}{u} \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \quad \textcolor{blue}{u} \cdot f_1^{(\lambda)} = f_1^{(\lambda)} \quad \textcolor{blue}{u} \cdot f_2^{(\lambda)} = f_2^{(\lambda)} + \textcolor{blue}{u} f_1^{(\lambda)},$$

where $u \in \mathbb{C}$, for every λ such that $1 \leq \lambda \leq \kappa$, namely which satisfy :

$$P^{inv}(\textcolor{blue}{u} \cdot j^4 f) \equiv P^{inv}(j^4 f),$$

for every $u \in \mathbb{C}$.

- We admit :

A bi-invariant monomial \iff A Schur bundle $\Gamma^{(\bullet)} T_X^*$

- When $E_{\kappa,m}T_X^*$ will be understood, the complete bundle $E_{\kappa,m}T_X^*$ will be a certain sum of these $\Gamma^{\lambda_1, \lambda_2} T_X^*$ and one will apply the formula :

$$\begin{aligned} \chi(X, \Gamma^{\lambda_1, \lambda_2} T_X^*) = \textcolor{blue}{c}_1^2 [\lambda_1^3 - \lambda_2^3] - \textcolor{blue}{c}_2 (\lambda_1 - \lambda_2)^3 + \\ + O(|\lambda|^2), \end{aligned}$$

where $\textcolor{blue}{c}_1$ and $\textcolor{blue}{c}_2$ are the Chern classes of X .

Theorem. (M. 2007) In dimension **2** for jets of order **4**, every bi-invariant polynomial writes uniquely :

$$Q(f'_1, \Lambda^3, \Lambda_{1,1}^7, M^8) + \Lambda_1^5 R(f'_1, \Lambda^3, \Lambda_{1,1}^7, M^8),$$

where **Q** and **R** are arbitrary polynomials of weight **m** and **m - 5** and where the five fundamental bi-invariant polynomials :

$$(f'_1 \quad \Lambda^3 \quad \Lambda_1^5 \quad \Lambda_{1,1}^7 \quad M^8),$$

are explicitly defined by :

$$f'_1$$

$$\Lambda^3 := \Delta^{1,2}$$

$$\Lambda_1^5 := \Delta^{1,3} f'_1 - 3 \Delta^{1,2} f''_1$$

$$\begin{aligned} \Lambda_{1,1}^7 := & \Delta^{1,4} f'_1 f'_1 + 4 \Delta^{2,3} f'_1 f'_1 - 10 \Delta^{1,3} f'_1 f''_1 + \\ & + 15 \Delta^{1,2} f''_1 f''_1 \end{aligned},$$

$$M^8 := 3 \Delta^{1,4} \Delta^{1,2} + 12 \Delta^{2,3} \Delta^{1,2} - 5 \Delta^{1,3} \Delta^{1,3}$$

and are visibly doubly invariant. Furthermore, the ideal of relations between these five polynomials is principal :

$$0 \equiv f'_1 f'_1 M^8 - 3 \Lambda^3 \Lambda_{1,1}^7 + 5 \Lambda_1^5 \Lambda_1^5.$$

- **Question :** How to grasp the Demailly invariants in general ?

An inappropriate algorithm

- **Question :** How to generate all fundamental invariants ?
- **Cross-product between invariants :** Suppose we know two invariants P of weight m and Q of weight n :

$$P(j^\kappa g) = (\phi')^m P((j^\kappa f) \circ \phi),$$

$$Q(j^\tau g) = (\phi')^n Q((j^\tau f) \circ \phi),$$

where we have set $g := f \circ \phi$.

- **To differentiate** with respect to the variable $z \in \mathbb{C}$ amounts to applying the **total differentiation operator** :

$$D := \sum_{\lambda \in \mathbb{N}} \frac{\partial(\bullet)}{\partial f^{(\lambda)}} \cdot f^{(\lambda+1)},$$

which gives here :

$$[DP](j^{\kappa+1}g) = m \phi'' \phi'^{m-1} P((j^\kappa f) \circ \phi) + \\ + \phi'^m \phi' [DP]((j^{\kappa+1}f) \circ \phi),$$

$$[DQ](j^{\tau+1}g) = n \phi'' \phi'^{n-1} Q((j^\tau f) \circ \phi) + \\ + \phi'^n \phi' [DQ]((j^{\tau+1}f) \circ \phi).$$

- **One must eliminate the second derivative ϕ'' .**

- Perform the **cross-product** :

$$\begin{aligned}
& \left| \begin{array}{cc} [\text{DP}] (j^{\kappa+1} g) & m \text{P}(j^\kappa g) \\ [\text{DQ}] (j^{\tau+1} g) & n \text{Q}(j^\tau g) \end{array} \right| = \\
&= \left| \begin{array}{cc} m \phi'' \phi'^{m-1} \text{P}((j^\kappa f) \circ \phi) + \phi'^{m+1} [\text{DP}] ((j^{\kappa+1} f) \circ \phi) & m \phi'^m \text{P}((j^\kappa f) \circ \phi) \\ n \phi'' \phi'^{n-1} \text{Q}((j^\kappa f) \circ \phi) + \phi'^{n+1} [\text{DQ}] ((j^{\tau+1} f) \circ \phi) & n \phi'^n \text{Q}((j^\kappa f) \circ \phi) \end{array} \right| \\
&= \left| \begin{array}{cc} \phi'^{m+1} [\text{DP}] ((j^{\kappa+1} f) \circ \phi) & m \phi'^m \text{P}((j^\kappa f) \circ \phi) \\ \phi'^{n+1} [\text{DQ}] ((j^{\tau+1} f) \circ \phi) & n \phi'^n \text{Q}((j^\kappa f) \circ \phi) \end{array} \right| \\
&= \phi'^{m+n+1} \left| \begin{array}{cc} [\text{DP}] (j^{\kappa+1} f) & m \text{P}(j^\kappa f) \\ [\text{DQ}] (j^{\tau+1} f) & n \text{Q}(j^\tau f) \end{array} \right|
\end{aligned}$$

and obtain a new invariant of weight $m + n + 1$.

Observation. Every pair of invariants automatically produces a new invariant :

$$[\text{P}, \text{Q}] := n \text{DP} \cdot \text{Q} - m \text{P} \cdot \text{DQ},$$

which visibly is skew-symmetric in P and Q .

- **Three generatig families of syzygies :**

$$(\mathcal{J}ac) \quad 0 \equiv [[\text{P}, \text{Q}], \text{R}] + [[\text{R}, \text{P}], \text{Q}] + [[\text{Q}, \text{R}], \text{P}].$$

$$(\mathcal{Plck}_1) \quad 0 \equiv m \text{P} [\text{Q}, \text{R}] + o \text{R} [\text{P}, \text{Q}] + n \text{Q} [\text{R}, \text{P}].$$

$$(\mathcal{Plck}_2) \quad 0 \equiv [\text{P}, \text{Q}] \cdot [\text{R}, \text{S}] + [\text{S}, \text{P}] \cdot [\text{R}, \text{Q}] + [\text{Q}, \text{S}] \cdot [\text{R}, \text{P}].$$

- **Fact :** All previously known descriptions of Demainly jets were built by taking brackets between invariants from the lower order jet-level.

- **Counterexample :** (M., 2007) For jets of order $\kappa = 5$ in dimension $\nu = 2$, one has exactly **11** principal bi-invariants obtained by taking all the possible brackets between the **5** bi-invariants at the previous level $\kappa = 4$:

$$f'_1, \quad \Lambda^3, \quad \Lambda_1^5, \quad \Lambda_{1,1}^7, \quad M^8,$$

namely the following brackets :

$$\begin{aligned}\Lambda_{1,1,1}^9 &:= [\Lambda_{1,1}^7, f'_1] \\ M_1^{10} &:= [M^8, f'_1] \\ N^{12} &:= [M^8, \Lambda^3] \\ K_{1,1}^{12} &:= [\Lambda_{1,1}^7, \Lambda_1^5] / f'_1 \\ H_1^{14} &:= [M^8, \Lambda_1^5] \\ F_{1,1}^{16} &:= [M^8, \Lambda_{1,1}^7]\end{aligned}$$

- **But there are 6 further bi-invariants :**

$$X^{18}$$

$$X^{19}$$

$$X^{21}$$

$$X^{23}$$

$$X^{25}$$

$$Y^{27}$$

and in the list of these **17** bi-invariants, no one identifies with any polynomial in the remaining 16 bi-invariants.

- **Explicit expressions :** Below, the indices i, j, k are equal to 1 or 2.

$$f'_i$$

$$\Lambda^3 := \Delta^{1,2}$$

$$\Lambda_i^5 := \Delta^{1,3} f'_i - 3 \Delta^{1,2} f''_i$$

$$\Lambda_{i,j}^7 := \Delta^{1,4} f'_i f'_j + 4 \Delta^{2,3} f'_i f'_j - 5 \Delta^{1,3} (f''_i f'_j + f'_i f''_j) + 15 \Delta^{1,2} f''_i f''_j$$

$$M^8 := 3 \Delta^{1,4} \Delta^{1,2} + 12 \Delta^{2,3} \Delta^{1,2} - 5 \Delta^{1,3} \Delta^{1,3}$$

$$\begin{aligned} \Lambda_{i,j,k}^9 := & \Delta^{1,5} f'_i f'_j f'_k + 5 \Delta^{2,4} f'_i f'_j f'_k - \\ & - 4 \Delta^{1,4} (f''_i f'_j + f'_i f''_j) f'_k - 7 \Delta^{1,4} f'_i f'_j f''_k - \\ & - 16 \Delta^{2,3} (f''_i f'_j + f'_i f''_j) f'_k - 28 \Delta^{2,3} f'_i f'_j f''_k - \\ & - 5 \Delta^{1,3} (f'''_i f'_j + f'_i f'''_j) f'_k + 35 \Delta^{1,3} (f''_i f''_j f'_k + f''_i f'_j f''_k + f'_i f''_j f''_k) - \\ & - 105 \Delta^{1,2} f''_i f''_j f''_k, \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} M_i^{10} := & [3 \Delta^{1,5} \Delta^{1,2} + 15 \Delta^{2,4} \Delta^{1,2} - 7 \Delta^{1,4} \Delta^{1,3} + 2 \Delta^{2,3} \Delta^{1,3}] f'_i - \\ & - [24 \Delta^{1,4} \Delta^{1,2} + 96 \Delta^{2,3} \Delta^{1,2} - 40 \Delta^{1,3} \Delta^{1,3}] f''_i, \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} N^{12} := & 9 \Delta^{1,5} \Delta^{1,2} \Delta^{1,2} + 45 \Delta^{2,4} \Delta^{1,2} \Delta^{1,2} - 45 \Delta^{1,4} \Delta^{1,3} \Delta^{1,2} - \\ & - 90 \Delta^{2,3} \Delta^{1,3} \Delta^{1,2} + 40 \Delta^{1,3} \Delta^{1,3} \Delta^{1,3}, \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} K_{i,j}^{12} := & f'_i f'_j \left(5 \Delta^{1,5} \Delta^{1,3} + 25 \Delta^{2,4} \Delta^{1,3} - 7 \Delta^{1,4} \Delta^{1,4} - 56 \Delta^{2,3} \Delta^{1,4} - 112 \Delta^{2,3} \Delta^{2,3} \right) + \\ & + \frac{(f'_i f''_j + f''_i f'_j)}{2} \left(- 15 \Delta^{1,5} \Delta^{1,2} - 75 \Delta^{2,4} \Delta^{1,2} + 65 \Delta^{1,4} \Delta^{1,3} + 110 \Delta^{2,3} \Delta^{1,3} \right) + \\ & + \frac{(f'_i f'''_j + f'''_i f'_j)}{2} \left(- 50 \Delta^{1,3} \Delta^{1,3} \right) + \\ & + f''_i f''_j \left(- 25 \Delta^{1,3} \Delta^{1,3} + 15 \Delta^{1,4} \Delta^{1,2} + 60 \Delta^{2,3} \Delta^{1,2} \right), \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} H_i^{14} := & \left(15 \Delta^{1,5} \Delta^{1,3} \Delta^{1,2} + 75 \Delta^{2,4} \Delta^{1,3} \Delta^{1,2} + 5 \Delta^{1,4} \Delta^{1,3} \Delta^{1,3} + \right. \\ & + 170 \Delta^{2,3} \Delta^{1,3} \Delta^{1,3} - 24 \Delta^{1,4} \Delta^{1,4} \Delta^{1,2} - 192 \Delta^{1,4} \Delta^{2,3} \Delta^{1,2} - \\ & - 384 \Delta^{2,3} \Delta^{2,3} \Delta^{1,2} \Big) f'_i + \left(- 45 \Delta^{1,5} \Delta^{1,2} \Delta^{1,2} - 225 \Delta^{2,4} \Delta^{1,2} \Delta^{1,2} + \right. \\ & + 225 \Delta^{1,4} \Delta^{1,3} \Delta^{1,2} + 450 \Delta^{2,3} \Delta^{1,3} \Delta^{1,2} - 200 \Delta^{1,3} \Delta^{1,3} \Delta^{1,3} \Big) f''_i, \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
F_{i,j}^{16} := & \left(-3 \Delta^{1,5} \Delta^{1,4} \Delta^{1,2} - 15 \Delta^{2,4} \Delta^{1,4} \Delta^{1,2} - 12 \Delta^{1,5} \Delta^{2,3} \Delta^{1,2} + \right. \\
& + 40 \Delta^{1,5} \Delta^{1,3} \Delta^{1,3} - 60 \Delta^{2,4} \Delta^{2,3} \Delta^{1,2} + 200 \Delta^{2,4} \Delta^{1,3} \Delta^{1,3} - \\
& - 49 \Delta^{1,4} \Delta^{1,4} \Delta^{1,3} - 422 \Delta^{1,4} \Delta^{2,3} \Delta^{1,3} - 904 \Delta^{2,3} \Delta^{2,3} \Delta^{1,3} \Big) f'_i f'_j + \\
& + \left(-105 \Delta^{1,5} \Delta^{1,3} \Delta^{1,2} - 525 \Delta^{2,4} \Delta^{1,3} \Delta^{1,2} + 205 \Delta^{1,4} \Delta^{1,3} \Delta^{1,3} - \right. \\
& - 230 \Delta^{2,3} \Delta^{1,3} \Delta^{1,3} + 96 \Delta^{1,4} \Delta^{1,4} \Delta^{1,2} + 768 \Delta^{1,4} \Delta^{2,3} \Delta^{1,2} + \\
& + 1536 \Delta^{2,3} \Delta^{2,3} \Delta^{1,2} \Big) (f''_i f'_j + f'_i f''_j) + \\
& + \left(-200 \Delta^{1,3} \Delta^{1,3} \Delta^{1,3} \right) (f'''_i f'_j + f'_i f'''_j) + \\
& + \left(315 \Delta^{1,5} \Delta^{1,2} \Delta^{1,2} + 1575 \Delta^{2,4} \Delta^{1,2} \Delta^{1,2} - 1575 \Delta^{1,4} \Delta^{1,3} \Delta^{1,2} - \right. \\
& - 3150 \Delta^{2,3} \Delta^{1,3} \Delta^{1,2} + 1400 \Delta^{1,3} \Delta^{1,3} \Delta^{1,3} \Big) f''_i f''_j,
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
X^{18} := & \frac{-5 \Lambda_{1,1,1}^9 M_1^{10} + 56 \Lambda_{1,1}^7 K_{1,1}^{12}}{f'_1} \\
= & f'_1 f'_1 f'_1 \left(-18816 \Delta^{1,4} [\Delta^{2,3}]^2 - 25088 [\Delta^{2,3}]^3 - 15 [\Delta^{1,5}]^2 \Delta^{1,2} - 150 \Delta^{1,5} \Delta^{2,4} \Delta^{1,2} \right. \\
& + 315 \Delta^{1,5} \Delta^{1,4} \Delta^{1,3} + 960 \Delta^{1,5} \Delta^{2,3} \Delta^{1,3} - 375 [\Delta^{2,4}]^2 \Delta^{1,2} + 1575 \Delta^{2,4} \Delta^{1,4} \Delta^{1,3} \\
& + 4800 \Delta^{2,4} \Delta^{2,3} \Delta^{1,3} - 392 [\Delta^{1,4}]^3 - 4704 [\Delta^{1,4}]^2 \Delta^{2,3} \Big) - f'_1 f'_1 f''_1 \left(-2475 \Delta^{2,4} \Delta^{1,4} \Delta^{1,2} \right. \\
& - 9900 \Delta^{2,4} \Delta^{2,3} \Delta^{1,2} - 2850 \Delta^{1,5} [\Delta^{1,3}]^2 + 51330 \Delta^{1,4} \Delta^{2,3} \Delta^{1,3} \\
& + 92760 [\Delta^{2,3}]^2 \Delta^{1,3} - 14250 \Delta^{2,4} [\Delta^{1,3}]^2 + 7035 [\Delta^{1,4}]^2 \Delta^{1,3} - 495 \Delta^{1,5} \Delta^{1,4} \Delta^{1,2} \\
& - 1980 \Delta^{1,5} \Delta^{2,3} \Delta^{1,2} \Big) - f'_1 f'_1 f'''_1 \left(-11100 \Delta^{2,3} [\Delta^{1,3}]^2 - 3150 \Delta^{1,4} [\Delta^{1,3}]^2 \right) \\
& + f'_1 f''_1 f'_1 \left(-109440 [\Delta^{2,3}]^2 \Delta^{1,2} - 19050 \Delta^{2,3} [\Delta^{1,3}]^2 - 32325 \Delta^{1,4} [\Delta^{1,3}]^2 \right. \\
& + 11025 \Delta^{1,5} \Delta^{1,3} \Delta^{1,2} + 55125 \Delta^{2,4} \Delta^{1,3} \Delta^{1,2} - 6840 [\Delta^{1,4}]^2 \Delta^{1,2} \\
& - 54720 \Delta^{1,4} \Delta^{2,3} \Delta^{1,2} \Big) - f'_1 f''_1 f'''_1 \left(+30000 [\Delta^{1,3}]^3 \right) - f''_1 f''_1 f''_1 \left(11025 \Delta^{1,5} [\Delta^{1,2}]^2 \right. \\
& - 55125 \Delta^{2,4} [\Delta^{1,2}]^2 + 55125 \Delta^{1,4} \Delta^{1,3} \Delta^{1,2} + 110250 \Delta^{2,3} \Delta^{1,3} \Delta^{1,2} \\
& \left. \left. - 49000 [\Delta^{1,3}]^3 \right) \right).
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
X^{19} := & \frac{-5 M_1^{10} M_1^{10} + 64 M^8 K_{1,1}^{12}}{f'_1} \\
= & f'_1 \left(1170 \Delta^{1,5} \Delta^{1,4} \Delta^{1,3} \Delta^{1,2} - 45 [\Delta^{1,5}]^2 [\Delta^{1,2}]^2 - 450 \Delta^{1,5} \Delta^{2,4} [\Delta^{1,2}]^2 \right. \\
& + 74220 [\Delta^{2,3}]^2 [\Delta^{1,3}]^2 + 3780 \Delta^{1,5} \Delta^{2,3} \Delta^{1,3} \Delta^{1,2} - 1600 \Delta^{1,5} [\Delta^{1,3}]^3 \\
& - 1125 [\Delta^{2,4}]^2 [\Delta^{1,2}]^2 + 5850 \Delta^{2,4} \Delta^{1,4} \Delta^{1,3} \Delta^{1,2} + 18900 \Delta^{2,4} \Delta^{2,3} \Delta^{1,3} \Delta^{1,2} \\
& - 8000 \Delta^{2,4} [\Delta^{1,3}]^3 - 1344 [\Delta^{1,4}]^3 \Delta^{1,2} - 16128 [\Delta^{1,4}]^2 \Delta^{2,3} \Delta^{1,2} + 1995 [\Delta^{1,4}]^2 [\Delta^{1,3}]^2 \\
& - 64512 \Delta^{1,4} [\Delta^{2,3}]^2 \Delta^{1,2} + 27660 \Delta^{1,4} \Delta^{2,3} [\Delta^{1,3}]^2 - 86016 [\Delta^{2,3}]^3 \Delta^{1,2} \Big) \\
& + f''_1 \left(-74400 \Delta^{2,3} [\Delta^{1,3}]^3 - 10800 \Delta^{2,4} \Delta^{1,4} [\Delta^{1,2}]^2 - 2160 \Delta^{1,5} \Delta^{1,4} [\Delta^{1,2}]^2 \right. \\
& - 8640 \Delta^{1,5} \Delta^{2,3} [\Delta^{1,2}]^2 + 3600 \Delta^{1,5} [\Delta^{1,3}]^2 \Delta^{1,2} + 64800 \Delta^{1,4} \Delta^{2,3} \Delta^{1,3} \Delta^{1,2} \\
& - 43200 \Delta^{2,4} \Delta^{2,3} [\Delta^{1,2}]^2 + 18000 \Delta^{2,4} [\Delta^{1,3}]^2 \Delta^{1,2} + 10800 [\Delta^{1,4}]^2 \Delta^{1,3} \Delta^{1,2} \\
& \left. \left. - 27600 \Delta^{1,4} [\Delta^{1,3}]^3 + 86400 [\Delta^{2,3}]^2 \Delta^{1,3} \Delta^{1,2} \right) + f'''_1 \left(16000 [\Delta^{1,3}]^4 \right) \right).
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
X^{21} &:= \frac{-5 M_1^{10} N^{12} + 8 M_1^8 H_1^{14}}{f'_1} \\
&= -135 [\Delta^{1,5}]^2 [\Delta^{1,2}]^3 - 1350 \Delta^{1,5} \Delta^{2,4} [\Delta^{1,2}]^3 + 1350 \Delta^{1,5} \Delta^{1,4} \Delta^{1,3} [\Delta^{1,2}]^2 \\
&\quad + 2700 \Delta^{1,5} \Delta^{2,3} \Delta^{1,3} [\Delta^{1,2}]^2 - 1200 \Delta^{1,5} [\Delta^{1,3}]^3 \Delta^{1,2} - 3375 [\Delta^{2,4}]^2 [\Delta^{1,2}]^3 \\
&\quad + 6750 \Delta^{2,4} \Delta^{1,4} \Delta^{1,3} [\Delta^{1,2}]^2 + 13500 \Delta^{2,4} \Delta^{2,3} \Delta^{1,3} [\Delta^{1,2}]^2 - 6000 \Delta^{2,4} [\Delta^{1,3}]^3 \Delta^{1,2} \\
&\quad - 576 [\Delta^{1,4}]^3 [\Delta^{1,2}]^2 - 6912 [\Delta^{1,4}]^2 \Delta^{2,3} [\Delta^{1,2}]^2 - 495 [\Delta^{1,4}]^2 [\Delta^{1,3}]^2 \Delta^{1,2} \\
&\quad - 27648 \Delta^{1,4} [\Delta^{2,3}]^2 [\Delta^{1,2}]^2 + 9540 \Delta^{1,4} \Delta^{2,3} [\Delta^{1,3}]^2 \Delta^{1,2} + 1200 \Delta^{1,4} [\Delta^{1,3}]^4 \\
&\quad - 36864 [\Delta^{2,3}]^3 [\Delta^{1,2}]^2 + 32580 [\Delta^{2,3}]^2 [\Delta^{1,3}]^2 \Delta^{1,2} - 7200 \Delta^{2,3} [\Delta^{1,3}]^4.
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
X^{23} &:= \frac{-7 N^{12} K_{1,1}^{12} + M_1^8 F_{1,1}^{16}}{f'_1} \\
&= f'_1 \left(432 \Delta^{1,5} [\Delta^{1,4}]^2 [\Delta^{1,2}]^2 + 3456 \Delta^{1,5} \Delta^{1,4} \Delta^{2,3} [\Delta^{1,2}]^2 + 1710 \Delta^{1,5} \Delta^{1,4} [\Delta^{1,3}]^2 \Delta^{1,2} \right. \\
&\quad - 3150 \Delta^{1,5} \Delta^{2,4} \Delta^{1,3} [\Delta^{1,2}]^2 + 540 \Delta^{1,5} \Delta^{2,3} [\Delta^{1,3}]^2 \Delta^{1,2} - 1600 \Delta^{1,5} [\Delta^{1,3}]^4 \\
&\quad - 7875 [\Delta^{2,4}]^2 \Delta^{1,3} [\Delta^{1,2}]^2 + 6912 \Delta^{1,5} [\Delta^{2,3}]^2 [\Delta^{1,2}]^2 - 8000 \Delta^{2,4} [\Delta^{1,3}]^4 \\
&\quad - 2352 [\Delta^{1,4}]^3 \Delta^{1,3} \Delta^{1,2} - 23904 [\Delta^{1,4}]^2 \Delta^{2,3} \Delta^{1,3} \Delta^{1,2} + 2205 [\Delta^{1,4}]^2 [\Delta^{1,3}]^3 \\
&\quad - 78336 \Delta^{1,4} [\Delta^{2,3}]^2 \Delta^{1,3} \Delta^{1,2} + 34740 \Delta^{1,4} \Delta^{2,3} [\Delta^{1,3}]^3 - 81408 [\Delta^{2,3}]^3 \Delta^{1,3} \Delta^{1,2} \\
&\quad + 72180 [\Delta^{2,3}]^2 [\Delta^{1,3}]^3 + 2160 \Delta^{2,4} [\Delta^{1,4}]^2 [\Delta^{1,2}]^2 + 17280 \Delta^{2,4} \Delta^{1,4} \Delta^{2,3} [\Delta^{1,2}]^2 \\
&\quad + 8550 \Delta^{2,4} \Delta^{1,4} [\Delta^{1,3}]^2 \Delta^{1,2} + 34560 \Delta^{2,4} [\Delta^{2,3}]^2 [\Delta^{1,2}]^2 + 2700 \Delta^{2,4} \Delta^{2,3} [\Delta^{1,3}]^2 \Delta^{1,2} \\
&\quad - 315 [\Delta^{1,5}]^2 \Delta^{1,3} [\Delta^{1,2}]^2 \Big) + f''_1 \left(23625 [\Delta^{2,4}]^2 [\Delta^{1,2}]^3 - 47250 \Delta^{2,4} \Delta^{1,4} \Delta^{1,3} [\Delta^{1,2}]^2 \right. \\
&\quad - 94500 \Delta^{2,4} \Delta^{2,3} \Delta^{1,3} [\Delta^{1,2}]^2 + 42000 \Delta^{2,4} [\Delta^{1,3}]^3 \Delta^{1,2} + 576 [\Delta^{1,4}]^3 [\Delta^{1,2}]^2 \\
&\quad + 6912 [\Delta^{1,4}]^2 \Delta^{2,3} [\Delta^{1,2}]^2 + 20745 [\Delta^{1,4}]^2 [\Delta^{1,3}]^2 \Delta^{1,2} + 27648 \Delta^{1,4} [\Delta^{2,3}]^2 [\Delta^{1,2}]^2 \\
&\quad + 945 [\Delta^{1,5}]^2 [\Delta^{1,2}]^3 + 9450 \Delta^{1,5} \Delta^{2,4} [\Delta^{1,2}]^3 - 9450 \Delta^{1,5} \Delta^{1,4} \Delta^{1,3} [\Delta^{1,2}]^2 \\
&\quad - 18900 \Delta^{1,5} \Delta^{2,3} \Delta^{1,3} [\Delta^{1,2}]^2 + 8400 \Delta^{1,5} [\Delta^{1,3}]^3 \Delta^{1,2} + 71460 \Delta^{1,4} \Delta^{2,3} [\Delta^{1,3}]^2 \Delta^{1,2} \\
&\quad - 37200 \Delta^{1,4} [\Delta^{1,3}]^4 + 36864 [\Delta^{2,3}]^3 [\Delta^{1,2}]^2 + 48420 [\Delta^{2,3}]^2 [\Delta^{1,3}]^2 \Delta^{1,2} \\
&\quad \left. - 64800 \Delta^{2,3} [\Delta^{1,3}]^4 \right) + f'''_1 \left(16000 [\Delta^{1,3}]^5 \right).
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
Y^{23} &:= \frac{-8 N^{12} K_{1,1}^{12} + M_1^{10} H_1^{14}}{f'_1} \\
&= X^{23}.
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
X^{25} &:= \frac{-56 K_{1,1}^{12} H_1^{14} + 5 M_1^{10} F_{1,1}^{16}}{f'_1} \\
&= f'_1 f'_1 \left(-45 [\Delta^{1,5}]^2 \Delta^{1,4} [\Delta^{1,2}]^2 - 180 [\Delta^{1,5}]^2 \Delta^{2,3} [\Delta^{1,2}]^2 - 3600 [\Delta^{1,5}]^2 [\Delta^{1,3}]^2 \Delta^{1,2} \right. \\
&\quad - 2800 \Delta^{1,5} \Delta^{1,4} [\Delta^{1,3}]^3 - 83200 \Delta^{1,5} \Delta^{2,3} [\Delta^{1,3}]^3 - 1125 [\Delta^{2,4}]^2 \Delta^{1,4} [\Delta^{1,2}]^2 \\
&\quad - 4500 [\Delta^{2,4}]^2 \Delta^{2,3} [\Delta^{1,2}]^2 - 90000 [\Delta^{2,4}]^2 [\Delta^{1,3}]^2 \Delta^{1,2} - 14000 \Delta^{2,4} \Delta^{1,4} [\Delta^{1,3}]^3 \\
&\quad - 416000 \Delta^{2,4} \Delta^{2,3} [\Delta^{1,3}]^3 - 150528 [\Delta^{1,4}]^3 \Delta^{2,3} \Delta^{1,2} - 903168 [\Delta^{1,4}]^2 [\Delta^{2,3}]^2 \Delta^{1,2} \\
&\quad + 163800 [\Delta^{1,4}]^2 \Delta^{2,3} [\Delta^{1,3}]^2 - 2408448 \Delta^{1,4} [\Delta^{2,3}]^3 \Delta^{1,2} + 1129500 \Delta^{1,4} [\Delta^{2,3}]^2 [\Delta^{1,3}]^2 \\
&\quad - 9408 [\Delta^{1,4}]^4 \Delta^{1,2} + 3675 [\Delta^{1,4}]^3 [\Delta^{1,3}]^2 - 2408448 [\Delta^{2,3}]^4 \Delta^{1,2} + 2132400 [\Delta^{2,3}]^3 [\Delta^{1,3}]^2 \\
&\quad - 450 \Delta^{1,5} \Delta^{2,4} \Delta^{1,4} [\Delta^{1,2}]^2 - 1800 \Delta^{1,5} \Delta^{2,4} \Delta^{2,3} [\Delta^{1,2}]^2 \\
&\quad - 36000 \Delta^{1,5} \Delta^{2,4} [\Delta^{1,3}]^2 \Delta^{1,2} + 11970 \Delta^{1,5} [\Delta^{1,4}]^2 \Delta^{1,3} \Delta^{1,2} \\
&\quad + 187920 \Delta^{1,5} [\Delta^{2,3}]^2 \Delta^{1,3} \Delta^{1,2} + 59850 \Delta^{2,4} [\Delta^{1,4}]^2 \Delta^{1,3} \Delta^{1,2} \\
&\quad + 939600 \Delta^{2,4} [\Delta^{2,3}]^2 \Delta^{1,3} \Delta^{1,2} + 474300 \Delta^{2,4} \Delta^{1,4} \Delta^{2,3} \Delta^{1,3} \Delta^{1,2} \\
&\quad \left. + 94860 \Delta^{1,5} \Delta^{1,4} \Delta^{2,3} \Delta^{1,3} \Delta^{1,2} \right) + f'_1 f''_1 \left(-2556600 \Delta^{1,4} \Delta^{2,3} [\Delta^{1,3}]^3 \right)
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
& -5014200 [\Delta^{2,3}]^2 [\Delta^{1,3}]^3 - 187950 [\Delta^{1,4}]^2 [\Delta^{1,3}]^3 + 5621760 \Delta^{1,4} [\Delta^{2,3}]^2 \Delta^{1,3} \Delta^{1,2} \\
& + 5652480 [\Delta^{2,3}]^3 \Delta^{1,3} \Delta^{1,2} - 2764800 \Delta^{2,4} [\Delta^{2,3}]^2 [\Delta^{1,2}]^2 \\
& + 99000 \Delta^{2,4} \Delta^{2,3} [\Delta^{1,3}]^2 \Delta^{1,2} + 500000 \Delta^{2,4} [\Delta^{1,3}]^4 + 174720 [\Delta^{1,4}]^3 \Delta^{1,3} \Delta^{1,2} \\
& + 1751040 [\Delta^{1,4}]^2 \Delta^{2,3} \Delta^{1,3} \Delta^{1,2} - 276480 \Delta^{1,5} \Delta^{1,4} \Delta^{2,3} [\Delta^{1,2}]^2 \\
& - 105300 \Delta^{1,5} \Delta^{1,4} [\Delta^{1,3}]^2 \Delta^{1,2} - 552960 \Delta^{1,5} [\Delta^{2,3}]^2 [\Delta^{1,2}]^2 \\
& + 19800 \Delta^{1,5} \Delta^{2,3} [\Delta^{1,3}]^2 \Delta^{1,2} + 100000 \Delta^{1,5} [\Delta^{1,3}]^4 + 551250 [\Delta^{2,4}]^2 \Delta^{1,3} [\Delta^{1,2}]^2 \\
& - 172800 \Delta^{2,4} [\Delta^{1,4}]^2 [\Delta^{1,2}]^2 - 1382400 \Delta^{2,4} \Delta^{1,4} \Delta^{2,3} [\Delta^{1,2}]^2 \\
& - 526500 \Delta^{2,4} \Delta^{1,4} [\Delta^{1,3}]^2 \Delta^{1,2} - 34560 \Delta^{1,5} [\Delta^{1,4}]^2 [\Delta^{1,2}]^2 + 22050 [\Delta^{1,5}]^2 \Delta^{1,3} [\Delta^{1,2}]^2 \\
& + 220500 \Delta^{1,5} \Delta^{2,4} \Delta^{1,3} [\Delta^{1,2}]^2 \Big) \\
& + f'_1 f'''_1 \left(28000 \Delta^{1,4} [\Delta^{1,3}]^4 + 472000 \Delta^{2,3} [\Delta^{1,3}]^4 \right) \\
& + f''_1 f''_1 \left(330750 \Delta^{1,5} \Delta^{1,4} \Delta^{1,3} [\Delta^{1,2}]^2 + 661500 \Delta^{1,5} \Delta^{2,3} \Delta^{1,3} [\Delta^{1,2}]^2 \right. \\
& \left. - 294000 \Delta^{1,5} [\Delta^{1,3}]^3 \Delta^{1,2} - 330750 \Delta^{1,5} \Delta^{2,4} [\Delta^{1,2}]^3 \right. \\
& \left. + 1653750 \Delta^{2,4} \Delta^{1,4} \Delta^{1,3} [\Delta^{1,2}]^2 + 3307500 \Delta^{2,4} \Delta^{2,3} \Delta^{1,3} [\Delta^{1,2}]^2 \right. \\
& \left. - 1470000 \Delta^{2,4} [\Delta^{1,3}]^3 \Delta^{1,2} - 2880 [\Delta^{1,4}]^3 [\Delta^{1,2}]^2 - 34560 [\Delta^{1,4}]^2 \Delta^{2,3} [\Delta^{1,2}]^2 \right. \\
& \left. - 812475 [\Delta^{1,4}]^2 [\Delta^{1,3}]^2 \Delta^{1,2} - 138240 \Delta^{1,4} [\Delta^{2,3}]^2 [\Delta^{1,2}]^2 - 33075 [\Delta^{1,5}]^2 [\Delta^{1,2}]^3 \right. \\
& \left. + 1446000 \Delta^{1,4} [\Delta^{1,3}]^4 - 184320 [\Delta^{2,3}]^3 \Delta^{1,2}]^2 - 3077100 [\Delta^{2,3}]^2 [\Delta^{1,3}]^2 \Delta^{1,2} \right. \\
& \left. + 2844000 \Delta^{2,3} [\Delta^{1,3}]^4 - 826875 [\Delta^{2,4}]^2 [\Delta^{1,2}]^3 - 3192300 \Delta^{1,4} \Delta^{2,3} [\Delta^{1,3}]^2 \Delta^{1,2} \right) \\
& + f''_1 f'''_1 \left(- 640000 [\Delta^{1,3}]^5 \right).
\end{aligned}$$

$Y^{27} :=$ Not yet explicitly computed,
but this would be in fact essentially useless.

The adequate algorithm

- Apply the definition :

$$\mathsf{P}(j^4(f \circ \phi)) = \phi'^m \mathsf{P}((j^4 f) \circ \phi),$$

to $\phi := f_1^{-1}$ to get nice formulas :

$$(f_2 \circ f_1^{-1})' = \frac{f'_2}{f'_1} \circ f_1^{-1},$$

$$(f_2 \circ f_1^{-1})'' = \frac{\Lambda^3}{(f'_1)^3} \circ f_1^{-1},$$

$$(f_2 \circ f_1^{-1})''' = \frac{\Lambda_1^5}{(f'_1)^5} \circ f_1^{-1},$$

$$(f_2 \circ f_1^{-1})'''' = \frac{\Lambda_{1,1}^7}{(f'_1)^7} \circ f_1^{-1},$$

whence :

$$\begin{aligned} \mathsf{P}\left(1, \frac{f'_2}{f'_1}, 0, \frac{\Lambda^3}{(f'_1)^3}, 0, \frac{\Lambda_1^5}{(f'_1)^5}, 0, \frac{\Lambda_{1,1}^7}{(f'_1)^7}\right) \circ f_1^{-1} = \\ = \left(\frac{1}{f'_1} \circ f_1^{-1}\right)^m \mathsf{P}((j^4 f \circ f_1^{-1})). \end{aligned}$$

then after reparametrizing by f_1 and simplifying :

$$\boxed{\mathsf{P}(j^4 f) = \sum_{-\frac{3}{4}m \leq a \leq m} (f'_1)^a \mathsf{P}_a(f'_2, \Lambda^3, \Lambda_1^5, \Lambda_{1,1}^7)}.$$

 **Problem :** there are **possibly negative** powers of f'_1 .

?

Why ? But this should be a polynomial !

?

How to **eliminate** negative powers ?

- **Unipotent invariance :**

$$\textcolor{blue}{u} \cdot f'_2 = f'_2 + \textcolor{blue}{u} f'_1,$$

$$\textcolor{blue}{u} \cdot \Lambda^3 = \Lambda^3, \quad \textcolor{blue}{u} \cdot \Lambda_1^5 = \Lambda_1^5, \quad \textcolor{blue}{u} \cdot \Lambda_{1,1}^7 = \Lambda_{1,1}^7,$$

therefore each P_a is in fact **independent** of f'_2 , and in conclusion, our representation of a **bi-invariant** polynomial is :

$$P(j^4 f) = \sum_{-\frac{3}{4}m \leq a \leq m} (f'_1)^a P_a(\Lambda^3, \Lambda_1^5, \Lambda_{1,1}^7).$$

- Negative powers of f'_1 are unavoidable and their presence is necessary.

- Indeed, for example : Remind the unique syzygie at the previous level $\kappa = 4$:

$$0 \equiv f'_1 f'_1 M^8 - 3 \Lambda^3 \Lambda_{1,1}^7 + 5 \Lambda_1^5 \Lambda_1^5.$$

We can solve the bi-invariant M^8 in the form :

$$M^8 = \frac{3 \Lambda^3 \Lambda_{1,1}^7 - 5 \Lambda_1^5 \Lambda_1^5}{f'_1 f'_1}$$

and there is a negative power of f'_1 .

Plan for the study of Demailly jets in the general case

- Generalize immediately the rational expression :

$$\sum_{-\frac{\kappa-1}{\kappa}m \leqslant a \leqslant m} (f'_1)^a P_a(\Lambda^3, \Lambda_1^5, \Lambda_{1,1}^7, \Lambda_{1,1,1}^9, \dots, \Lambda_{1,\dots,1}^{2\kappa-1}).$$

- Illustrate the algorithm for $\nu = 2$ and $\kappa = 5$.

- Starting point :

$$\sum_{-\frac{4}{5}m \leqslant a \leqslant m} (f'_1)^a P_a(\Lambda^3, \Lambda_1^5, \Lambda_{1,1}^7, \Lambda_{1,1,1}^9).$$

- Compute the Ideal of Relations of the bi-invariants restricted to $\{f'_1 = 0\}$:

$$\text{Ideal-Rel}\left(\Lambda^3|_0, \Lambda_1^5|_0, \Lambda_{1,1}^7|_0, \Lambda_{1,1,1}^9|_0\right),$$

namely a generating set of the ideal of all polynomials in four variables that give zero, identically, after substituting these four restricted invariants.

- Get the three relations valuable for $f'_1 = 0$:

$$\begin{aligned} 0 &\equiv -5\Lambda^5\Lambda^5 + 3\Lambda^3\Lambda^7 \Big|_0 \\ 0 &\equiv -7\Lambda^5\Lambda^7 + 3\Lambda^3\Lambda^9 \Big|_0 \\ 0 &\equiv -7\Lambda^7\Lambda^7 + 5\Lambda^5\Lambda^9 \Big|_0. \end{aligned}$$

- So without setting $f'_1 = 0$, there should be three remainders that are a multiple of f'_1 :

$$0 \equiv -5\Lambda^5\Lambda^5 + 3\Lambda^3\Lambda^7 + f'_1 \times \text{something}$$

$$0 \equiv -7\Lambda^5\Lambda^7 + 3\Lambda^3\Lambda^9 + f'_1 \times \text{something}$$

$$0 \equiv -7\Lambda^7\Lambda^7 + 5\Lambda^5\Lambda^9 + f'_1 \times \text{something}$$

- Each something necessarily also is a bi-invariant.
- Find the maximal power of f'_1 which factors each something.
- Get the three expressions :

$$0 \equiv -5\Lambda^5\Lambda^5 + 3\Lambda^3\Lambda^7 + f'_1 f'_1 M^8$$

$$0 \equiv -7\Lambda^5\Lambda^7 + 3\Lambda^3\Lambda^9 + f'_1 f'_1 M^{10}$$

$$0 \equiv -7\Lambda^7\Lambda^7 + 5\Lambda^5\Lambda^9 + f'_1 f'_1 K^{12}$$

- Test whether or not the obtained bi-invariants :

$$M^8$$

$$M^{10}$$

$$K^{12}$$

belong or do not belong to the algebra generated by the previously known bi-invariants :

$$f'_1$$

$$\Lambda^3$$

$$\Lambda^5$$

$$\Lambda^7$$

$$\Lambda^9$$

- Here : none of the above 8 bi-invariants is equal to a polynomial with respect to the 7 remaining ones.

Then restart the process with the 8 bi-invariants.

Compute the Ideal of Relations of these bi-invariants restricted to $\{f'_1 = 0\}$:

Ideal-Rel $(\Lambda^3|_0, \Lambda^5|_0, \Lambda^7|_0, \Lambda^9|_0, M^8|_0, M^{10}|_0, K^{12}|_0)$

Get the ten relations valuable for $f'_1 = 0$:

$$0 \equiv -5 \Lambda^5 \Lambda^5 + 3 \Lambda^3 \Lambda^7 \Big|_0$$

$$0 \equiv -7 \Lambda^5 \Lambda^7 + 3 \Lambda^3 \Lambda^9 \Big|_0$$

$$0 \equiv -7 \Lambda^7 \Lambda^7 + 5 \Lambda^5 \Lambda^9 \Big|_0$$

$$0 \equiv -8 \Lambda^5 M^8 + 3 \Lambda^3 M^{10} \Big|_0$$

$$0 \equiv -\Lambda^7 M^8 + 3 \Lambda^3 K^{12} \Big|_0$$

$$0 \equiv -8 \Lambda^7 M^8 + 5 \Lambda^5 M^{10} \Big|_0$$

$$0 \equiv -\Lambda^9 M^8 + 7 \Lambda^5 K^{12} \Big|_0$$

$$0 \equiv -8 \Lambda^9 M^8 + 7 \Lambda^7 M^{10} \Big|_0$$

$$0 \equiv -5 \Lambda^9 M^{10} + 56 \Lambda^7 K^{12} \Big|_0$$

$$0 \equiv -5 M^{10} M^{10} + 64 M^8 K^{12} \Big|_0$$

□ Compute carefully the remainders behind f'_1 :

$$0 \equiv -5\Lambda^5\Lambda^5 + 3\Lambda^3\Lambda^7 - f'_1 f'_1 M^8$$

$$0 \equiv -7\Lambda^5\Lambda^7 + 3\Lambda^3\Lambda^9 - f'_1 f'_1 M^{10}$$

$$0 \equiv -7\Lambda^7\Lambda^7 + 5\Lambda^5\Lambda^9 - f'_1 f'_1 K^{12}$$

$$0 \equiv -8\Lambda^5M^8 + 3\Lambda^3M^{10} - f'_1 N^{12}$$

$$0 \equiv -\Lambda^7M^8 + 3\Lambda^3K^{12} - f'_1 H^{14}$$

$$0 \equiv -8\Lambda^7M^8 + 5\Lambda^5M^{10} - f'_1 H^{14}$$

$$0 \equiv -\Lambda^9M^8 + 7\Lambda^5K^{12} - f'_1 F^{16}$$

$$0 \equiv -8\Lambda^9M^8 + 7\Lambda^7M^{10} - f'_1 F^{16}$$

$$0 \equiv -5\Lambda^9M^{10} + 56\Lambda^7K^{12} - f'_1 X^{18}$$

$$0 \equiv -5M^{10}M^{10} + 64M^8K^{12} - f'_1 X^{19}$$

□ Convention : In blue, the new invariants and in green, the already known bi-invariants.

□ In sum : 5 new bi-invariants, and again, no one is superfluous.

□ Then restart the process with the 13 bi-invariants.

□ Compute the Ideal of Relations of these bi-invariants restricted to $\{f'_1 = 0\}$:

$$\text{Id-Rel} \left(\begin{array}{c} \Lambda^3|_0, \quad \Lambda^5|_0, \quad \Lambda^7|_0, \quad \Lambda^7|_0, \quad M^8|_0, \quad M^{10}|_0, \quad K^{12}|_0 \\ N^{12}|_0, \quad H^{14}|_0, \quad F^{16}|_0, \quad X^{18}|_0, \quad X^{19}|_0 \end{array} \right)$$

Use Gröbner basis computations.

Get **32** equations, hence only **22 new** :

$$0 \equiv -5 F^{16} F^{16} + H^{14} X^{18} - f'_1 K^{12} X^{19}$$

$$0 \equiv -7 H^{14} F^{16} + N^{12} X^{18} - f'_1 M^{10} X^{19}$$

$$0 \equiv -7 H^{14} H^{14} + 5 N^{12} F^{16} - f'_1 M^8 X^{19}$$

$$0 \equiv -56 K^{12} F^{16} + M^{10} X^{18} - f'_1 Y^{27}$$

$$0 \equiv -56 K^{12} H^{14} + 5 M^{10} F^{16} - f'_1 X^{25}$$

$$0 \equiv -8 K^{12} N^{12} + M^{10} H^{14} - f'_1 X^{23}$$

$$0 \equiv -49 K^{12} H^{14} + M^8 X^{18} - f'_1 X^{25}$$

$$0 \equiv -7 K^{12} N^{12} + M^8 F^{16} - f'_1 X^{23}$$

$$0 \equiv -5 M^{10} N^{12} + 8 M^8 H^{14} - f'_1 X^{21}$$

$$0 \equiv -48 K^{12} F^{16} + \Lambda^9 X^{19} - f'_1 Y^{27}$$

$$0 \equiv -48 K^{12} H^{14} + \Lambda^7 X^{19} - f'_1 X^{25}$$

$$0 \equiv -5 \Lambda^9 F^{16} + \Lambda^7 X^{18} + 8 f'_1 K^{12} K^{12}$$

$$0 \equiv -\Lambda^9 H^{14} + \Lambda^7 F^{16} + f'_1 M^{10} K^{12}$$

$$0 \equiv -5 \Lambda^9 N^{12} + 7 \Lambda^7 H^{14} + 56 f'_1 M^8 K^{12} - f'_1 f'_1 X^{19}$$

$$0 \equiv -48 K^{12} N^{12} + \Lambda^5 X^{19} - 7 f'_1 X^{23}$$

$$0 \equiv -7 \Lambda^9 H^{14} + \Lambda^5 X^{18} + 8 f'_1 M^{10} K^{12}$$

$$0 \equiv -\Lambda^9 N^{12} + \Lambda^5 F^{16} + f'_1 M^{10} M^{10}$$

$$0 \equiv -\Lambda^7 N^{12} + \Lambda^5 H^{14} + f'_1 M^8 M^{10}$$

$$0 \equiv -10 M^{10} N^{12} + \Lambda^3 X^{19} - \frac{7}{3} f'_1 X^{21}$$

$$0 \equiv -35 \Lambda^9 N^{12} + 3 \Lambda^3 X^{18} - \frac{285}{8} f'_1 M^{10} M^{10} - \frac{7}{8} f'_1 f'_1 X^{19}$$

$$0 \equiv -7 \Lambda^7 N^{12} + 3 \Lambda^3 F^{16} + 8 f'_1 M^8 M^{10}$$

$$0 \equiv -5 \Lambda^5 N^{12} + 3 \Lambda^3 H^{14} + 8 f'_1 M^8 M^8$$

- In blue : 4 new invariants :

X^{21}	X^{23}	X^{25}	Y^{27}
----------	----------	----------	----------

- Compute the Ideal of Relations of these bi-invariants restricted to $\{f'_1 = 0\}$:

$$\text{Id-Rel} \left(\begin{array}{l} \Lambda^3|_0, \Lambda^5|_0, \Lambda^7|_0, M^8|_0, M^{10}|_0, K^{12}|_0 \\ N^{12}|_0, H^{14}|_0, F^{16}|_0, X^{18}|_0, X^{19}|_0, \\ X^{21}|_0, X^{23}|_0, X^{25}|_0, Y^{27}|_0 \end{array} \right)$$

- Next step : Special Gröbner bases package FGb.
- The standard Groebner Maple package was already unable to give the Ideal of Relations at the previous step.
- Get ~ 110 relations (depending on the order).
- It seems that no new bi-invariant appears, unfortunately.

- Hilbert's 14-th problem.
- Locally nilpotent derivations. (VAN DEN ESSEN, FREUDENBURG, DERKSEN, ROBERT, TANIMOTO).
- Van den Essen's kernel algorithm.

Proposition. Suppose that at a certain stage of the algorithm, at which one has a finite number of bi-invariants $\Lambda^3, \Lambda^5, \dots, \Lambda^{\text{last}}$, the corresponding Ideal of Restricted Relations :

$$\text{Ideal-Rel}\left(\Lambda^3|_0, \Lambda^5|_0, \dots, \Lambda^{\text{last}}|_0\right)$$

is generated by syzygies :

$$0 \equiv \text{Poly}(\Lambda^3, \dots, \Lambda^{\text{last}}) + (f'_1)^b \text{Rem}(\Lambda^3, \dots, \Lambda^{\text{last}})$$

for which **no** new bi-invariant appears behind f'_1 . Then the algebra of bi-invariants coincides with :

$$\mathbb{C}[\Lambda^3, \Lambda^5, \dots, \Lambda^{\text{last}}].$$

Démonstration. At first, we remind the initial rational expression with possibly negative powers of (f'_1) :

$$\sum_{-\frac{\kappa-1}{\kappa}m \leq a \leq m} (f'_1)^a P_a(\Lambda^3, \dots, \Lambda^{\text{last}}).$$

Next, we have to normalize each appearing polynomial P_a . To this aim, we compute a Gröbner basis for the Ideal of Restricted Relations with respect to some term-order. By eliminating all monomials of each P_a which belong to

the monomial ideal of leading monomials, we therefore get an expression of each bi-invariant polynomial :

$$P_a(j^\kappa f) \text{ modulo syzygies} = \sum \text{monomials}$$

where the appearing monomials constitute a basis of the quotient vector space :

$$\mathbb{C}[\Lambda^3, \dots, \Lambda^{\text{last}}] / \text{Ideal of Leading Monomials}.$$

Achieving such a normalization for each P_a , we get :

$$P(j^\kappa f) = \sum_{-\frac{\kappa-1}{\kappa}m \leq a \leq m} (f'_1)^a \sum \text{monomials}.$$

- **Then there are no negative powers of f'_1 anymore.**
- **Indeed :** If, in this representation, a negative power of f'_1 is still present, by clearing out we get :

$$\sum \text{monomials} = f'_1 \cdot \text{Remainder}.$$

Then by setting $f'_1 = 0$, we deduce :

$$\sum \text{monomials} \Big|_0 \equiv 0,$$

but this is impossible, because, by definition, there can be no syzygy between the monomials. \square

Theorem. (M. 2008)

- (i) At each step of the algorithm, there can only appear **finitely many bi-invariants** which do not belong to the algebra generated by all the bi-invariants known from the preceding level.
- (ii) If at some next level, **no new bi-invariant appears**, then the algorithm terminates : no new further bi-invariant exists, and there are no negative powers of f'_1 anymore.
- (iii) In this case, a unique writing of every polynomial :

$$\mathcal{P}_a(\Lambda^3, \Lambda^5, \dots, X^{\text{last}})$$

modulo the Gröbner basis of the finitely many bi-invariants yields an exact **denumbering** of all the **Schur bundles** $\Gamma^{(\bullet)}T_X^*$ decomposing the Demainly bundle $E_{k,m}T_X^*$.

- (iv) One deduces (**easier computation**) an estimate of the Euler characteristic :

$$\chi(X, E_{\kappa,m}T_X^*) = m^{\kappa+2} \left(A^\kappa \cdot c_1^2 - B^\kappa \cdot c_2 \right) + O(m^{\kappa+1}).$$

Theorem. For jets of order **4** in dimension **2** The Euler characteristic computation gives :

$$\chi(X, E_{4,m}T_X^*) = \frac{m^6}{12293120} (1797 c_1^2 - 848 c_2) + O(m^5)$$

and the meaningful quotient :

$$\frac{A^4}{B^4} = \frac{1797}{848} = \mathbf{2,119\dots}$$

shows positivity for every $d \geqslant 9$.

- **Bogomolov vanishing theorem.**

Corollaire. Every entire holomorphic map into a complex algebraic surface $X^2 \subset P_3(\mathbb{C})$ of degree $d \geqslant 9$ enjoys nontrivial global algebraic differential equations vanishing on an ample divisor.

- **Jets of order 5 :**

- Computation not completed.
- Hope (but probably false) :** There could be infinitely many bi-invariants, as in Nagata's counterexample to Hilbert's 14-th problem.
- Subbundle generated by brackets : Smaller :**

$$\frac{A^5}{B^5} = \mathbf{1.887\dots}$$

Dimension 3

Theorem. (ROUSSEAU, 2004–6)

(i) In dimension $\nu = 3$ for jets of order $\kappa = 3$, in addition to the three bi-invariant polynomials already known from the study of the dimension two :

$$f'_1 \quad \Lambda^3 \quad \Lambda_1^5,$$

there is **only one more** bi-invariant, the **Wronskian** :

$$D^6 := \begin{vmatrix} f'_1 & f'_2 & f'_3 \\ f''_1 & f''_2 & f''_3 \\ f'''_1 & f'''_2 & f'''_3 \end{vmatrix}.$$

Furthermore, these four bi-invariants are algebraically independent, namely there are **no syzygy at all**.

(ii) The Euler characteristic of $E_{3,m}T_X^*$, for $X^3 \subset P_4(\mathbb{C})$ a complex algebraic hypersurface, is positive for all degrees $d \geq 43$.

(iii) A careful estimate of the contribution of the intermediate cohomology dimension h^2 shows that global differential equations vanishing on an ample divisor exist in degree $d \geq 97$.

(iv) For X of degree $d \geq 593$, every entire map is algebraically degenerate.

Theorem. (DIVERIO 2007) Let $X^\nu \subset P^{\nu+1}$ be a complex algebraic, smooth hypersurface. Then :

$$H^0(X, E_{\kappa,m} T_X^*) = 0,$$

for all jet orders $\kappa < \nu$ strictly less than the dimension of X .

Dimension 4

- Euler characteristic of the Schur bundle :

$$\chi(X, \Gamma^{(l_1, l_2, l_3, l_4)} T_X^*) =$$

$$\begin{aligned}
&= \frac{-c_1^4 + 3c_1^2c_2 - c_2^2 - 2c_1c_3 + c_4}{0! 1! 2! 7!} \begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ l_1 & l_2 & l_3 & l_4 \\ l_1^2 & l_2^2 & l_3^2 & l_4^2 \\ l_1^7 & l_2^7 & l_3^7 & l_4^7 \end{vmatrix} + \\
&+ \frac{-c_4}{1! 2! 3! 4!} \begin{vmatrix} l_1 & l_2 & l_3 & l_4 \\ l_1^2 & l_2^2 & l_3^2 & l_4^2 \\ l_1^3 & l_2^3 & l_3^3 & l_4^3 \\ l_1^4 & l_2^4 & l_3^4 & l_4^4 \end{vmatrix} + \frac{-c_1c_3 + c_4}{0! 2! 3! 5!} \begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ l_1^2 & l_2^2 & l_3^2 & l_4^2 \\ l_1^3 & l_2^3 & l_3^3 & l_4^3 \\ l_1^5 & l_2^5 & l_3^5 & l_4^5 \end{vmatrix} + \\
&+ \frac{-c_1^2c_2 + c_2^2 + c_1c_3 - c_4}{0! 1! 3! 6!} \begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ l_1 & l_2 & l_3 & l_4 \\ l_1^3 & l_2^3 & l_3^3 & l_4^3 \\ l_1^6 & l_2^6 & l_3^6 & l_4^6 \end{vmatrix} + \\
&+ \frac{c_1c_3 - c_2^2}{0! 1! 4! 5!} \begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ l_1 & l_2 & l_3 & l_4 \\ l_1^4 & l_2^4 & l_3^4 & l_4^4 \\ l_1^5 & l_2^5 & l_3^5 & l_4^5 \end{vmatrix} + O(|l|^9).
\end{aligned}$$

- **16 Jet variables :**

$$(f'_1, f'_2, f'_3, f'_4, f''_1, f''_2, f''_3, f''_4, f'''_1, f'''_2, f'''_3, f'''_4, f''''_1, f''''_2, f''''_3, f''''_4)$$

- The same trick of reparametrizing by f_1^{-1} yields an expression of the form :

$$\mathsf{P}(j^4 f) = \sum_{-\frac{3}{4}m \leqslant a \leqslant m} (f'_1)^a \mathsf{P}_a \left(f'_2, f'_3, f'_4, \Lambda_{1,2}^3, \Lambda_{1,3}^3, \Lambda_{1,4}^3, \Lambda_{1,2;1}^5, \Lambda_{1,3;1}^5, \Lambda_{1,4;1}^5, \Lambda_{1,2;1,1}^7, \Lambda_{1,3;1,1}^7, \Lambda_{1,4;1,1}^7 \right),$$

with each P_a depending upon the following invariants :

$$\begin{aligned} \Lambda_{1,i}^3 &:= \Delta_{1,i}^{'''} \\ \Lambda_{1,i;1}^5 &:= \Delta_{1,i}^{''''} f'_1 - 3 \Delta_{1,i}^{''''} f''_1 \\ \Lambda_{1,i;1,1}^7 &:= (\Delta_{1,i}^{''''''} + 4 \Delta_{1,i}^{''''''}) f'_1 f'_1 - \\ &\quad - 10 \Delta_{1,i}^{''''''} f'_1 f''_1 + 15 \Delta_{1,i}^{''''} f''_1 f''_1 \end{aligned}$$

- Unipotent invariance : matrices of the form

$$\mathbf{u} := \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ u_a & 1 & 0 & 0 \\ u_b & u_d & 1 & 0 \\ u_c & u_e & u_f & 1 \end{pmatrix}$$

• Invariance by the subgroup :

$$\mathbf{v} := \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ u_a & 1 & 0 & 0 \\ u_b & 0 & 1 & 0 \\ u_c & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

implies that each P_a is **independent of** f'_2, f'_3, f'_4 :

$$P(j^5 f) = \sum_{-\frac{3}{4}m \leqslant a \leqslant m} (f'_1)^a P_a \left(\cancel{f'_2}, \cancel{f'_3}, \cancel{f'_4}, \right. \\ \Lambda_{1,2}^3, \Lambda_{1,3}^3, \Lambda_{1,4}^3, \\ \Lambda_{1,2;1}^5, \Lambda_{1,3;1}^5, \Lambda_{1,4;1}^5 \\ \left. \Lambda_{1,2;1,1}^7, \Lambda_{1,3;1,1}^7, \Lambda_{1,4;1,1}^7 \right),$$

• Invariance by the subgroup :

$$\mathbf{w} := \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & u_d & 1 & 0 \\ 0 & u_e & u_f & 1 \end{pmatrix}$$

implies that each P_a is a polynomial with respect to firstly the three obvious bi-invariants :

$$\Lambda_{1,2}^3 \quad \Lambda_{1,2;1}^5 \quad \Lambda_{1,2;1,1}^7$$

and secondly to the four algebraic combinations :

$$\begin{vmatrix} \Lambda_{1,2}^3 & \Lambda_{1,3}^3 \\ \Lambda_{1,2;1}^5 & \Lambda_{1,3;1}^5 \end{vmatrix} \equiv f'_1 f'_1 D_{1,2,3}^6$$

$$\begin{vmatrix} \Lambda_{1,2}^3 & \Lambda_{1,3}^3 \\ \Lambda_{1,2;1,1}^7 & \Lambda_{1,3;1,1}^7 \end{vmatrix} = f'_1 f'_1 D_{1,2,3;1}^8$$

$$\begin{vmatrix} \Lambda_{1,2;1}^5 & \Lambda_{1,3;1}^5 \\ \Lambda_{1,2;1,1}^7 & \Lambda_{1,3;1,1}^7 \end{vmatrix} = f'_1 f'_1 N^{10},$$

$$\begin{vmatrix} \Lambda_{1,2}^3 & \Lambda_{1,3}^3 & \Lambda_{1,4}^3 \\ \Lambda_{1,2;1}^5 & \Lambda_{1,3;1}^5 & \Lambda_{1,4;1}^5 \\ \Lambda_{1,2;1,1}^7 & \Lambda_{1,3;1,1}^7 & \Lambda_{1,4;1,1}^7 \end{vmatrix} = f'_1 f'_1 f'_1 f'_1 f'_1 W^{10},$$

where the last one appears to be equal to the **Wronskian** :

$$W^{10} := \begin{vmatrix} f'_1 & f'_2 & f'_3 & f'_4 \\ f''_1 & f''_2 & f''_3 & f''_4 \\ f'''_1 & f'''_2 & f'''_3 & f'''_4 \\ f''''_1 & f''''_2 & f''''_3 & f''''_4 \end{vmatrix}.$$

Here of course, as we know, we must clear out any appearing power of f'_1 . Then after a while of computation, the appearing bi-invariants are explicitly given by :

$$D_{1,2,3;1}^6 := \begin{vmatrix} f'_1 & f'_2 & f''_3 \\ f''_1 & f''_2 & f''_3 \\ f'''_1 & f'''_2 & f'''_3 \end{vmatrix}$$

$$D_{1,2,3;1}^8 := f'_1 \begin{vmatrix} f'_1 & f'_2 & f''_3 \\ f''_1 & f''_2 & f''_3 \\ f''''_1 & f''''_2 & f''''_3 \end{vmatrix} - 6 f''_1 \begin{vmatrix} f'_1 & f'_2 & f''_3 \\ f''_1 & f''_2 & f''_3 \\ f'''_1 & f'''_2 & f'''_3 \end{vmatrix}$$

$$N^{10} := \Delta_{1,2,3}^{\prime\prime\prime\prime\prime\prime\prime\prime} f'_1 f'_1 - 3 \Delta_{1,2,3}^{\prime\prime\prime\prime\prime\prime\prime} f'_1 f''_1 + \\ + 4 \Delta_{1,2,3}^{\prime\prime\prime\prime\prime\prime} f'_1 f'''_1 + 3 \Delta_{1,2,3}^{\prime\prime\prime\prime\prime} f''_1 f''_1$$

- Starting point for the algorithm :

$$\mathsf{P}(j^5 f) = \sum_{-\frac{3}{4}m \leqslant a \leqslant m} (f'_1)^{\textcolor{red}{a}} \mathsf{P}_a \left(\Lambda^3, \Lambda^5, \Lambda^7, D^6, D^8, N^{10}, W^{10} \right)$$

- Recall :

- Maple-compute Ideal of Relation of the invariants restricted to $\{f'_1 = 0\}$.
- Maple-compute the remainders behind the power(s) of f'_1 .
- Test whether or not each remainder belongs to the algebra generated by the previous invariants.
- Wait until the algorithm terminates or hope that there are infinitely many invariants.

Theorem. (M. 2008) In dimension $\nu = 4$ and for jets of order $\kappa = 4$, the Demailly bundle of jets invariants under reparametrization and under the unipotent action is an algebra generated by exactly **16** bi-invariants :

	f'_1	Λ^3	Λ^5	D^6
	Λ^7	M^8	D^8	N^{10}
E^{10}	L^{12}	Q^{14}	R^{15}	W^{10}
	U^{17}	V^{19}	X^{21}	

enjoying syzygies described by an ideal having approximately **40** generators (depending on the term-order for any Gröbner basis).

- **Remark :** In dimension $\nu = 3$ for jets of order $\kappa = 3$ (**ROUSSEAU**), there were **4** bi-invariants and **zero** syzygy.
- **Euler characteristic computation :** Yet to be done.

- **Syzygies :**

$$0 \equiv 5\Lambda^5\Lambda^5 - 3\Lambda^3\Lambda^7 + f'_1 f'_1 M^8$$

$$0 \equiv 2\Lambda^5 D^6 - \Lambda^3 D^8 + \frac{1}{3} f'_1 E^{10}$$

$$0 \equiv \Lambda^7 D^6 - 5\Lambda^3 N^{10} + f'_1 L^{12}$$

$$0 \equiv \Lambda^5 D^8 - 6\Lambda^3 N^{10} + f'_1 L^{12}$$

$$0 \equiv 5\Lambda^5 E^{10} - 3\Lambda^3 L^{12} - 6 f'_1 D^6 M^8$$

$$0 \equiv 5\Lambda^7 E^{10} + 3\Lambda^3 Q^{14} - 6 f'_1 D^8 M^8$$

$$0 \equiv 4 D^8 E^{10} + 3\Lambda^3 R^{15} - f'_1 U^{17}$$

$$0 \equiv 5\Lambda^5 L^{12} + 3\Lambda^3 Q^{14} - f'_1 D^8 M^8$$

$$0 \equiv 8 D^6 L^{12} + 5\Lambda^3 R^{15} - \frac{1}{3} f'_1 U^{17}$$

$$0 \equiv 24 M^8 D^6 D^8 - 5\Lambda^5 U^{17} + 3\Lambda^3 V^{19}$$

$$0 \equiv 36 M^8 D^6 D^8 + 5 E^{10} E^{10} - 3\Lambda^3 U^{17}$$

.....

Équipe de Mathématiques Fondamentales

Évaluation CNRS quadriennale, 9 janvier 2007

« ANALYSE ET GÉOMÉTRIE » au LATP, 2002–2006

• Chercheur CNRS :

1

Joël Merker (CR1)

• Enseignants-chercheurs :

7

Alexander Borichev (Professeur)

Bernard Coupet (Professeur)

Hervé Gaussier (Mdc)

Karim Kellay (Mdc)

Stanislas Kupin (Mdc)

Stéphane Rigat (Mdc)

El Hassan Youssfi (Professeur)

• PRAG, ATER^s, Doctorants :

11

Cyril Agrafeuil (PRAG ; ATER, 2005 U3)

Florian Bertrand (doctorant, dir. **Gaussier**)

Camille Bièche (thèse 2005, ATER, dir. **Coupet**)

Léa Blanc-Centi (thèse 2006, ATER, dir. **Coupet**)

Sylvain Damour (thèse 2001, PRAG, dir. **Coupet**)

Remy Dhuez (thèse 2005, ATER, dir. **Kellay**)

Julien Giol (ATER 2004 U3)

Reinhold Küstner (ATER 2004, thèse à Sophia)

Stéphanie Lovera (thèse 2005, ATER, dir. **Youssfi**)

Patrice Roman (thèse 2004, secondaire, dir. **Youssfi**)

Florence Scalas (thèse 2005, ATER, dir. Youssfi)

- Recrutements récents :

Juin 2003 : Stanislas Kupin (MdC)

Juin 2006 : Alexander Borichev (Pr)

- Thèmes de recherche :

Analyse en plusieurs variables complexes

Analyse fonctionnelle et théorie des opérateurs

Analyse harmonique

Théorie des fonctions et théorie du potentiel

Géométrie de Cauchy-Riemann

Analyse sur les variétés presque complexes

Théorie de Lie-Cartan des EDP et G -structures

- Production scientifique 2002–2006 :

2 habilitations à diriger des recherches :

Juin 2004 : Hervé Gaussier

Avril 2006 : Joël Merker

7 thèses soutenues + 6 en cours, dont 2 en cotutelle

3 livres ou articles de survol ($\sim 200, 200, 300$ pp.)

53 publications dans des revues à comité de lecture

5 publications mineures [CRAS redondants, actes colloques]

6 organisations de conférences

- 2 GDR^s : Analyse fonctionnelle ; pluricomplexe
 - 2 actions intégrées : Maroc ; Tunisie
- Politique de recrutement en Analyse et Géométrie Complexes : période 1997–2006 :

9 Maîtres de Conférences ou assimilés :

Gaussier (1997), Merker (1997), Briand (1998), Kellay (1999), Rigat (2000), Haïssinsky (2001), Mohsen (2002), Kupin (2003), Yeganefar (2004).

3 Professeurs :

Hubbard (1998), Teleman (1999), Borichev (2006)

• Accords et échanges nationaux :

- Angers (LAREMA)
- Bordeaux (UMR 5466)
- Lille (LAGAT & LIFL)
- Lyon (UMR 5208)
- Nice (INRIA, Sophia-Antipolis)
- Poitiers (Futuroscope)
- Toulouse (Émile Picard)
- Paris (P6 & ENS Ulm)

• Accords et échanges internationaux :

- Allemagne (Berlin)
- Autriche (Linz & Innsbruck)
- Canada (Québec)

- Corée (Pohang & Pusan)
- Espagne (Barcelone)
- États-Unis d'Amérique (Albany, Providence, Caltech, Bloomington, St Louis, Michigan & Wisconsin)
- Israël (Tel Aviv & Ramat-Gan)
- Japon (Kumamoto)
- Maroc (Rabat)
- Norvège (Trondheim)
- Russie (Moscou & St Petersbourg)
- Suède (KTH, Stockholm univ., Uppsala & Sundsvall)
- Tunisie (Bizerte, Monastir)

- **Supports financiers :**

- CNRS via le LATP, UMR6632 (dir. Gallouët)
- FRUMAM et INRIA (séminaire mensuel Marseille-Nice)
- GDR Analyse et géométrie en plusieurs variables complexes 2002–2006 (resp. P. Thomas)
- Projet Européen (2000–2004) « Network in Analysis » (resp. J. Esterle)
- GDR Analyse fonctionnelle et harmonique (resp. E. Ouhabaz)

Une action intégrée franco-tunisienne 2002–2006
+ CMCU 2000–2004 (resp. B. Coupet)

Et une action intégrée franco-marocaine 2002–2006 (resp. M. Mbekhta)

• Objet central fédérateur : **Le disque unité dans \mathbb{C}**

$$\{\zeta \in \mathbb{C} : |\zeta| < 1\}$$

Notations des analystes : \mathbb{D}

cercle unité : \mathbb{T} .

Notation des géomètres : Δ

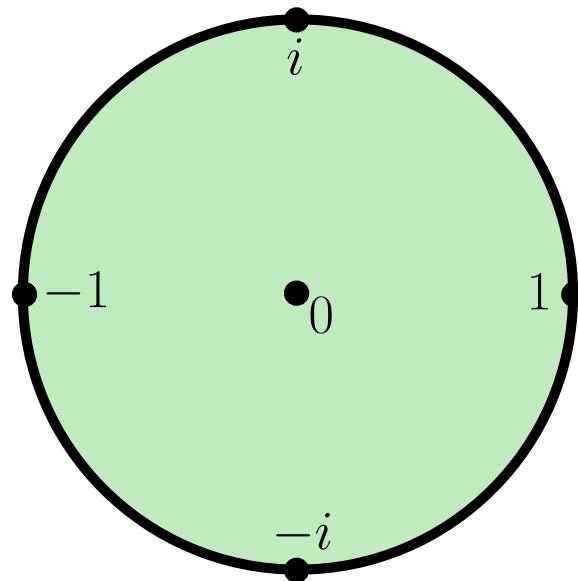
cercle unité : $\partial\Delta$.

Disques analytiques Prolongements à la Hartogs

Fonctions Dunkl-harmoniques

Approximation
rationnelle

polynômes
orthogonaux



Disques pseudo-holomorphes

Échantillonage
et Interpolation

• Capacité d'évolution scientifique :

- Vers l'Analyse Harmonique et la théorie spectrale.
- CR $\Rightarrow J$ -holomorphe et Lie-Cartan.
- Opérateurs de Dunkl ; électro-encéphalographie.

A. Borichev, R. Dhuez, K. Kellay

Échantillonnage et interpolation
dans les espaces de Bergman et de Fock à poids

- $\mathbb{D} :=$ le disque unité dans \mathbb{C} .

- Soit h une fonction \mathcal{C}^∞ **croissante positive** sur $[0, 1)$ avec $\lim_{r \rightarrow 1^-} h(r) = +\infty$, prolongée à \mathbb{D} par $h(z) := h(|z|)$.

- Considérons l'**espace de type Bergman L^∞ à poids** :

$$\mathcal{A}_h(\mathbb{D}) := \left\{ f \in \mathcal{O}(\mathbb{D}) : \|f\|_h := \sup_{z \in \mathbb{D}} |f(z)| e^{-h(z)} < +\infty \right\}.$$

- Bergman classique : $\int_{\mathbb{D}} |f(z)|^p (1 - |z|)^\alpha dA(z) < +\infty$.

- **Exemples de poids :**

$$h(r) = \begin{cases} \text{(i)} \log \frac{e}{1-r} \log \log \frac{e^2}{1-r} & \text{(ii)} \frac{1}{(1-r)^\alpha} \text{ avec } \alpha > 0 \\ \text{(iii)} \exp \frac{1}{(1-r)^\alpha} & \text{(iv)} \underbrace{\exp \exp \cdots \exp}_{k \text{ fois}} \frac{1}{(1-r)^\alpha} \end{cases}$$

- Un sous-ensemble discret $\Gamma \subset \mathbb{D}$ est dit :

- d'échantillonnage** pour $\mathcal{A}_h(\mathbb{D})$ s'il existe une constante $L_\Gamma > 0$ telle que pour tout $f \in \mathcal{A}_h(\mathbb{D})$, on a :

$$\|f\|_h \leq L_\Gamma \|f|_\Gamma\|_h := L_\Gamma \sup_{z \in \Gamma} |f(z)| e^{-h(z)} < +\infty;$$

- d'interpolation** pour $\mathcal{A}_h(\mathbb{D})$ si $\forall (a_\gamma)_{\gamma \in \Gamma}, a_\gamma \in \mathbb{C}$, avec $\sup_{\gamma \in \Gamma} |a_\gamma| e^{-h(\gamma)} < +\infty$, $\exists f \in \mathcal{A}_h(\mathbb{D})$ telle que

$$f(\gamma) = a_\gamma \quad \forall \gamma \in \Gamma.$$

- Posons

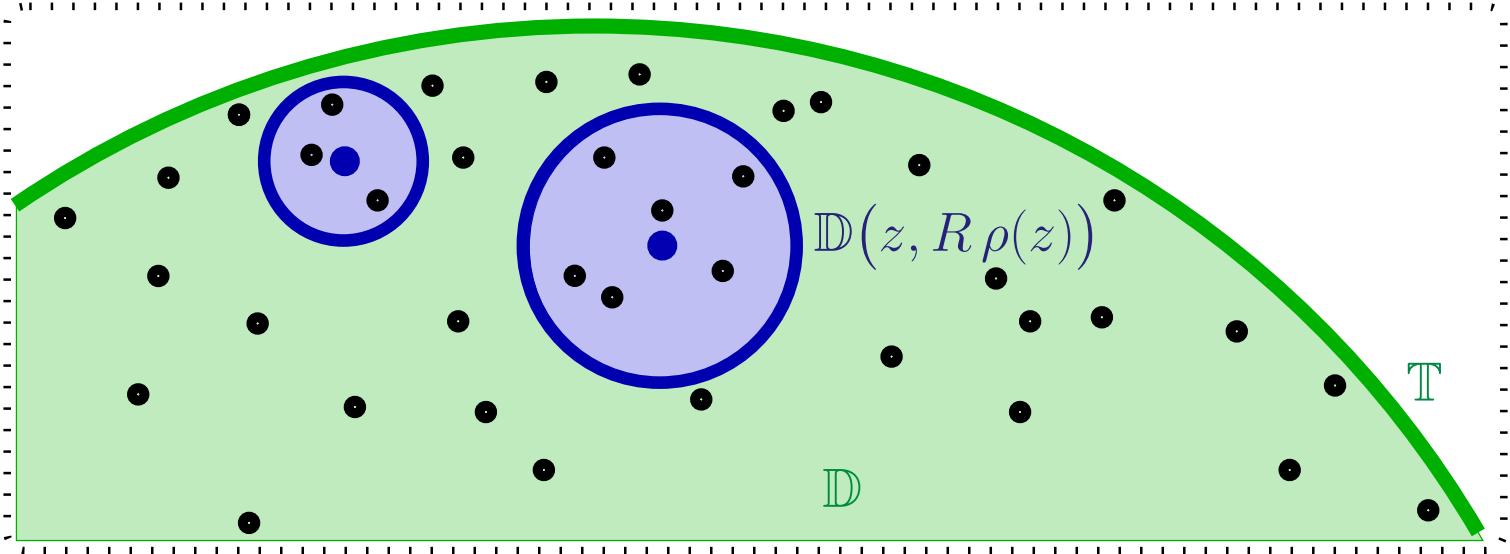
$$\rho_h(z) := [\Delta h(z)]^{-1/2}$$

- et supposons que pour $|z| \rightarrow 1$, on a :

$$\rho_h(z) \longrightarrow 0.$$

- On dit que $\Gamma \subset \mathbb{D}$ est **ρ_h -séparé** s'il existe $c > 0$ tq :

$$\inf_{\substack{z, w \in \Gamma \\ z \neq w}} \frac{|z - w|}{\min [\rho_h(z), \rho_h(w)]} \geq c > 0.$$



Théorème. *Un ensemble $\Gamma \subset \mathbb{D}$ est d'**échantillonnage** dans $\mathcal{A}_h(\mathbb{D})$ si et seulement si il existe $\Gamma^* \subset \Gamma$ un sous-ensemble ρ_h -séparé tel que :*

$$\liminf_{R \rightarrow \infty} \liminf_{z \in \mathbb{D}, |z| \rightarrow 1} \frac{\text{Card}[\Gamma \cap \mathbb{D}(z, R\rho(z))]}{\pi R^2} > \frac{1}{2\pi}.$$

Théorème. *Un ensemble $\Gamma \subset \mathbb{D}$ est d'**interpolation** dans $\mathcal{A}_h(\mathbb{D})$ si et seulement si Γ est ρ_h -séparé et si :*

$$\limsup_{R \rightarrow \infty} \limsup_{z \in \mathbb{D}, |z| \rightarrow 1} \frac{\text{Card}[\Gamma \cap \mathbb{D}(z, R\rho(z))]}{\pi R^2} < \frac{1}{2\pi}.$$

S. Kupin (avec S. Denisov)

Polynômes orthogonaux et condition de Szegö

- $\mathbb{T} := \{t : |t| = 1\}$ le cercle unité, $t = e^{i\theta}$.

- Mesure de Lebesgue : $dm(t) := \frac{1}{2\pi} \frac{dt}{it} = \frac{1}{2\pi} d\theta$.
- $\sigma = \sigma'_{\text{ac}} dm + \sigma_{\text{s}}$ mesure de Borel positive sur \mathbb{T} .
- **Polynômes orthogonaux** $\{\varphi_n\}_{n \in \mathbb{Z}}$ par rapport à σ :
 $\int_{\mathbb{T}} \varphi_n \overline{\varphi_m} d\sigma = \delta_n^m$.
- **Problème** : Propriétés asymptotiques ?
- Domaine très compétitif fin 20^{ième} — début 21^{ième} : travaux récents de Simon, Deift, Rakhmanov, Totik et al.
- Points distincts $\zeta_j \in \mathbb{T}$ de multiplicité $\kappa_j \geq 1$. On dit que σ est dans la **classe de Szegö polynomiale** si :

$$\int_{\mathbb{T}} \prod_{1 \leq j \leq N} |t - \zeta_j|^{2\kappa_j} \log \sigma'_{\text{ac}}(t) dm(t) > -\infty.$$

- **Théorème de Szegö** : $\kappa_j = 0$.
- Noyau de Schwarz modifié : $K(t, z) := \frac{t+z}{t-z} \frac{q(t)}{q(z)}$ avec $q(t) := \prod_{1 \leq j \leq N} \frac{(t - \zeta_j)^{2\kappa_j}}{(-t \zeta_j)^{2\kappa_j}}$. Poser $\varphi_n^*(z) := z^n \overline{\varphi_n(1/\bar{z})}$ et :

$$\tilde{\varphi}_n^*(z) = \exp \int_{\mathbb{T}} K(t, z) \log |\varphi_n^*(t)| dm(t), \quad \tilde{D}(z) = \exp \int_{\mathbb{T}} \frac{K(t, z) \log \sigma'_{\text{ac}}(t)}{2} dm(t)$$

Théorème. Soit σ une mesure Szegö-polynomiale. Alors

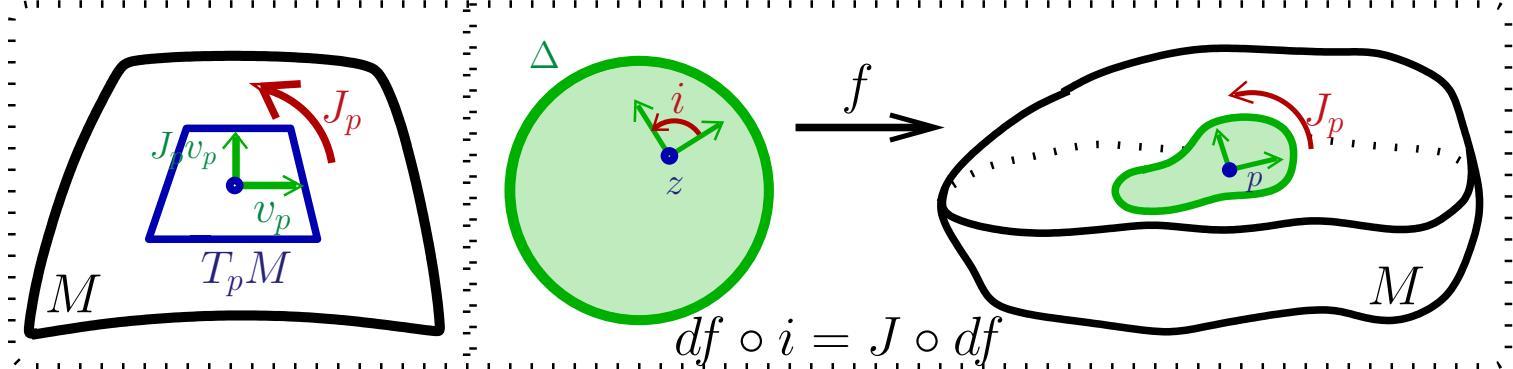
$$\lim_{n \rightarrow \infty} \int_{\mathbb{T}} |\tilde{D} \tilde{\varphi}_n^* - 1|^2 d\theta = 0.$$

d'où $\lim_{n \rightarrow \infty} \tilde{D}(z) \tilde{\varphi}_n^*(z) = 1$ pour tout $z \in \mathbb{D}$.

B. Coupet et H. Gaussier (avec A. Sukhov)

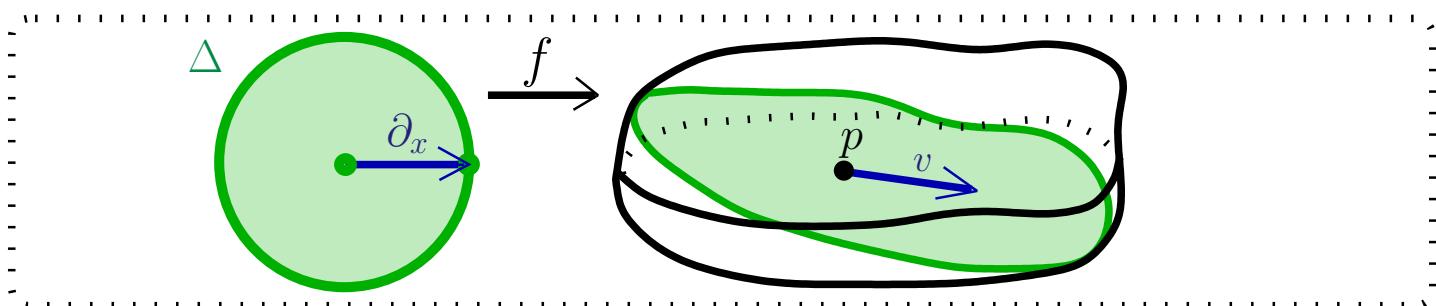
Métrique de Kobayashi et théorème de Fefferman dans les variétés presque complexes

- **Variété presque complexe :** M^{2n} avec $J_p : T_p M \rightarrow T_p M$ pseudo-rotations $J_p \circ J_p = -\text{Id}$.
- **Disque pseudoholomorphe :** $f : \Delta \rightarrow M$ tel que :



- **Métrique infinitésimale de Kobayashi-Royden :**

$$\text{Kob}_p(v) = \inf \left\{ \alpha : \exists f : \Delta \rightarrow M, f(0) = p, f_*(\partial_x) = \frac{v}{\alpha} \right\}$$



- **Question de S. Kobayashi :** tout point $p \in M$ a-t-il une base de voisinages hyperboliques complets ?
- Domaine $D \subset M$ **hyperbolique complet** si $\forall p \in D$:

$$\{q \in D : \text{Kob-dist}(q, p) < r\} \subset\subset D.$$
- Domaine $D = \{\rho < 0\} \subset\subset M$, fonction $\rho \in \mathcal{C}^2$.
- **Tangent pseudo-holomorphe :**

$$H_p^J \partial D := T_p \partial D \cap J T_p \partial D.$$

- **Forme de Levi :** $\mathsf{L}_p^J(\rho)(v) := -d(J^*d\rho)_p(v, Jv)$.
- ∂D est **SJ Ψ C** si $\mathsf{L}^J|_{H_p^J \partial D}$ est définie positive.

Théorème. Soit $D = \{\rho < 0\} \subset\subset M$ un domaine strictement J -pseudoconvexe, avec $\rho \in \mathcal{C}^2$ dans $\mathcal{V}(\overline{D})$. Alors pour tout $p \in D$ et $v \in T_p M$:

$$\text{Kob}_p(v) \geq c \left[\frac{\|\partial_J \rho(p)(v - iJ_p v)\|^2}{|\rho(p)|^2} + \frac{\|v\|}{|\rho(p)|} \right]^{1/2}.$$

- $(x_i)_{1 \leq i \leq 2n}$ en p avec $J_p = J_{\text{st}}$ puis $U_k := \{\|x\| < \frac{1}{k}\}$.

Corollaire. Tout point $p \in M$ possède une base de voisinages hyperboliques complets U_k .

- **Version presque complexe de Fefferman 1974 :**

Théorème. Soient $D \subset\subset M$ et $D' \subset\subset M'$ deux domaines bornés, $\dim M = \dim M' = 2n$. Supposons que D admet une structure J presque complexe \mathcal{C}^∞ sur \overline{D} et que $(\partial D, J)$ est **SJ Ψ C**. Pour tout $h : D \rightarrow D'$ difféomorphisme \mathcal{C}^∞ , les conditions suivantes sont équivalentes :

- (i) h se prolonge $\overline{D} \longrightarrow \overline{D}'$ en difféomorphisme \mathcal{C}^∞ ;
- (ii) $J' := f_* J$ est une structure presque complexe sur D' qui se prolonge \mathcal{C}^∞ à \overline{D}' et $(\partial D', f_* J)$ est **SJ Ψ C**.

- **Blanc-Centi** : applications propres et domaines à bord $\mathcal{C}^{\kappa+1,\alpha} \implies$ régularité $\mathcal{C}^{\kappa,\alpha}$ sur \overline{D} .

- Bertrand : relèvements de J + domaines de type fini.
S. Rigat (avec J. Leblond et A. Amassad)

Détection de sources dipolaires dans des ellipsoïdes Applications à l'électroencéphalographie Interaction avec l'INRIA Sophia Antipolis

- Cerveau : modélisé par un ellipsoïde $\Omega \subset \mathbb{R}^3$.
- c_k et p_k **foyers** et **moments** épileptogènes.
- Différence de potentiel u de la distribution de courant :

$$\Delta u = \sum_{k=1}^m \langle p_k, \nabla \delta_{c_k} \rangle.$$

- Mesures accessibles sur $\partial\Omega$: $u = g$ et $\frac{\partial u}{\partial \vec{n}} = \phi$.
- Problème : reconstituer les c_k et les p_k .
- Solution u générale :

$$u(x) = h(x) + \sum_{k=1}^m \frac{\langle p_k, x - c_k \rangle}{\|x - c_k\|^3}, \quad h \text{ harmonique.}$$

- Première étape : techniques de décomposition en harmoniques ellipsoïdales pour isoler $\sum_{k=1}^m \frac{\langle p_k, x - c_k \rangle}{\|x - c_k\|^3}$.
- Seconde étape : techniques d'approximation rationnelle pour calculer les c_k et les p_k .
- Représentation conforme : les sections planes horizontales de $\partial\Omega$ sont des ellipses. Généralisation lorsque

ces sections sont des images du **cercle unité** par des applications rationnelles.

E.H. Youssfi

- **Groupe de réflexions sur \mathbb{R}^d** : $G = (\sigma_\alpha)_{\alpha \in R} \subset \mathrm{O}(d)$.

- **Opérateur de Dunkl** : $\xi \in \mathbb{R}^d$, multiplicité k , $f \in \mathcal{C}^1$:

$$T_\xi(k)f(x) := \partial_\xi f(x) + \sum_{\alpha \in R_+} k(\alpha) \langle \alpha, \xi \rangle \frac{f(x) - f(\sigma_\alpha x)}{\langle \alpha, x \rangle},$$

- **Laplacien de Dunkl** : base $(e_i)_{1 \leq i \leq d}$ et $\Delta_h := \sum_i T_{e_i}^2$,

- **Opérateur d'entrelacement** : $T_\xi(k) \circ V_k = V_k \circ \partial_\xi$.

$$P(x, \xi) := V_k \left(\frac{1 - \|x\|^2}{[1 - 2 \langle x, \cdot \rangle + \|x\|^2]^{\gamma+d/2}} \right) (\xi).$$

- **Fonction G -invariante** :

$$h(x) := \prod_{\alpha \in R_+} |\langle x, v_j \rangle|^{k(\alpha)}.$$

- Cas $d = 2$, $\zeta = x_1 + i x_2$, groupe diédral, $\alpha, \beta \geq 0$:

$$h(\zeta) := \left| \frac{\zeta^k - \bar{\zeta}^k}{2i} \right|^\alpha \cdot \left| \frac{\zeta^k + \bar{\zeta}^k}{2} \right|^\beta,$$

Théorème. Si $f \in \mathcal{C}^0(\mathbb{T})$, alors la fonction F définie par

$$F(z) := \begin{cases} \int_{\mathbb{T}} P(z, \zeta) f(\zeta) h(\zeta) dm(\zeta) & \text{si } z \in \mathbb{D}, \\ f(z) & \text{si } z \in \mathbb{T} = \partial \mathbb{D} \end{cases}$$

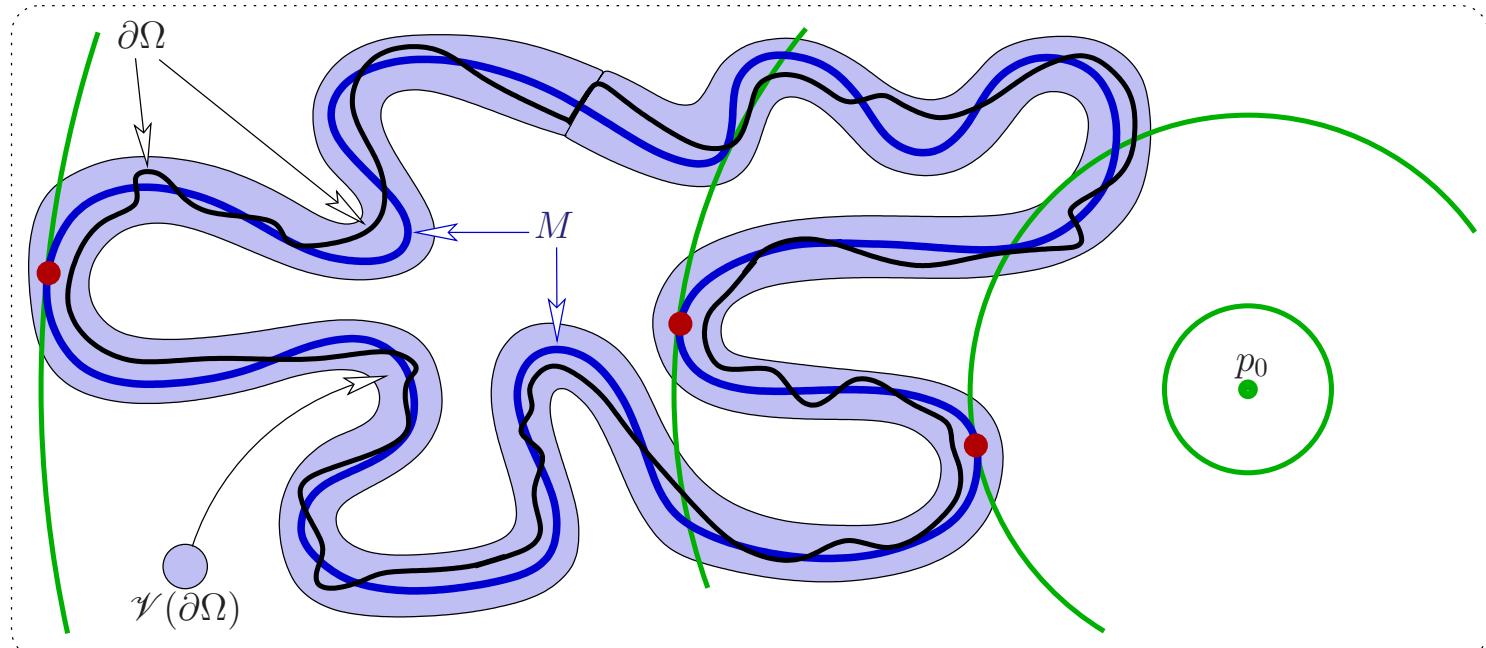
est \mathcal{C}^0 sur $\overline{\mathbb{D}}$, est Dunkl-harmonique sur \mathbb{D} et constitue l'unique solution au problème de Dirichlet-Dunkl.

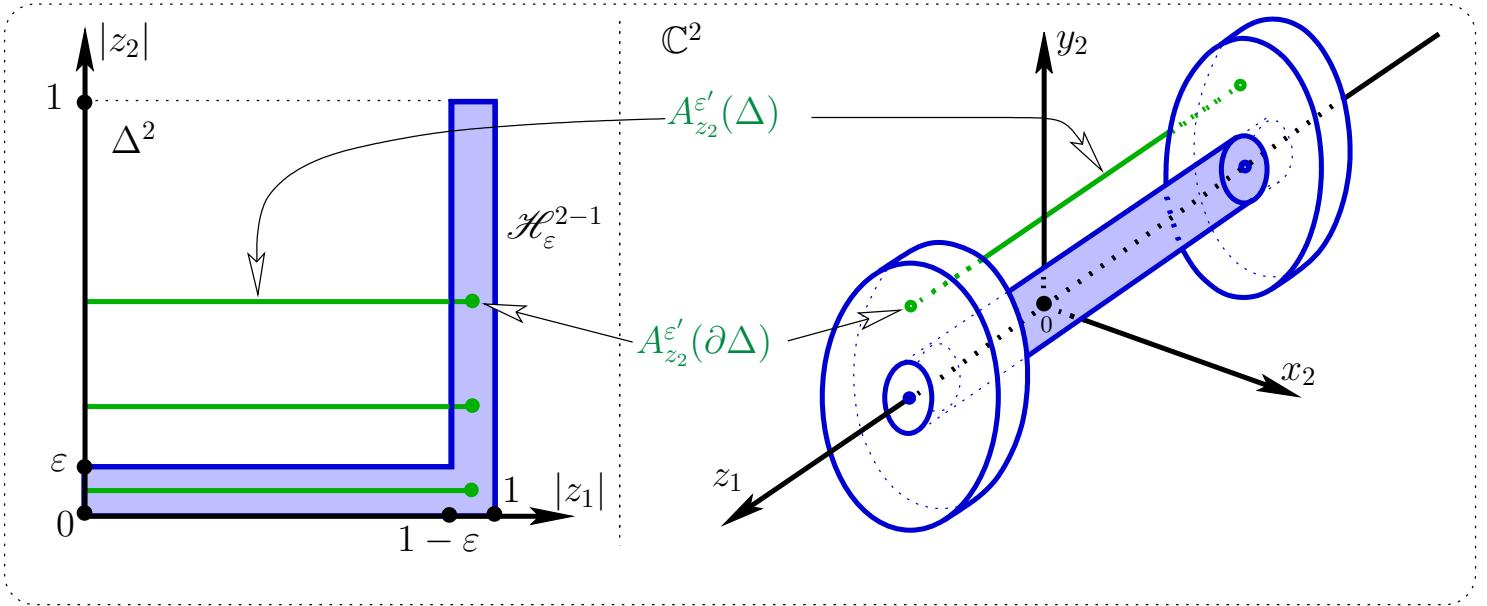
- Cas $\beta = 0$: **Scalas** ; Cas général : **Maslouhi-Youssfi**.
- Comportement au bord des intégrales de Poisson associées : **Scalas** ; **Maslouhi-Youssfi**.

Singularités éliminables pour les fonctions CR et théorème d'extension de Hartogs

- (i) *Characteristic foliations on maximally real submanifolds of \mathbb{C}^n and removable singularities*, International Mathematics Research Papers, 2006, 131 pp.
- (ii) *Holomorphic extension of CR functions*, International Mathematics Research Surveys, 2006, 287 pp.
- (iii) *A geometrical proof of the Hartogs extension theorem*, Prepublication DMA 06–10, ENS Ulm, 37 pp.

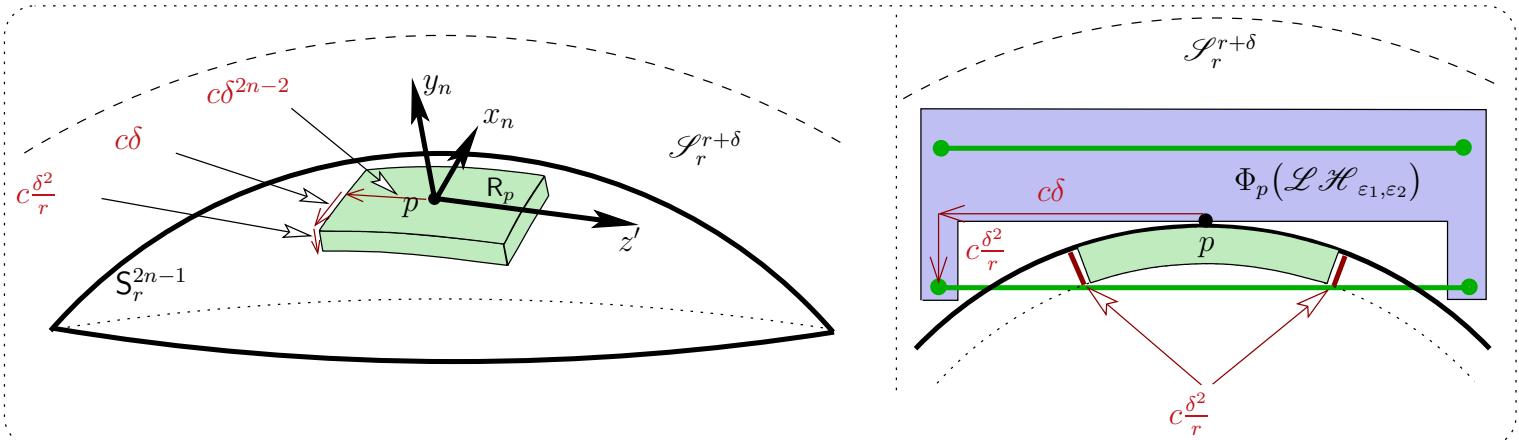
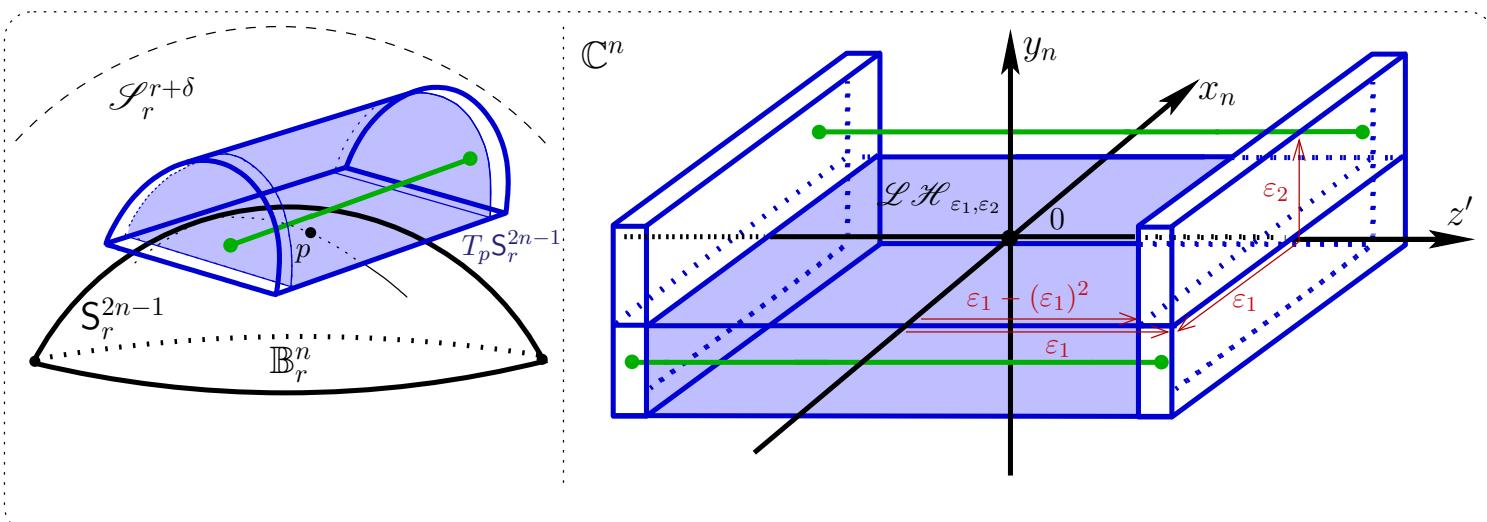
Hartogs 1906 [Osgood 1929]. Soit $\Omega \subset \mathbb{C}^n$ un domaine borné à bord connexe. Si $n \geq 2$, toute fonction holomorphe définie dans un voisinage ouvert connexe $\mathcal{V}(\partial\Omega)$ de $\partial\Omega$ se prolonge holomorphiquement à l'intérieur de Ω .

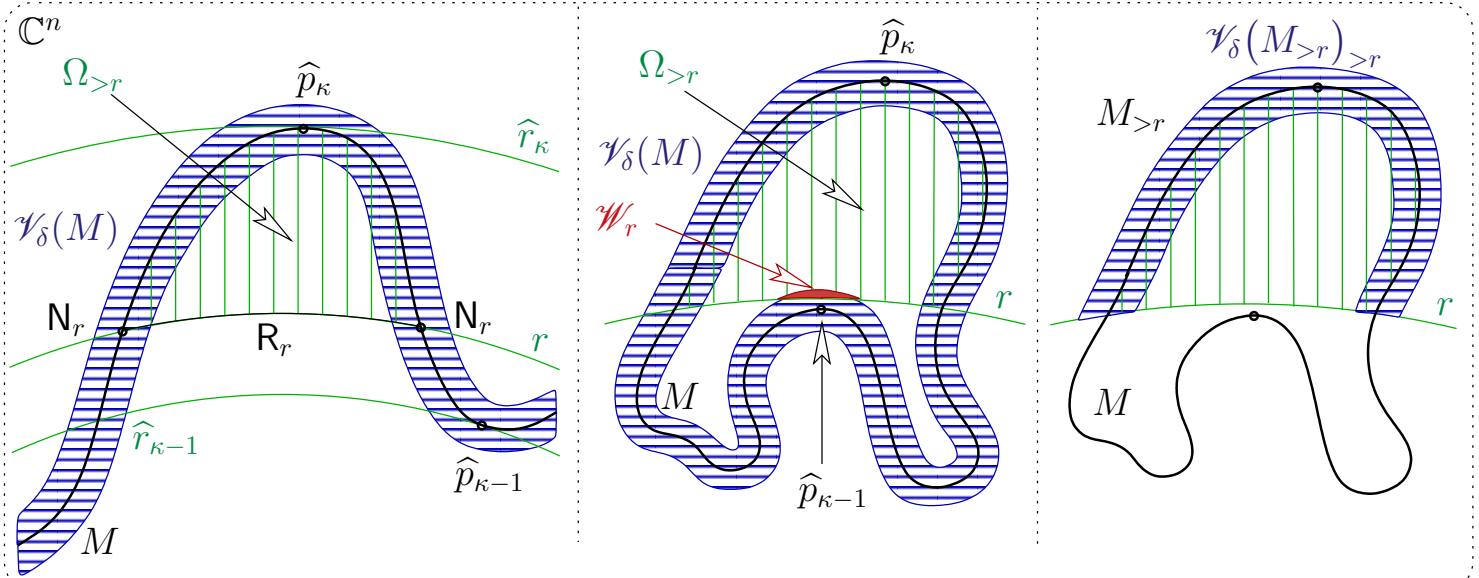
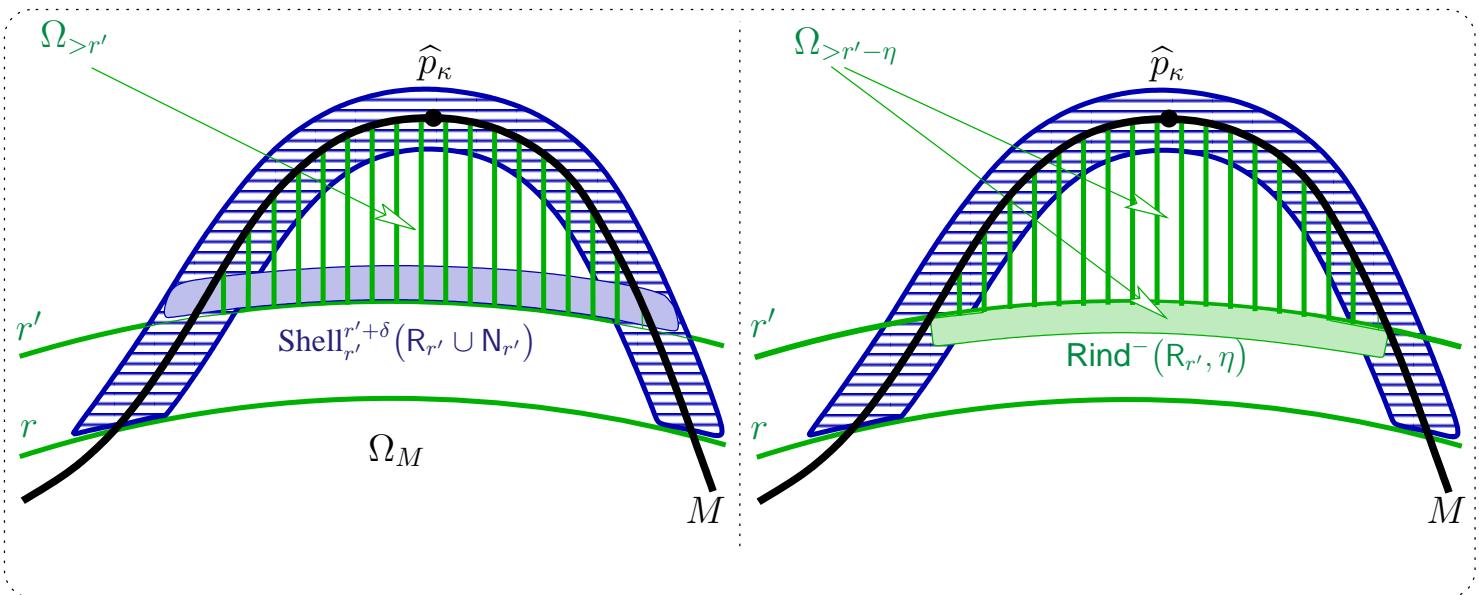
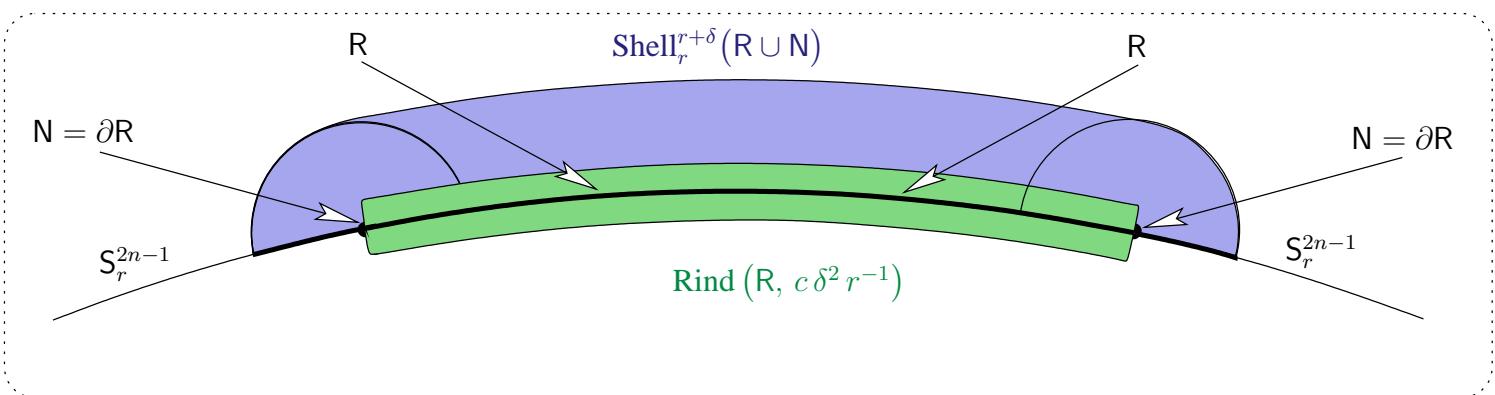
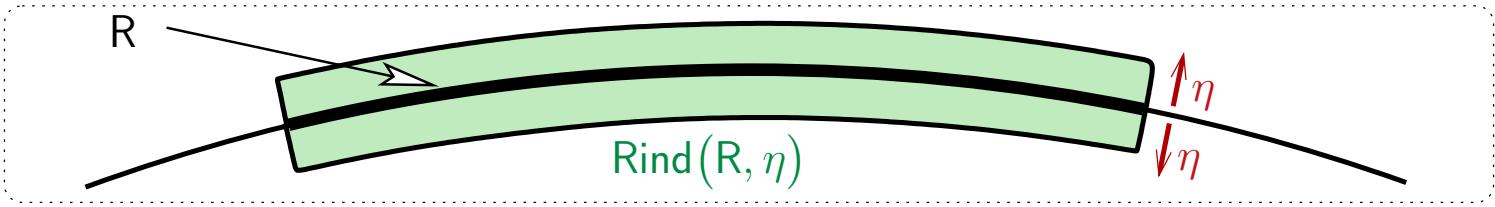


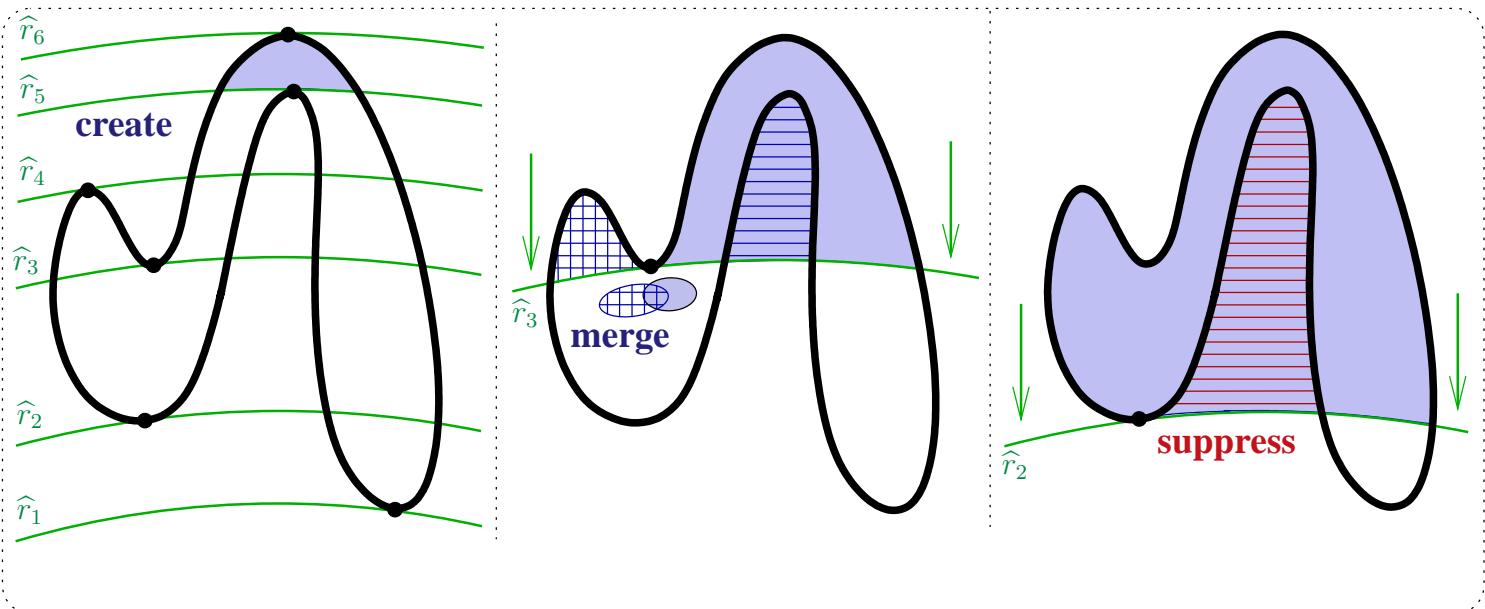
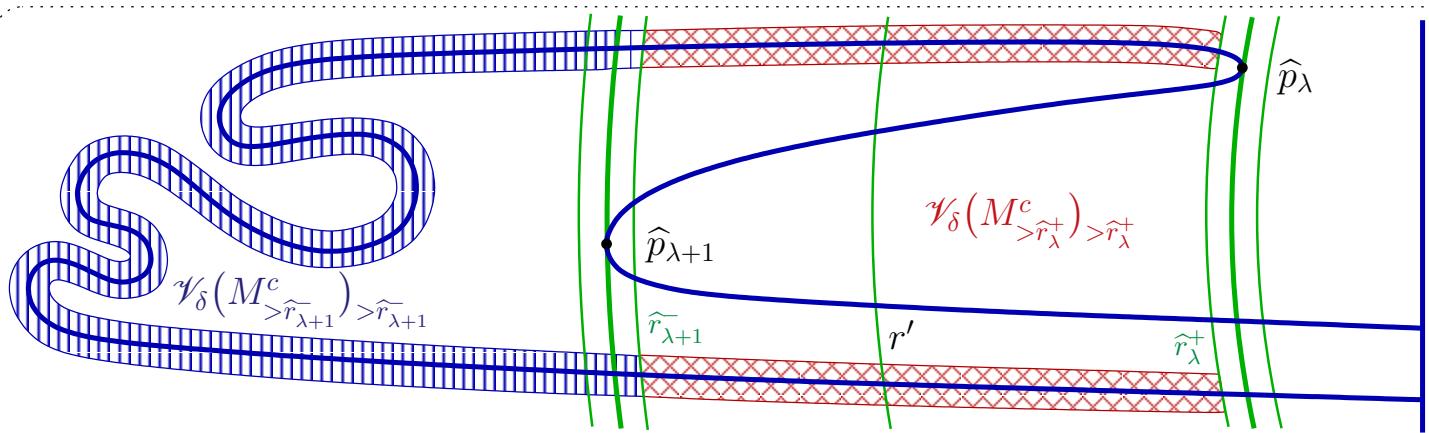
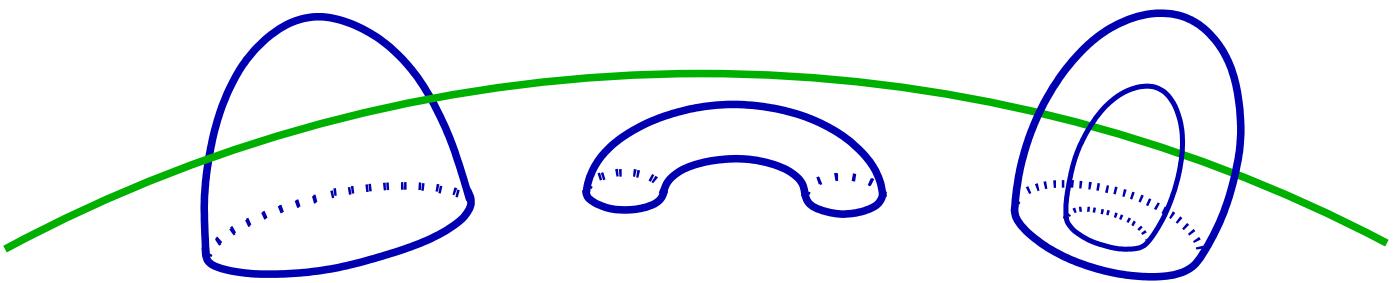


• Formule de Cauchy à paramètres :

$$F(z_1, z_2) := \frac{1}{2\pi i} \int_{\partial\Delta} \frac{f(A_{z_2}^{\varepsilon'}(\zeta))}{\zeta - z_1} d\zeta.$$







Support informatique : **Gérard Henry** et à **Norbert Deleutre**, ingénieurs système du LATP.

RÉGULARITÉ D'APPLICATIONS CAUCHY-RIEMANN ENTRE SOUS-VARIÉTÉS RÉELLES DE \mathbb{C}^n

Joël MERKER

DMA, École Normale Supérieure, Paris

www.dma.ens.fr/~merker/

I. Introduction générale

II. Sous-variétés de Cauchy-Riemann

III. Minimalité et jets de sous-variétés de Segre

IV. Applications CR formelles

V. Applications CR lisses

**Holomorphic extension of CR functions,
envelopes of holomorphy,
and removable singularities**

IMRS International Mathematics Research Surveys

Volume 2006, Article ID 28295, 287 pages

www.hindawi.com/journals/imrs

I. Introduction générale

- **Hörmander 1966 :** Si L_1, \dots, L_k est un système de k champs de vecteurs locaux à coefficients **réels** \mathcal{C}^∞ définis sur \mathbb{R}^n et satisfaisant la **condition de Chow** :

crochets de Lie itérés = $T\mathbb{R}^n$,

alors $L_1^2 + \dots + L_k^2$ est \mathcal{C}^∞ -hypoelliptique.

- **Condition (P) de Nirenberg-Treves.**
- **(Non) résolubilité locale de L** $u = g$.
- **Théorie du front d'onde hypoanalytique.**
- **Diversification des espaces fonctionnels** : $W^{p,q}$, $\mathcal{C}^{\kappa,\alpha}$, \mathcal{C}^∞ , \mathcal{D}' , \mathcal{E}' , L^p , etc.

Philosophie générale :

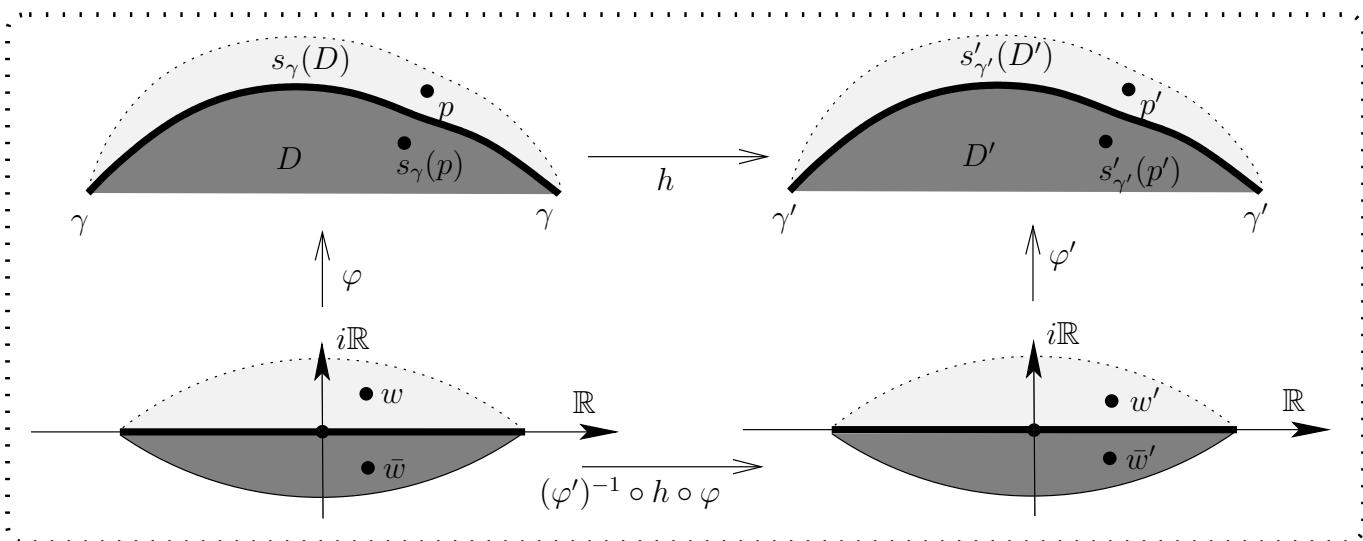
Certains systèmes d'EDP soumis à certaines conditions de type analytique ou géométrique possèdent de bonnes propriétés de résolubilité, de régularité, d'unicité, ou de rigidité.

 **Théorie algébrique de Lie-Cartan** : systèmes **analytiques réels ou complexes** ; groupes de Lie ; symétries infinitésimales ; systèmes différentiels extérieurs.

- **Lien :** les diverses conditions analytico-géométriques qui interviennent sont très similaires.

- Exposé d'aujourd'hui : Rigidité géométrique causée par des systèmes infinis d'EDP analytiques.

- **Principe classique de réflexion de Schwarz :** Considérons deux courbes analytiques réelles $\gamma \subset \mathbb{C}$, $\gamma' \subset \mathbb{C}$ et soit une application holomorphe h locale définie **seulement d'un côté de γ** , continue jusqu'à γ et envoyant γ dans γ' .



Alors h se prolonge holomorphiquement de l'autre côté de γ .

- **Passage en dimension supérieure :** la courbe γ est remplacée par une hypersurface lisse quelconque de codimension 1 dans \mathbb{C}^n , mais de telles hypersurfaces ne sont quasiment **jamais redressables sur un hyperplan réel**.

- Fonctions holomorphes de plusieurs variables : solutions de :

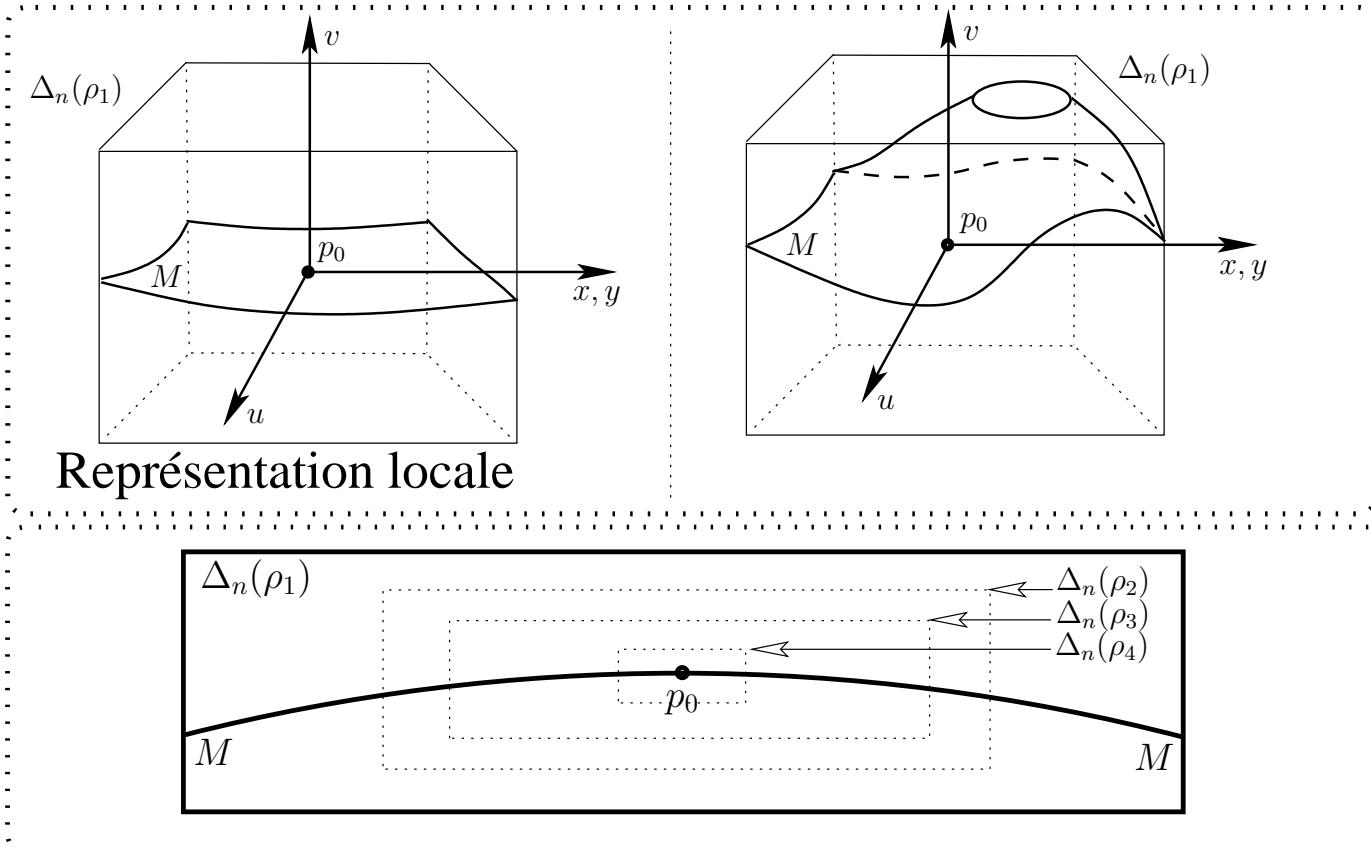
$$0 = \frac{\partial}{\partial \bar{z}_1} f = \cdots = \frac{\partial}{\partial \bar{z}_n} f.$$

II. Sous-variétés de Cauchy-Riemann

- **Hypersurfaces locales de \mathbb{C}^n** : ces objets sont définis localement dans un ouvert U de \mathbb{C}^n par :

$$\mathbf{M} := \{z = x + iy \in U : r(x, y) = 0\},$$

où r est une fonction réelle, de régularité \mathcal{C}^1 , ou \mathcal{C}^2 , ou $\mathcal{C}^{\kappa, \alpha}$, ou \mathcal{C}^∞ , ou \mathcal{C}^ω , ou $\mathcal{C}^{\mathcal{A}lg}$ dont la différentielle ne s'annule pas : $dr(z) \neq 0$ pour tout $z \in M$.

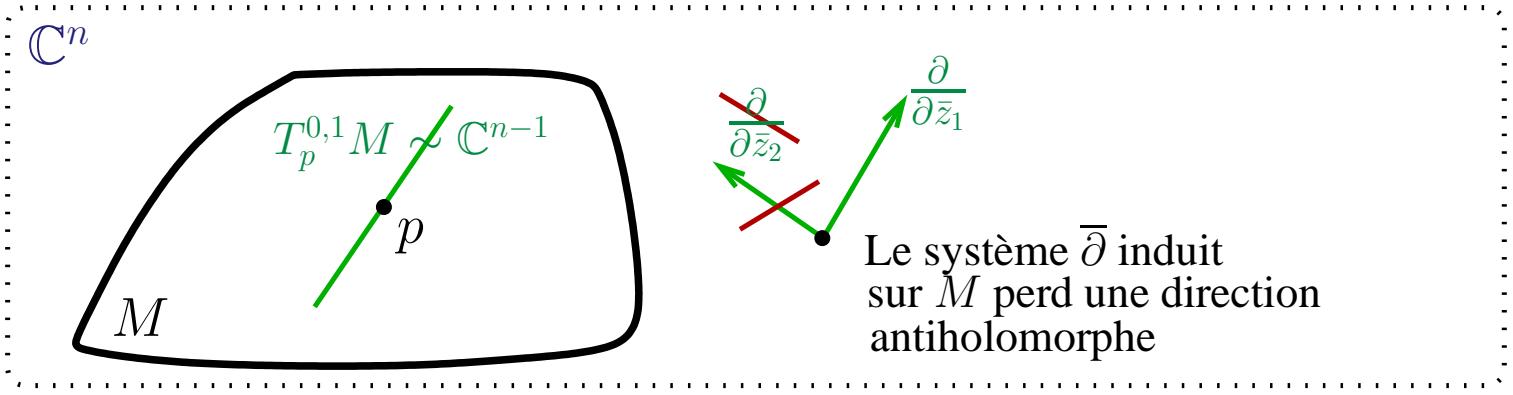


- **Système $\bar{\partial}$ induit** : Sur \mathbb{C}^n , on a n champs anti-holomorphes tangents indépendants $\frac{\partial}{\partial \bar{z}_1}, \frac{\partial}{\partial \bar{z}_2}, \dots, \frac{\partial}{\partial \bar{z}_n}$, qui engendrent le fibré $T^{0,1}\mathbb{C}^n$, mais il n'en reste que $(n - 1)$ qui sont tangents à M , à savoir : le sous-fibré

$$T^{0,1}M := T^{0,1}\mathbb{C}^n \cap [\mathbb{C} \otimes TM],$$

est de rang $n - 1$.

- **Fonctions CR** : une fonction $f : M \rightarrow \mathbb{C}$ de classe \mathcal{C}^1 est **Cauchy-Riemann** si $\bar{L}f = 0$ pour toute section locale \bar{L} de $T^{0,1}M$ définie sur un ouvert de M .



- **Intuitivement** : f est une « *fonction partiellement holomorphe induite définie sur une sous-variété réelle* ».

Prolongement holomorphe des fonctions CR

- **Sous-variétés génériques de \mathbb{C}^n** : Une sous-variété réelle $M \subset \mathbb{C}^n$ de classe au moins \mathcal{C}^1 est dite **générique** si son espace tangent engendre l'espace tangent à \mathbb{C}^n par multiplication complexe :

$$T_p M + i T_p M = T_p \mathbb{C}^n, \quad \text{pour tout } p \in M.$$

- Si $d \leq n$ est la codimension réelle de M , alors **l'espace tangent complexe** :

$$T_p^c M := T_p M \cap i T_p M$$

est de dimension constante égale à $n - d$, appelée **dimension CR** de M .

- Plus généralement, une sous-variété réelle $M \subset \mathbb{C}^n$ est **CR** si la dimension de $T_p M \cap i T_p M$ est constante $\forall p$.
- **En fait :** toute sous-variété CR étant localement CR-graphée au-dessus d'une sous-variété générique, on considère en général seulement des sous-variétés génériques.
- **Observation :** toute hypersurface est générique — donc CR — de dimension CR égale à $(n - 1)$.
- **Crochets de Lie :** la plupart du temps, le sous-fibré complexe tangent $T^c M \subsetneq TM$ n'est pas intégrable au sens de Frobenius.
- **Exemple :** Hypersurfaces $M \subset \mathbb{C}^2$ strictement pseudoconvexes :

$$T^c M + [T^c M, T^c M] = TM.$$

- **Structures CR de type fini :**

$$\text{Lie}(T^c M) = TM.$$

Théorème A. Soient $n \geq 1$, $m \geq 1$ et $d \geq 1$ des entiers satisfaisant $m + d = n$ et soit κ le plus petit entier tel que :

$$\frac{(2m + \kappa)!}{2m! \kappa!} - 2 \frac{(m + \kappa)!}{m! \kappa!} + 1 \geq 2(m + d) = 2n.$$

Alors l'ensemble des sous-variétés $M \subset \mathbb{C}^n$ génériques de codimension d et de dimension CR m connexes de

classe \mathcal{C}^κ qui sont de type fini $\leq \kappa$ en tout point est ouvert et dense, pour la topologie forte de Whitney, dans l'ensemble ${}^\kappa\mathcal{G}_{d,m}^n$ de toutes les sous-variétés génériques.

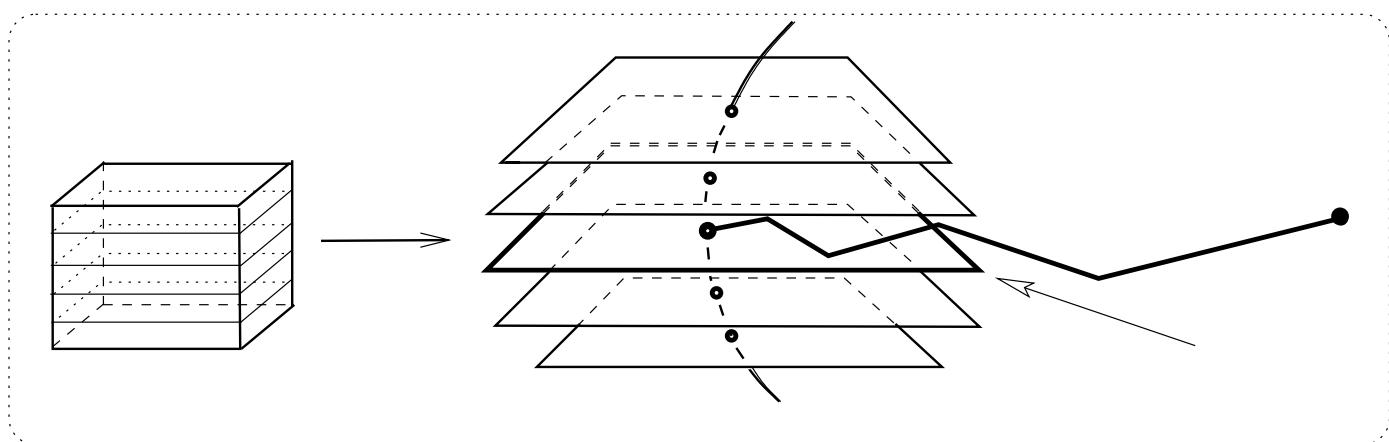
- **Exponentielle du crochet :**

$$\begin{aligned}\exp(\varepsilon X) \exp(\varepsilon Y) \exp(-\varepsilon X) \exp(-\varepsilon Y)(p) = \\ = \exp(\varepsilon^2 [X, Y])(p).\end{aligned}$$

- **Théorème d'accessibilité de Chow :** Si la sous-distribution $T^c M \subsetneq TM$ satisfait $\text{Lie}(T^c M) = TM$, alors tout point $p \in M$ peut être joint à tout autre point $q \in M$ par une courbe continue \mathcal{C}^1 par morceaux dont chacun des morceaux est courbe intégrale d'un champ de vecteurs local $T^c M$ -tangent sur M .

- **Notion plus fine : orbites CR :**

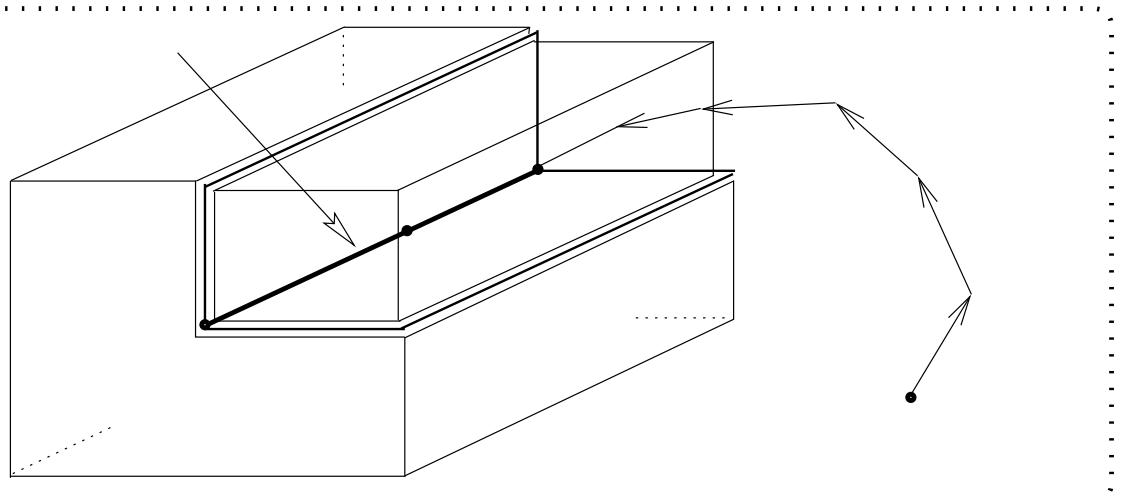
$$\mathcal{O}_{CR}(M, p) := \{q \in M : \exists \gamma : p \longrightarrow q \text{ } T^c M - \text{tangente}\}.$$



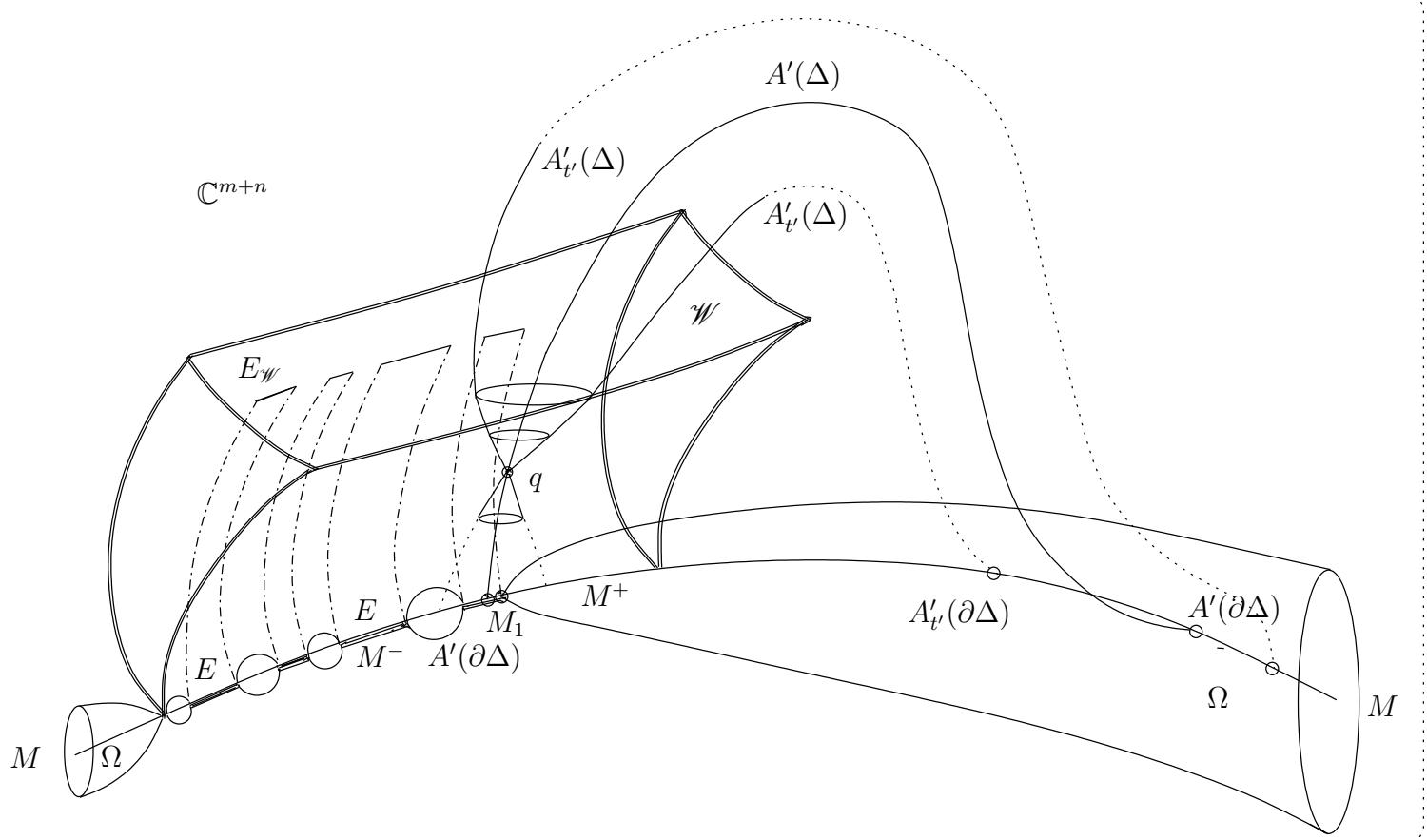
- **Théorème de Sussmann :** Chaque orbite CR dans M peut être munie canoniquement d'une structure de **sous-variété immergée** de M .

- **Minimalité globale** : M consiste en **une seule orbite CR**, c'est-à-dire que la propriété d'accessibilité de Chow globale est satisfaite (**mais les crochets de Lie peuvent être insuffisants en tout point**).

- **Briques CR indépendantes** (pseudo-feuilletage).



Théorème B. (KNESER, LEWY, ..., TRÉPRAU, TUMANOV, JÖRICKE, M.-PORTEN) Soit $M \subset \mathbb{C}^n$ une sous-variété générique de classe $\mathcal{C}^{2,\alpha}$ ($0 < \alpha < 1$) consistant en une seule orbite CR. Alors en tout point $p \in M$, il existe un ouvert de type \mathcal{W}_p de type wedge attaché à M en p tel que toute fonction CR sur M se prolonge holomorphiquement à \mathcal{W}_p .



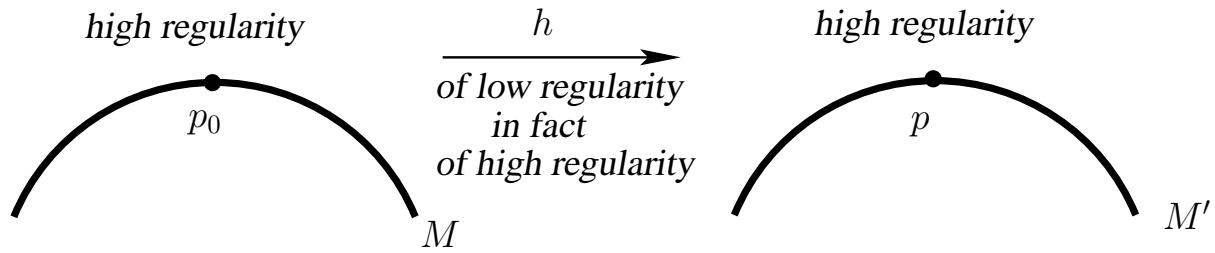
- Techniques :

- Approximation de type Stone-Weierstrass.

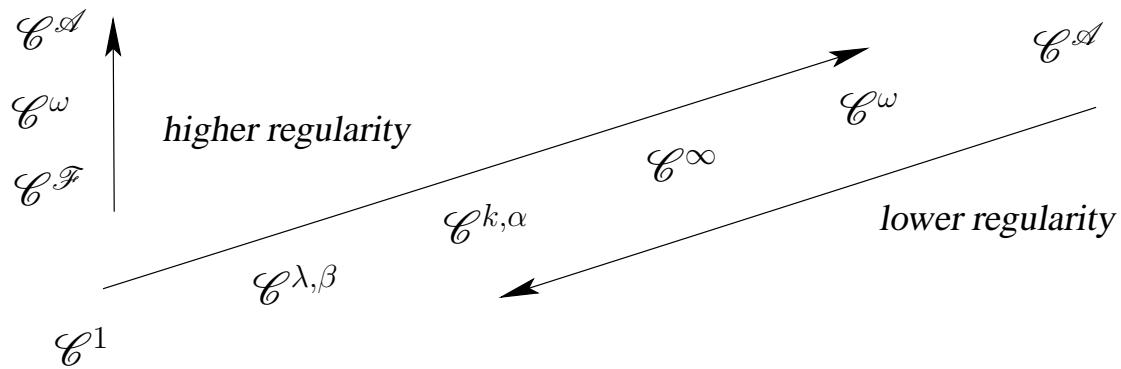
- Déformations de disques de Bishop. □

Contrainte de régularité pour les applications CR

- Pinchuk 1974 : Toute application de Cauchy-Riemann $h : M \rightarrow M'$ de classe \mathcal{C}^1 entre deux hypersurfaces analytiques réelles strictement pseudoconvexes de \mathbb{C}^n ($n \geq 2$) est en fait \mathcal{C}^ω .



- **Nombreuses variations sur ce thème :** jouer sur les classes de différentiabilité



- **Algébricité au sens de Nash :** $\mathbb{C}[\mathbf{x}] \ni \phi(\mathbf{x}) \in \mathcal{C}^{\mathcal{A}lg}$ s'il existe $P \in \mathbb{C}[x, \Phi]$ tel que $0 \equiv P(\mathbf{x}, \phi(\mathbf{x}))$.
- **Nécessité d'unifier et de conceptualiser :** *trop de résultats techniques dans la littérature !*

IV. Applications CR formelles

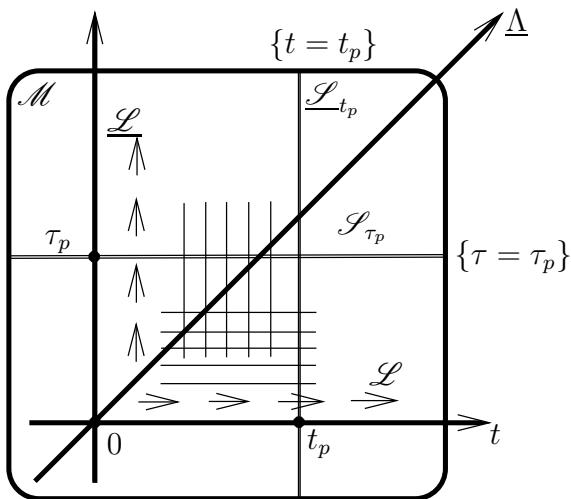
- $M \subset \mathbb{C}^n$ générique, analytique réelle (\mathcal{C}^ω).
- $\text{CRdim } M = \mathbf{m} \geqslant 1$, $\text{codim } M = \mathbf{d} \geqslant 1$.
- Coordonnées $t = (z, w) \in \mathbb{C}^m \times \mathbb{C}^d$. Équations :

$$w = \bar{\Theta}(z, \bar{z}, \bar{w}) \quad \text{ou} \quad \bar{w} = \Theta(\bar{z}, z, w)$$

- **Complexification extrinsèque** : $\mathcal{M} \subset \mathbb{C}^{2n}$, en remplaçant $\bar{t} = (\bar{z}, \bar{w})$ par $\tau = (\zeta, \xi) \in \mathbb{C}^m \times \mathbb{C}^d$:

$$w = \bar{\Theta}(z, \zeta, \xi) \quad \text{ou} \quad \xi = \Theta(\zeta, z, w)$$

- **Paire invariante de feuilletages** :



La complexification d'une sous-variété analytique réelle porte une paire de feuilletages invariants qui sont les sous-variétés intégrales des complexifiés des champs de vecteurs de types $(1, 0)$ et $(0, 1)$ et qui s'identifient aussi aux sous-variétés de Segre complexifiées.

- **Variétés de Segre (conjuguées) complexifiées** : Pour $\tau_p, t_p \in \mathbb{C}^n$ fixés, définir :

$$\begin{cases} \mathcal{S}_{\tau_p} := \{(t, \tau) \in \mathbb{C}^n \times \mathbb{C}^n : \tau = \tau_p, w = \bar{\Theta}(z, \tau_p)\}, \\ \mathcal{L}_{t_p} := \{(t, \tau) \in \mathbb{C}^n \times \mathbb{C}^n : t = t_p, \xi = \Theta(\zeta, t_p)\}. \end{cases}$$

- **Géométriquement :** $\mathcal{S}_{\tau_p} = \mathcal{M} \cap \{\tau = \tau_p\}$ et $\underline{\mathcal{S}}_{t_p} = \mathcal{M} \cap \{t = t_p\}$ simples tranches verticales, horizontales.

- **Chaînes de Segre** : Partir de $p = 0$, se déplacer verticalement le long de \mathcal{L}_0 d'une hauteur de $z_1 \in \mathbb{C}^m$. Obtenir :

$$\underline{\mathcal{L}}_{z_1}(0) =: \underline{\Gamma}_1(z_1).$$

Observer $\underline{\Gamma}_1(0) = 0$. Repartir de $\underline{\Gamma}_1(z_1)$, se déplacer horizontalement d'une longueur de $z_2 \in \mathbb{C}^m$. Obtenir :

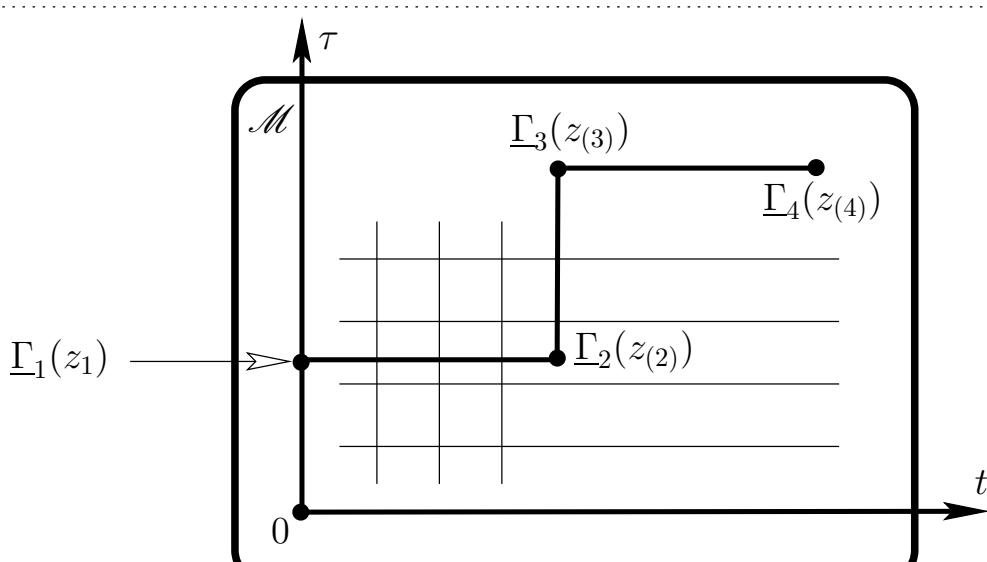
$$\underline{\Gamma}_2(z_1, z_2) := \underline{\mathcal{L}}_{z_2}(\underline{\mathcal{L}}_{z_1}(0)).$$

Ensuite $\underline{\Gamma}_3(z_1, z_2, z_3) := \underline{\mathcal{L}}_{z_3}(\underline{\mathcal{L}}_{z_2}(\underline{\mathcal{L}}_{z_1}(0)))$, et encore

$$\underline{\Gamma}_4(z_1, z_2, z_3, z_4) := \underline{\mathcal{L}}_{z_4}(\underline{\mathcal{L}}_{z_3}(\underline{\mathcal{L}}_{z_2}(\underline{\mathcal{L}}_{z_1}(0)))),$$

et cætera.

$\mathbb{C}^n \times \mathbb{C}^n$



CHAÎNES DE SEGRE DANS \mathcal{M}

- **Réurrence** : Pour tout $k \in \mathbb{N}$, $k \geq 1$, obtenir la k -ième chaîne de Segre conjuguée :

$$\underline{\Gamma}_k(z_1, \dots, z_k),$$

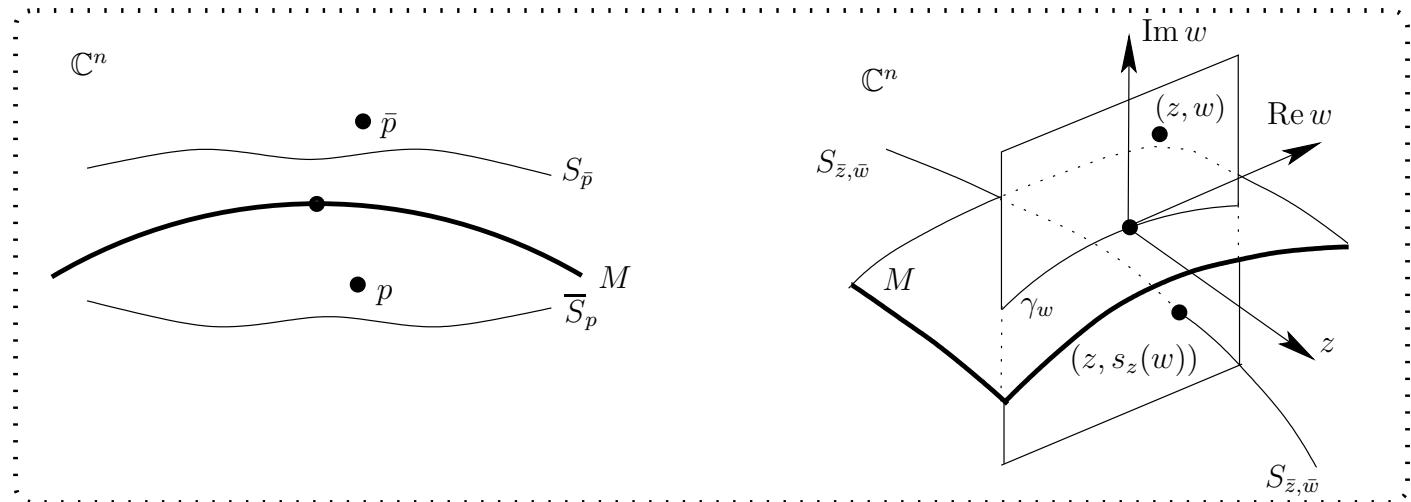
à valeurs dans \mathcal{M} , définie pour $z_1, \dots, z_k \in \mathbb{C}^m$ suffisamment petits et satisfaisant $\underline{\Gamma}_k(0, \dots, 0) = 0$.

- **Minimalité** : pour k assez grand, ces chemins alternativement dirigés **recouvrent un voisinage de 0** dans \mathcal{M} .

Quatre illustrations géométriques

- **Réflexion de Schwarz :** Soit γ un segment réel $\gamma \subset \mathbb{C}$ représenté par une équation implicite $r(z, \bar{z}) = 0$ avec $dr \neq 0$, et soit p un point près de γ . Alors le point $\sigma(p)$ **Schwarz-symétrique** de p s'obtient en résolvant :

$$r(\sigma(p), \bar{p}) = 0.$$

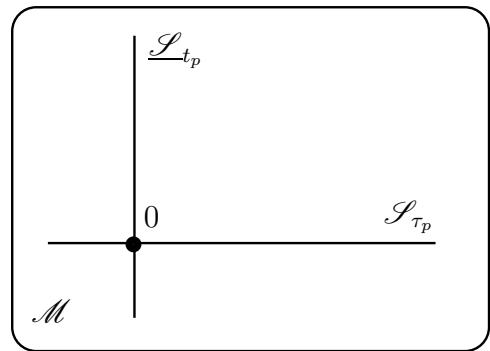
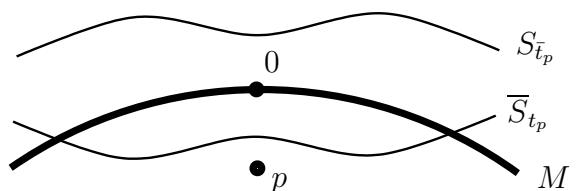


- Dans \mathbb{C}^n , $n \geq 2$: **Réflexion de Segre-Webster :**

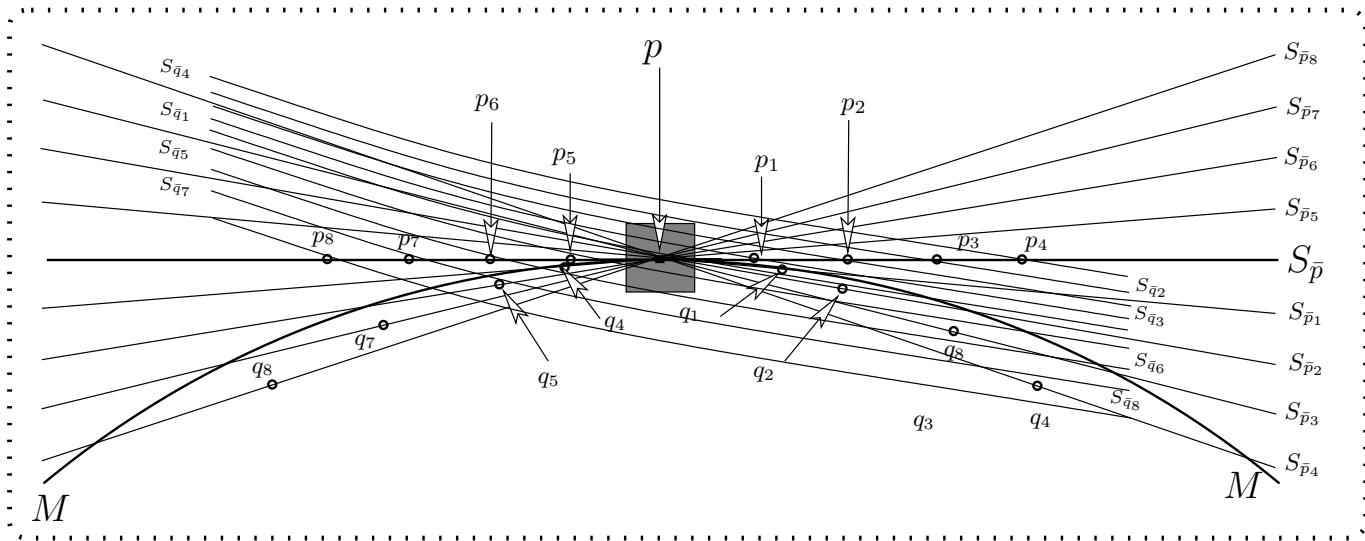
$$S_{\bar{p}} := \{z \in \mathbb{C}^n : r(z, \bar{p}) = 0\}$$

est une hypersurface complexe.

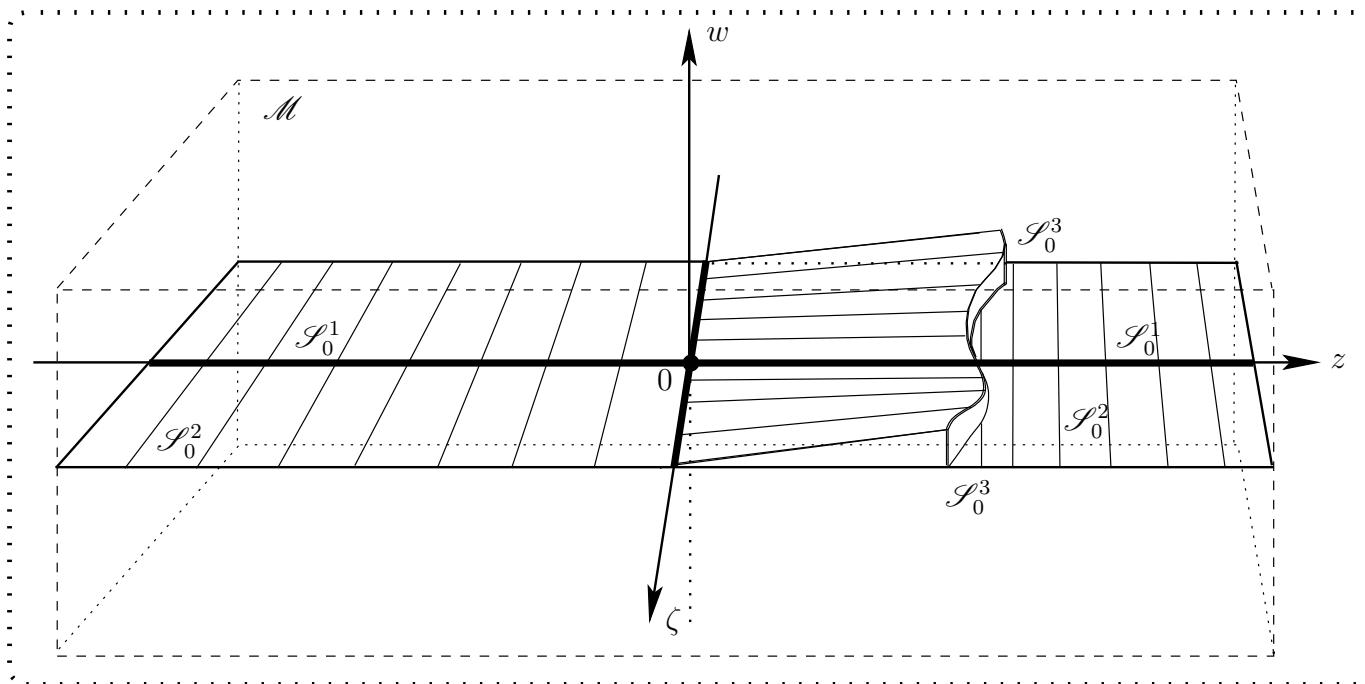
- **Réflexion non intrinsèque :** effectuer des réflexions de Schwarz dans des copies de \mathbb{C} transverses à M .
- **Complexifier engendre deux vrais feuilletages :**



- Illisibilité des réunions ensemblistes de variétés de Segre avant complexification :



- Naissance des chaînes de Segre dans la complexification :



- Merker 1998 : (arxiv.org) utilisation du théorème de Sussmann pour simplifier le critère de minimalité de Baouendi-Ebenfelt-Rothschild (Acta Math. 1996 ; Princeton Math. Series 1999).

- Baouendi-Ebenfelt-Rothschild (J. Alg. Geom., 2003).

Applications CR

- **Rigidité des applications CR :** Soit $t \in \mathbb{C}^n$, soit $n' \geq 1$ et soit $h(t) = (h_1(t), \dots, h_{n'}(t)) \in \mathbb{C}\{t\}^{n'}$ ou $\in \mathbb{C}[[t]]^{n'}$ une application **analytique ou formelle** avec $h(0) = 0'$.

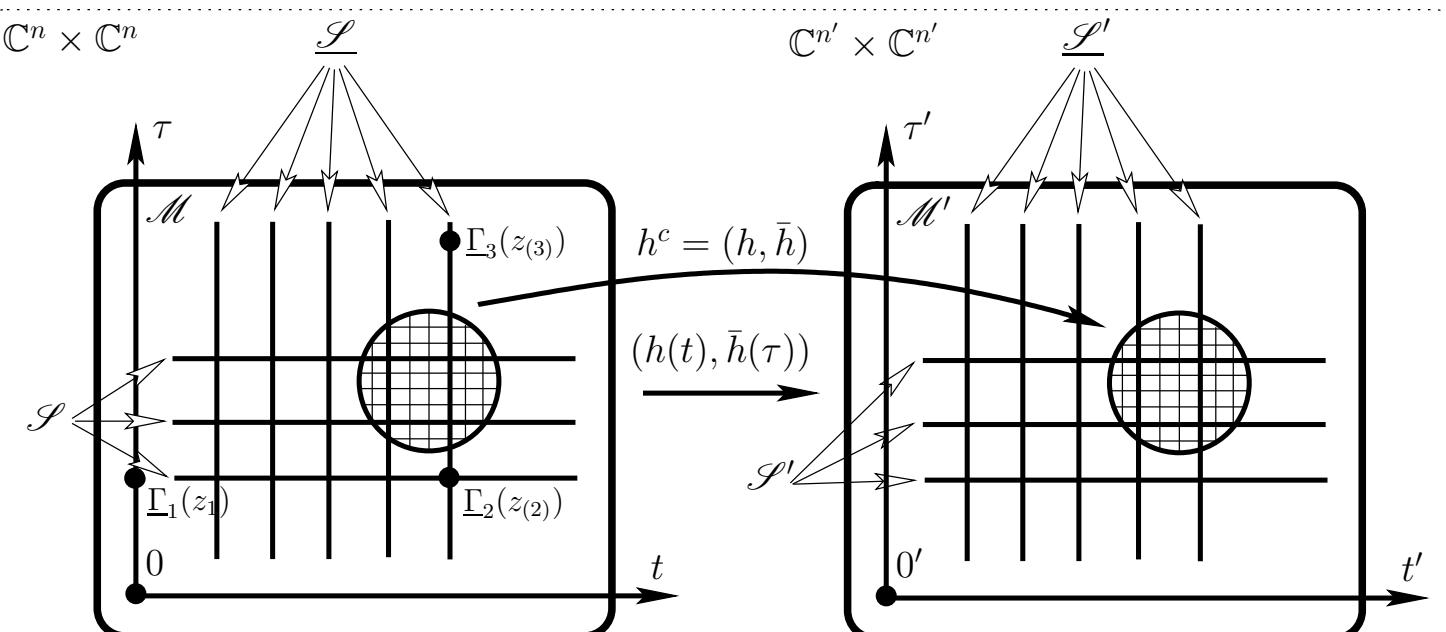
- **Complexifier :** On a :

$$(\overline{h(t)})^c = \overline{h}((\bar{t})^c) = \overline{h}(\tau).$$

L'application totale :

$$h^c(t, \tau) := (h(t), \overline{h}(\tau))$$

est donc **à variables séparées**.



LES APPLICATIONS FORMELLES COMPLEXIFIÉES RESPECTENT LES PAIRES DE FEUILLETAGES

- Par conséquent, chaque feuille de Segre \mathcal{S}_{τ_p} de la variété source \mathcal{M} est envoyée dans la feuille $\mathcal{S}'_{\bar{h}(\tau_p)}$ de

\mathcal{M}' , et de même, chaque feuille conjuguée $\underline{\mathcal{S}}_{t_p} \subset \mathcal{M}$ est envoyée dans la feuille conjuguée $\underline{\mathcal{S}}'_{h(t_p)} \subset \mathcal{M}'$.

• Idée générale de la rigidité :

- Hypothèse de régularité **faible** pour l'application h .
- Régularité **élevée** pour \mathcal{M} et pour \mathcal{M}' : $\mathcal{C}^\omega, \mathcal{C}^{\text{Alg}}$.
- Paire de feuilletages **couvrante (minimalité)**.
- \implies L'application h , guidée rigidement par les paires très régulières de feuilletages a de bien meilleures propriétés :
 - h est aussi régulière que $\mathcal{M}, \mathcal{M}'$.
 - h est déterminée par un jet d'ordre fini en un point.

- **Mise en équations** : Soit donc $M' \subset \mathbb{C}^{n'}$ de codimension $\mathbf{d}' \geqslant 1$ et de dimension CR $\mathbf{m}' = n' - d' \geqslant 1$. Il existe des coordonnées locales $t' = (z', w') \in \mathbb{C}^{m'} \times \mathbb{C}^{d'}$ centrées en $p' \in M'$ dans lesquelles M' est représentée par $\bar{w}' = \Theta'(\bar{z}', t')$. Posons :

$$\begin{aligned}\bar{r}(\bar{t}, t) &:= w - \overline{\Theta}(z, \bar{t}), \\ \bar{r}'(\bar{t}', t') &:= w' - \overline{\Theta}'(z', \bar{t}').\end{aligned}$$

- Une **application CR formelle** :

$$h : (M, 0) \longmapsto_{\mathcal{F}} (M', 0')$$

satisfait par définition : il existe une matrice de taille $d' \times d$ de séries formelles $\bar{b}(\bar{t}, t)$ telle que, dans $\mathbb{C}[[t, \bar{t}]]^{d'}$:

$$\bar{r}'(\bar{h}(\bar{t}), h(t)) \equiv \bar{b}(\bar{t}, t) \bar{r}(\bar{t}, t).$$

- Autrement dit : $\bar{r}'(\bar{h}(\bar{t}), h(t)) = 0$ pour $t \in M$.

- **Hypothèse** $h^c(\mathcal{M}) \subset_{\mathcal{F}} \mathcal{M}'$: après complexification, pour $(t, \tau) \in \mathcal{M}$, si l'on note $h = (f, g)$, on a deux familles d'identités formelles :

$$\begin{aligned}\bar{g}(\tau) &= \sum_{\gamma' \in \mathbb{N}^{m'}} \bar{f}(\tau)^{\gamma'} \Theta'_{\gamma'}(h(t)), \\ g(t) &= \sum_{\gamma' \in \mathbb{N}^{m'}} f(t)^{\gamma'} \bar{\Theta}'_{\gamma'}(\bar{h}(\tau)).\end{aligned}$$

- **Dérivations Segre-tangentes aux feilletages :**

$$\left\{ \begin{array}{l} \mathcal{L}^\beta := (\mathcal{L}_1)^{\beta_1} (\mathcal{L}_2)^{\beta_2} \cdots (\mathcal{L}_m)^{\beta_m} \quad \text{et} \\ \underline{\mathcal{L}}^\beta := (\underline{\mathcal{L}}_1)^{\beta_1} (\underline{\mathcal{L}}_2)^{\beta_2} \cdots (\underline{\mathcal{L}}_m)^{\beta_m}, \end{array} \right.$$

où $\beta = (\beta_1, \beta_2, \dots, \beta_m) \in \mathbb{N}^m$.

- **Double paire de systèmes infinis d'EDP déduites :**
En dérivant, obtenir **quatre** familles d'**identités de réflexion** :

$$\left\{ \begin{array}{l} \underline{\mathcal{L}}^\beta \bar{g}(\tau) = \sum_{\gamma' \in \mathbb{N}^{m'}} \underline{\mathcal{L}}^\beta [\bar{f}(\tau)^{\gamma'}] \Theta'_{\gamma'}(h(t)), \\ 0 = \sum_{\gamma' \in \mathbb{N}^{m'}} f(t)^{\gamma'} \underline{\mathcal{L}}^\beta [\bar{\Theta}'_{\gamma'}(\bar{h}(\tau))]. \end{array} \right.$$

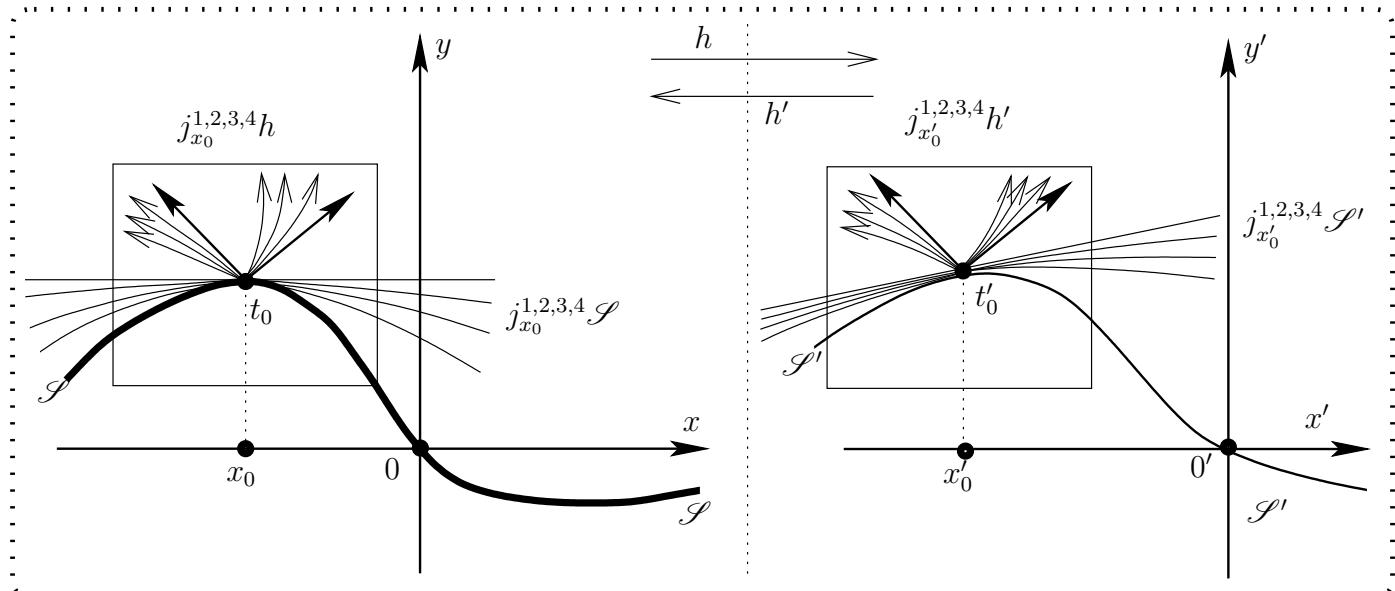
$$\left\{ \begin{array}{l} {\mathscr L}^\beta g(t) \; = \; \sum_{\gamma' \in \mathbb N^{m'}} {\mathscr L}^\beta \big[f(t)^{\gamma'} \big] \, \overline \Theta'_{\gamma'} \left(\overline h(\tau) \right), \\ \\ 0 \; = \; \sum_{\gamma' \in \mathbb N^{m'}} \overline f(\tau)^{\gamma'} \, {\mathscr L}^\beta \left[\Theta'_{\gamma'} (h(t)) \right]. \end{array} \right.$$

- **Jets de sous-variétés de Segre :** La variété de Segre complexifiée conjuguée associée à $t' \in \mathbb{C}^{n'}$ fixé est définie par :

$$\underline{\mathcal{L}}_{t'}' := \{(\zeta', \xi') \in \mathbb{C}^{n'} : \xi' = \Theta'(\zeta', t')\}.$$

Pour $k' \in \mathbb{N}$, définissons le *morphisme des k' -jets* des variétés de Segre complexifiées conjuguées par :

$$\varphi'_{k'}(\zeta', t') := J_{\tau'}^{k'} \underline{\mathcal{L}}_{t'}' := \left(\zeta', \left(\frac{1}{\beta'!} \partial_{\zeta'}^{\beta'} \Theta'_{j'}(\zeta', t') \right)_{|\beta'| \leq k'}^{1 \leq j' \leq d'} \right).$$



- **Invariance biholomorphe :**

$$\begin{array}{ccc} \mathcal{M} & \xrightarrow{h} & \mathcal{M}' \\ J_{\bullet}^k \underline{\mathcal{L}}_{\bullet} & \downarrow & \downarrow J_{\bullet}^k \underline{\mathcal{L}}'_{\bullet}, \\ \mathbb{C}^{m+N_{d,m,k}} & \xrightarrow{R^k(h)} & \mathbb{C}^{m+N_{d,m,k}} \end{array}$$

- **Retour :** Lorsqu'on applique aux deux équations $\bar{g}(\tau) = \Theta'(\bar{f}(\tau), h(t))$ et $g(t) = \overline{\Theta}'(f(t), \bar{h}(\tau))$ les dérivations tangentes \mathcal{L}^{β} et $\underline{\mathcal{L}}^{\beta}$, cela revient à examiner

comment les jets de sous-variétés de Segre sont transformés par $(h(t), \bar{h}(\tau))$.

- **Conditions géométriques de non-dégénérescence :**

On dira que M' (ou \mathcal{M}') est :

(nd1) Levi non-dégénérée à l'origine si φ'_1 est de rang $m' + n'$ en $(\zeta', t') = (0', 0')$;

(nd2) finiment non-dégénérée à l'origine s'il existe un entier ℓ'_0 tel que $\varphi'_{k'}$ est de rang $n' + m'$ en $(\zeta', t') = (0', 0')$, pour $k' \geq \ell'_0$;

(nd3) essentiellement finie à l'origine s'il existe un entier ℓ'_0 tel que $\varphi'_{k'}$ est une application holomorphe finie en $(\zeta', t') = (0', 0')$, pour $k' \geq \ell'_0$;

(nd4) Segre non-dégénérée à l'origine s'il existe un entier ℓ'_0 tel que la restriction de $\varphi'_{k'}$ à la variété de Segre complexifiée \mathcal{S}'_0 est de rang générique m' , pour $k' \geq \ell'_0$;

(nd5) holomorphiquement non-dégénérée s'il existe un entier ℓ'_0 tel que l'application $\varphi'_{k'}$ est de rang générique maximal possible, égal à $m' + n'$, pour $k' \geq \ell'_0$.

Lemme. Ces 5 conditions se hiérarchisent en généralité :

$$(\text{nd1}) \Rightarrow (\text{nd2}) \Rightarrow (\text{nd3}) \Rightarrow (\text{nd4}) \Rightarrow (\text{nd5}).$$

Conditions CR-horizontales de non-dégénérescence

Soit $h : (M, 0) \rightarrow_{\mathcal{F}} (M', 0')$. Décomposer $h(t) = (f(t), g(t)) \in \mathbb{C}[[t]]^{m'} \times \mathbb{C}[[t]]^{d'}$. Remplacer w par $\bar{\Theta}(z, \tau)$ dans $f(t) = f(z, w)$, poser $\tau = 0$ et obtenir la **partie CR-horizontale** de h :

$$\mathbb{C}^m \ni z \longmapsto_{\mathcal{F}} f(z, \bar{\Theta}(z, 0)) \in \mathbb{C}^{m'}.$$

- **Définition** : L'application CR formelle h sera dite :

(cr1) CR-inversible à l'origine si $m' = m$ et si sa partie CR-horizontale est inversible en $z = 0$;

(cr2) CR-submersive à l'origine si $m' \leq m$ et si sa partie CR-horizontale est submersive en $z = 0$;

(cr3) CR-finie à l'origine si $m' = m$ et si sa partie CR-horizontale est une application formelle finie en $z = 0$.

(cr4) CR-dominante à l'origine si $m' \leq m$ et si il existe des entiers $1 \leq k(1) < \dots < k(m') \leq m$ tels que le déterminant

$$\det([\partial \varphi_{k'_1}/\partial z_{k(k'_2)}](z))_{1 \leq k'_1, k'_2 \leq m'} \not\equiv 0$$

ne s'annule pas identiquement dans $\mathbb{C}[[z]]$, où $\varphi_{k'}(z) := f_{k'}(z, \bar{\Theta}(z, 0))$;

(cr5) CR-transversale à l'origine s'il n'existe pas de série formelle non nulle $F'(f_1, \dots, f_{m'}) \in \mathbb{C}[[f_1, \dots, f_{m'}]]$ telle que $F'(\varphi_1(z), \dots, \varphi_{m'}(z)) \equiv 0$ dans $\mathbb{C}[[z]]$, où $\varphi_{k'}(z) := f_{k'}(z, \bar{\Theta}(z, 0))$.

Versions classiques du principe de réflexion

- Soit $h : (M, 0) \rightarrow_{\mathcal{F}} (M', 0')$ une application CR formelle. Supposons M minimale en 0, c'est-à-dire que la paire de feuilletages de \mathcal{M} est couvrante en 0.

Théorème C. Si M et M' sont analytiques réelles, si h est Levi non-dégénérée, ou finiment non-dégénérée, ou essentiellement finie, ou Segre non-dégénérée à l'origine, alors $h(t)$ est convergente, i.e. $h(t) \in \mathbb{C}\{t\}^{n'}$. Si, de plus, M et M' sont algébriques, alors h est algébrique.

Convergence de l'application de réflexion

- **Application de réflexion** associée à h et au système de coordonnées (z', w') est :

$$\mathcal{R}'_h(\tau', t) := \xi' - \Theta'(\zeta', h(t)) \in \mathbb{C}[\tau', t]^{d'}.$$

Théorème D. Si M est minimale à l'origine et si h est CR-inversible, ou CR-submersive, ou CR-finie, ou CR-dominante, ou CR-transversale, alors pour tout système de coordonnées $(z', w') \in \mathbb{C}^{m'} \times \mathbb{C}^{d'}$ dans lesquelles la complexification extrinsèque \mathcal{M}' est représentée par $\xi' = \Theta'(\zeta', t')$, l'application de réflexion associée est convergente, c'est-à-dire :

$$\mathcal{R}'_h(\tau', t) \in \mathbb{C}\{\tau', t\}^{d'}.$$

- **Remarque :** La convergence de \mathcal{R}'_h dans un seul système de coordonnées entraîne sa convergence dans tout système de coordonnées.

- **Développer :**

$$\Theta'(\zeta', t') = \sum_{\gamma' \in \mathbb{N}^{m'}} (\zeta')^{\gamma'} \Theta'_{\gamma'}(t').$$

Corollaire . Toutes les composantes $\Theta'_{\gamma'}(h(t))$ de l'application de réflexion convergent, *i.e.*

$$\boxed{\Theta'_{\gamma'}(h(t)) \in \mathbb{C}\{t\}^{d'} \text{ pour tout } \gamma' \in \mathbb{N}^{m'}}.$$

- **Conséquences :** En tenant compte des conditions de non-dégénérescence (**ndi**) et (**crj**), une vingtaine de corollaires possibles se déduisent de ce théorème unificateur. Signalons seulement les cinq suivants.

Corollaire E. Si M est minimale à l'origine, si $(M', 0')$ est holomorphiquement non-dégénérée et si h est CR-inversible et inversible, ou CR-submersive et submersive, ou CR-finie et finie avec $m' = m$, ou CR-dominante et dominante, ou CR-transversale et transversale, alors $h(t) \in \mathbb{C}\{t\}^{n'}$ est convergente.

- **Algébricité de l'application de réflexion** : L'énoncé suivant produit une synthèse définitive et complète du principe de réflexion algébrique.

Théorème F. Si h est une application holomorphe locale $(M, 0) \rightarrow (M', 0')$, si M et M' sont algébriques, si M est minimale en un point Zariski-générique et si M' est la plus petite (pour l'inclusion) sous-variété générique algébrique réelle locale contenant $h(M)$, alors l'application de réflexion $\mathcal{R}'_h(\tau', t)$ est algébrique.

- **Remarque** : Des exemples triviaux contredisent l'algébricité de \mathcal{R}'_h lorsque M' n'est pas minimale pour l'inclusion contenant $h(M)$.

- **Délocalisation** : Dans la démonstration de ce théorème, on se déplace en un point minimal $p \in M$ arbitrairement proche de l'origine. Mais lorsque h n'est qu'une application formelle, cette délocalisation est impossible.

V. Applications CR lisses

- **Applications CR \mathcal{C}^∞ essentiellement finies :** Considérons une application CR $h : M \rightarrow M'$ de classe \mathcal{C}^∞ entre deux sous-variétés génériques analytiques réelles $M \subset \mathbb{C}^n$ et $M' \subset \mathbb{C}^{n'}$. Soit $p \in M$ et $p' := h(p) \in M'$. La série de Taylor $T^\infty h(p)$ de h en p induit une application CR formelle entre (M, p) et (M', p') . L'application h est dite **essentiellement finie** en p si l'application formelle :

$$T^\infty h(p) : (M, p) \mapsto_{\mathcal{F}} (M', p')$$

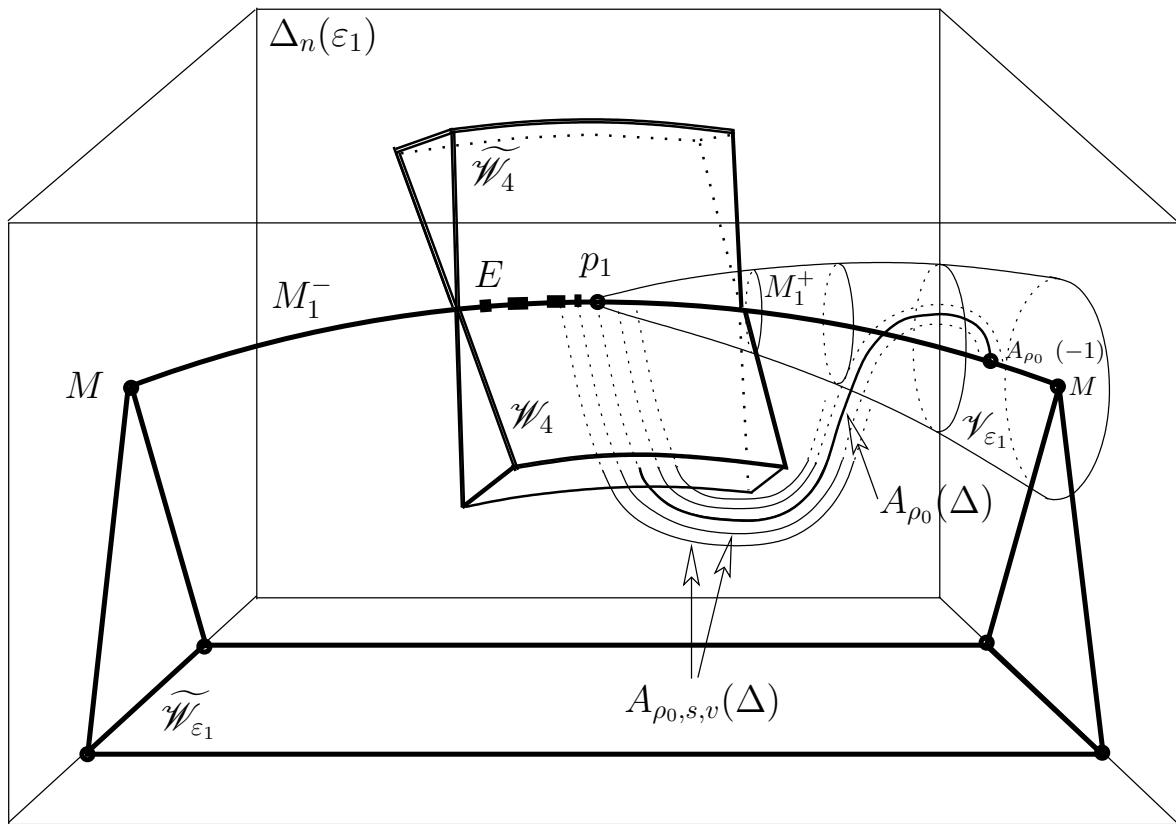
est finie.

- **Économiser l'hypothèse de minimalité de M .**

Théorème G. *Soit $h : (M, p) \rightarrow (M', p')$ une application CR de classe \mathcal{C}^∞ entre deux sous-variétés génériques locales $(M, p) \subset \mathbb{C}^n$ et $(M', p') \subset \mathbb{C}^{n'}$. Supposons h essentiellement finie en p et supposons qu'il existe un wedge local \mathcal{W}_p d'edge M en p tel que h se prolonge holomorphiquement à \mathcal{W}_p . S'il existe des points*

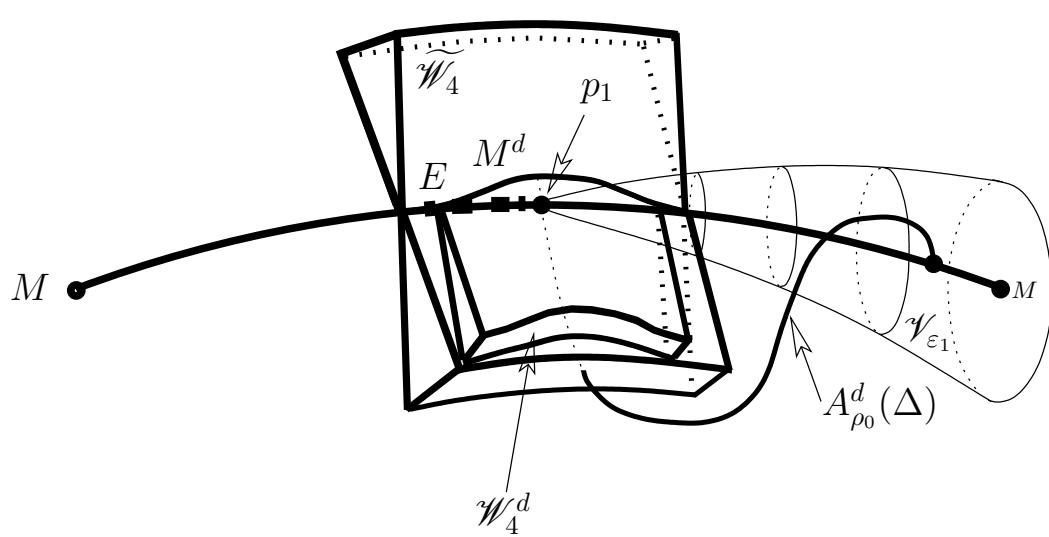
$$q \in \mathcal{O}_{CR}(M, p)$$

arbitrairement proches de p au voisinage desquels h est analytique réelle, alors h se prolonge holomorphiquement à un voisinage de p dans \mathbb{C}^n .



EXTENSION MÉROMORPHE À UN VOISINAGE DE p_1

Corollaire. Soit $h : (M, p) \rightarrow (M', p')$ un difféomorphisme CR local de classe \mathcal{C}^∞ . Si M' est essentiellement finie en p' et si h se prolonge holomorphiquement à un wedge en p , alors h se prolonge holomorphiquement à un voisinage de p dans \mathbb{C}^n .



ARGUMENT DE DÉFORMATION DANS LE WEDGE \mathcal{W}_4 AU-DESSUS DE p_1

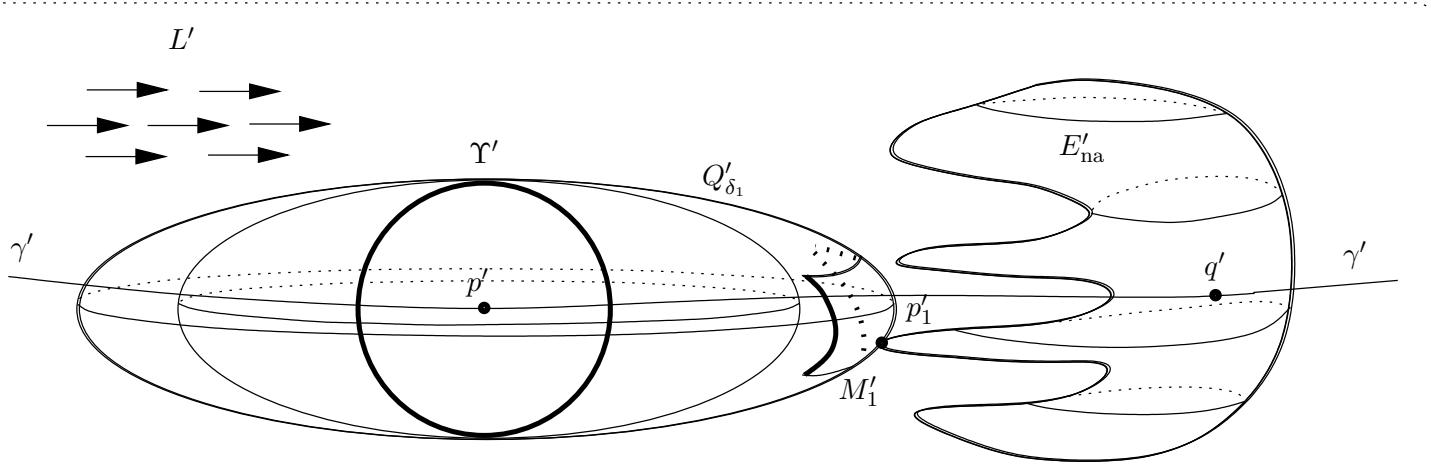
Applications CR de classe \mathcal{C}^∞ en type fini

Théorème H. Soit $h : M \rightarrow M'$ une application CR de classe \mathcal{C}^∞ entre deux hypersurfaces analytiques réelles connexes de \mathbb{C}^n ($n \geq 2$). Si M et M' ne contiennent pas de courbe holomorphe, h est analytique réelle en tout point de M .

- M., *Annales de Fourier*, 2002, 81 pages.
- **Diederich-Pinchuk 2003 :** $h \in \mathcal{C}^0$.
- **Généralisation :** M et M' essentiellement finies et $h \in \mathcal{C}^\infty$ de rang générique égal à $2n - 1$.
- **Question Ouverte :** Soit $h : M \rightarrow M'$ une application CR continue entre deux sous-variétés génériques analytiques réelles connexes $M \subset \mathbb{C}^n$ et $M' \subset \mathbb{C}^{n'}$. Supposons que M est globalement minimale et que M' ne contient pas de courbe holomorphe. L'application h est-elle \mathcal{C}^ω en tout point de M ?
- **Problème Ouvert :** Élaborer des algorithmes explicites de modification de Nash et d'éclatement locaux afin de simplifier la géométrie CR des sous-variétés génériques analytiques réelles et de démontrer ainsi des versions du principe de réflexion qui sont hors d'atteinte avec les techniques actuelles.

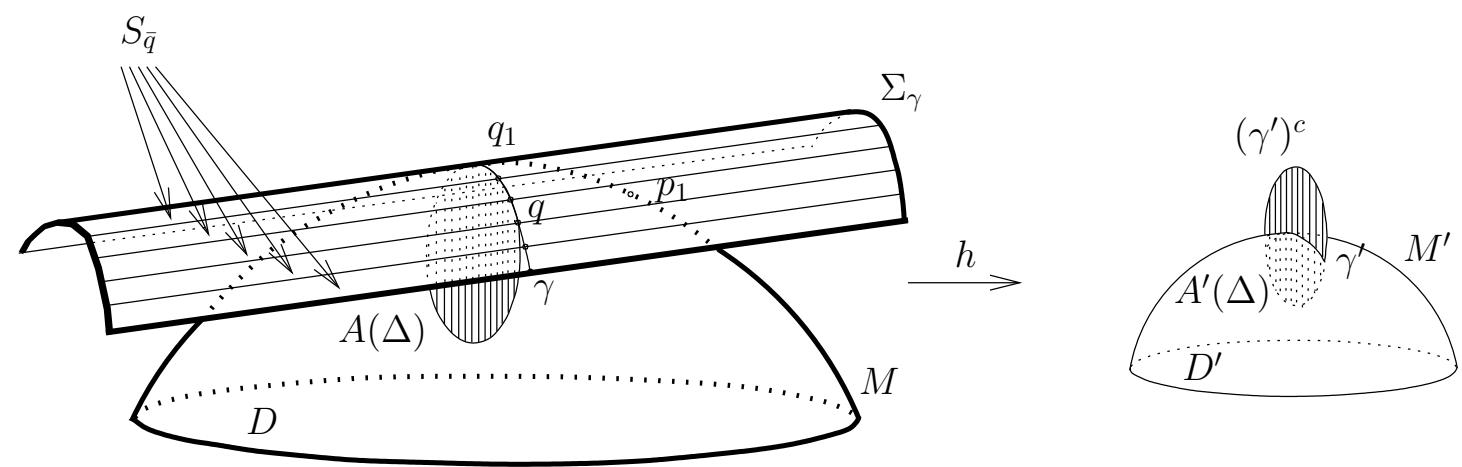
Analyticité de l'application de réflexion CR lisse

Théorème J. Si $h : M \rightarrow M'$ est un difféomorphisme CR de classe \mathcal{C}^∞ entre deux hypersurfaces analytiques réelles globalement minimales de \mathbb{C}^n , alors en tout point $p \in M$ et pour tout choix de coordonnées locales centrées en $p' := h(p)$ dans lesquelles (M', p') est représentée par $\bar{w}' = \Theta'(\bar{z}', t')$, la fonction de réflexion associée $\mathcal{R}'_h(t, \bar{\nu}') = \bar{\mu}' - \Theta'(\bar{\lambda}', h(t))$ et centrée en $p \times \bar{p}'$ se prolonge holomorphiquement à un voisinage de $p \times \bar{p}'$ dans $\mathbb{C}^n \times \mathbb{C}^n$. Si de plus M' est holomorphiquement non-dégénérée, h se prolonge holomorphiquement à un voisinage de M dans \mathbb{C}^n .



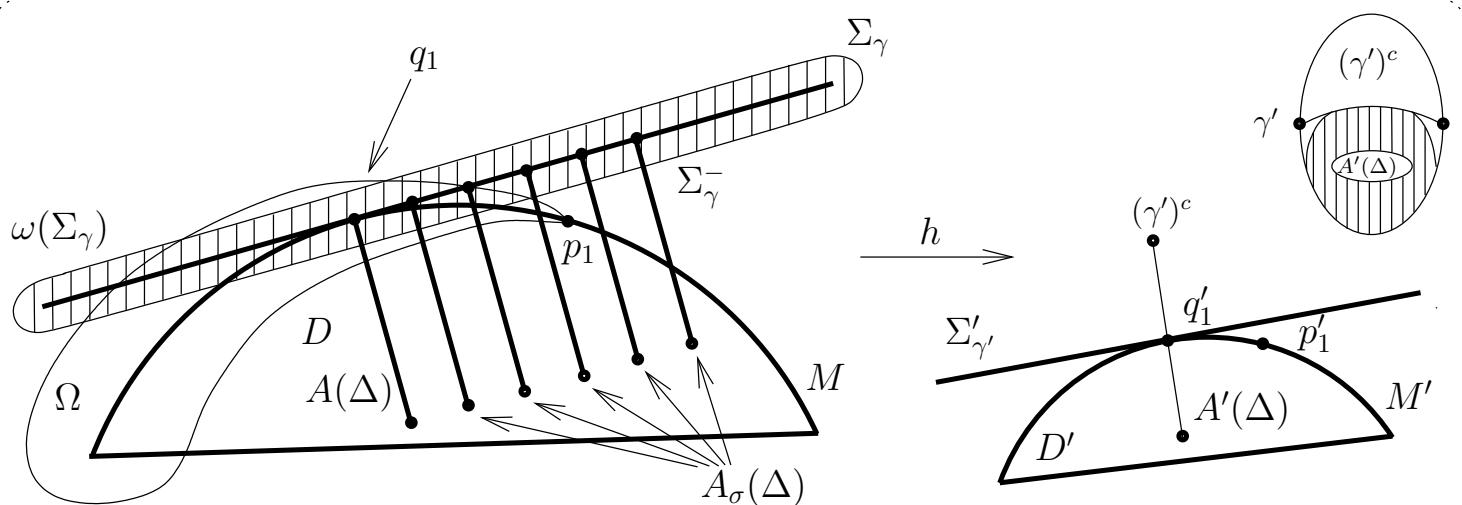
CONSTRUCTION D'UN MUR DE SUPPORT GÉNÉRIQUE PAR GONFLEMENT D'UN ELLIPSOÏDE

- **Idée principale :** recouvrir M d'un « **chapeau Levi-plat** », celui-ci étant constitué des variétés de Segre qui sont attachées à tous les points de M situés sur une courbe locale γ transverse à $T^c M$.



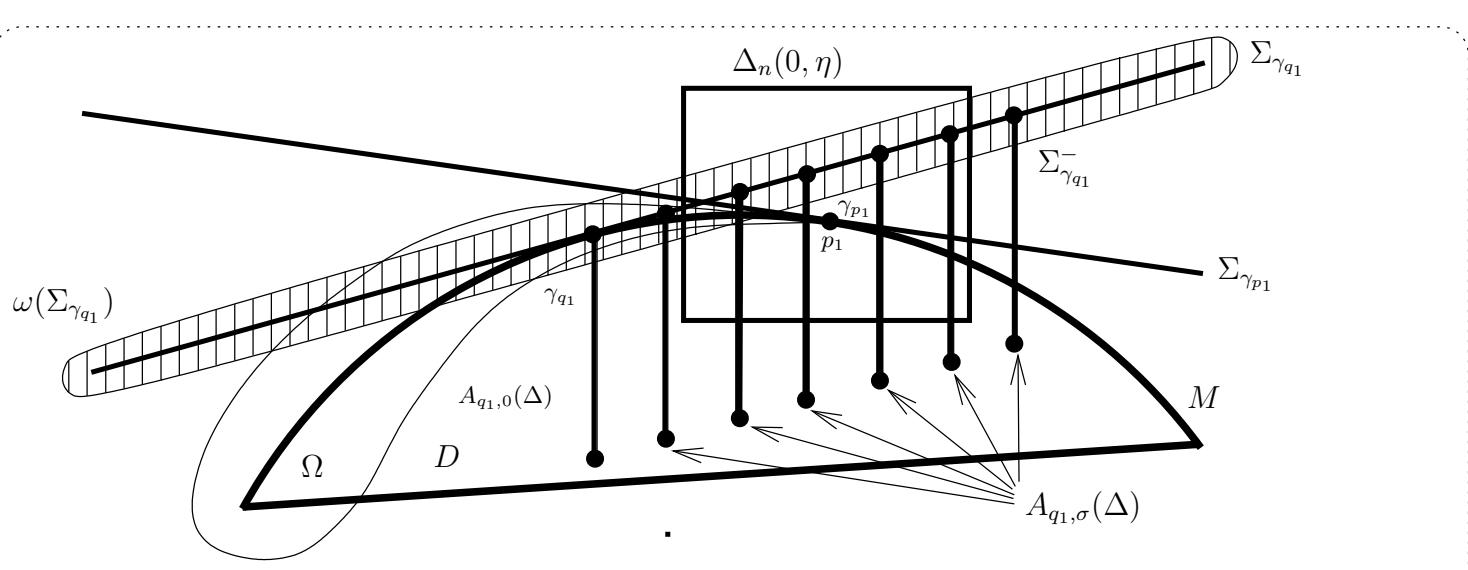
LE DOMAINE D RECOUVERT D'UN CHAPEAU LEVI-PLAT

- Voisinage de Σ_γ et disques semi-attachés.



ENVELOPE D'HOLOMORPHIE DU DOMAINE D ET SON CHAPEAU LEVI-PLAT

- Famille de disques analytiques remplissant l'espace entre Σ_γ et D .



ENVELOPE D'HOLOMORPHIE DU DOMAINE RECOUVERT PAR SON CHAPEAU LEVI-PLAT

Historique scientifique

Théorème A : Les sous-variétés génériques qui sont de type de Chow fini en tout point sont denses pour la topologie forte de Whitney.

- M.-Porten, **IMRS**, 2006, 287 pages, soumis le octobre 2005.
- Baouendi-Rothschild-Zaitsev, arxiv.org, août 2006, même type de résultat, même type de démonstration, mais **sans aucune référence bibliographique**, ni à Lobry, ni à Sussmann, ni à Jöricke, ni à M.-Porten.
- **Concept d'application de réflexion :** À toute application CR $h : M \rightarrow M'$ entre deux sous-variétés génériques analytiques réelles est associée un objet invariant, appelé **application de réflexion**, qui domine toutes les propriétés de régularité et de rigidité de h .
- **Première apparition :** M.-Meylan, printemps 1997, *Proc. Amer. Math. Soc., 1999*.
- M., Preprint DMI, ENS Ulm, no. 25, **automne 1997**.
- **Démonstration publiée de l'invariance de l'application de réflexion :** M., *Annales de Fourier, 2002, 81 pages*.
- Dans ses articles, le professeur Mir ne se pose jamais la question de l'invariance.

- **Théorème C** : Algébricité de l’application de réflexion associée à une application holomorphe locale entre sous-variétés génériques Nash-algébriques.
- Mir, cas de la codimension $d = 1$ (**seulement !**), **Annales de Fourier, 1998, 19 pages**.
- **Lettre de M. à Mir, 1998** : en délocalisant le point central (ce qui est autorisé, car l’algébricité en un point se globalise immédiatement), on est ramené à une application $h : \mathbb{C}^\nu \times M_1 \longrightarrow \mathbb{C}^\nu \times M'_1$, puis à une application biholomorphe $h_1 : M_1 \longrightarrow M'_1$, **cas déjà traité par Baouendi-Ebenfelt-Rothschild (Acta Math., 1996, 45 pages)**, et même en codimension d quelconque ! Donc l’article de Mir 1998 à Fourier est un **corollaire peu significatif du travail de Baouendi-Ebenfelt-Rothschild 1996**, sans que Mir s’en soit douté, car il a emprunté, sans l’avoir approfondi par lui-même, et sans aucune référence à M., le concept d’application de réflexion.
- **Zaitsev 1998** : papier sur l’algébricité, référé par Baouendi-Rothschild, contenant une erreur importante sur l’utilisation de la double réflexion, que Sylvain Damour (thèse 2001 au LATP à Marseille) découvre, que M. signale à Zaitsev, qui la corrige, modifie l’énoncé du théorème principal, sans mentionner la contribution de Damour dans la version finale acceptée par Acta Math.

- **Histoire ancienne** : En 1988, Baouendi-Rothschild sont rapporteurs sur un article soumis aux *Inventiones Mathematicae* par Diederich-Fornæss. Au bout de six mois ils refusent l'article (publié ensuite aux Math. Ann.) et soumettent à Invent. Math. le même type de résultats, redémontrés avec leur techniques, accepté et publié par Invent. Math. !!
- **Théorème D** : Convergence de l'application de réflexion associée à une application CR formelle entre sous-variétés génériques analytiques réelles.
- **Histoire plus récente** : En mai 2000, M. démontre sur arxiv.org la convergence de l'application de réflexion CR formelle entre sous-variétés **analytiques réelles** de codimension quelconque ; en 1999, seulement pour la codimension $d = 1$, M. obtient le résultat pour les sous-variétés holomorphiquement non-dégénérées, et indépendamment, Mir pour l'application de réflexion, mais les idées bloquent sérieusement pour la codimension $d \geq 1$; Mir avait aussi le résultat en codimension quelconque pour une variété image algébrique, mais à nouveau, les idées bloquaient sérieusement pour le cas analytique réel.
- **Mai 2000** : M. obtient le résultat final en codimension quelconque grâce à la découverte des paires d'identités de réflexion conjuguées.

- **Conférence Palo Alto août 2000** : Baouendi-Rotshchild annoncent **sans avoir de preprint** le même résultat définitif, dont découlaient de nombreuses conséquences attendues pour les sous-variétés holomorphiquement non-dégénérées.
- **Décembre 2000** : Baouendi-Mir-Rotschild postent sur arxiv.org un preprint de 45 pages contenant toutes les généralisations que l'on peut obtenir en regardant des applications CR formelles qui ne sont pas des équivalences. Emprunt des idées de M. ; attaque de M. dans l'introduction : ses idées seraient erronées ! (la version v1 est toujours téléchargeable sur arxiv.org).
- **Septembre 2001** : M. publie une annonce aux C. R. Acad. Sci. Paris.
- **Théorème G** : plagiat notoire par Mir-Meylan-Zaitsev de l'argument de déformation de wedge apparaissant dans l'article de Damour ([Michigan Math. J., 2002, 21 pages](#)) et dû à Merker, expert français des variétés CR de codimension arbitraire.
- **Remarque** : La version finale du papier de Baouendi-Mir-Rothschild, publiée en 2002 au J. Diff. Geom., ne contient plus aucune référence à M.
- **Remarque** : M. n'a pu publier qu'en 2005 les résultats qu'il avait annoncés en mai 2000.

Extrait : fin d'introduction d'article

Merker, J. : *Étude de l'application de réflexion CR formelle*, Annales Fac. Sci. Toulouse, **XIV** (2005), no. 2, 215–330.

1.48. Remarque finale. Le lecteur aura remarqué que cette introduction contient de nombreuses références aux travaux de S.M. Baouendi, de P. Ebenfelt, de F. Meylan, de N. Mir, de L.P. Rothschild et de D. Zaitsev. Durant la période 1998–2004, ces auteurs ont régulièrement suivi l'évolution de nos travaux, publiés dans des revues spécialisées ou prépubliés électroniquement. Tous nos travaux sur les applications CR font référence à leurs travaux. En revanche, pour la période 1998–2004, force est de constater qu'il n'existe qu'une seule publication de ces auteurs, groupée ou individuelle, dont la *bibliographie* contienne une référence à l'un de nos travaux : il s'agit du livre à Princeton de Baouendi-Ebenfelt-Rothschild, qui cite notre travail de thèse paru en 1997, portant sur les singularités éliminables pour les fonctions CR (un autre sujet de recherche) ainsi que l'article écrit en 1997 en collaboration avec F. Meylan.

Insistons sur le fait que cette absence de citation est constatable non seulement dans les travaux que nous citons ici, mais aussi dans *tous les autres travaux (pré)publiés par ces auteurs durant cette période*. **Les travaux de N. Mir, très proches des nôtres, constituent le cas le plus frappant d'absence totale de citation bibliographique.** Pour cette raison, nous nous devions de détailler dans cette introduction la chronologie précise de l'apparition des résultats récents sur les applications CR formelles.

Joël MERKER
(CNRS & DMA)

Theorie der Transformationsgruppen

I. Le problème de Riemann–Lie–Helmholtz

www.dma.ens.fr/~merker/

Élie Cartan et la relativité générale

II. Le problème de l'espace de Weyl-Cartan

III. Unicité du tenseur d'Einstein d'après Cartan

www.dma.ens.fr/~merker/

IV. Théorie unitaire à parallélisme absolu et sys- tèmes en involution

CARTAN

- Élie CARTAN, **Sur les variétés à connexion affine et la théorie de la relativité généralisée**, Ann. Éc. Norm. **40** (1923), 325–412 ; **41** (1924), 1–24 ; **42** (1925), 17–88.
- Élie CARTAN, **Sur la théorie des systèmes en involution et ses applications à la relativité**, Bull. Soc. Math. France **59** (1931), 88–118.
- Élie CARTAN, **Notice historique sur la notion de parallélisme absolu**, Math. Ann. **102** (1930), 698–706.

EINSTEIN

- Albert EINSTEIN, **Théorie unitaire du champ physique**, 4 exposés à l’IHP en novembre 1929 rédigés par Alexandre Proca, Ann. Inst. Poincaré **1** (1930), 1–24.
- Albert EINSTEIN, **Auf die Riemann-Metrik und den Fern-Parallelismus ge-gründete einheitliche Feld theorie**, Math. Ann. **102** (1930), 685–697.

Correspondance entre Cartan et Einstein

- Robert DEBEVER (ed.), **Élie Cartan — Albert Einstein. Letters on absolute parallelism 1929–1932**, trad. J. Leroy et J. Ritter, Princeton University Press, Princeton, N.J., 1979.

- Catherine GOLDSTEIN ; Jim RITTER, **The varieties of unity : sounding unified theories 1920–1930**, Max-Planck-Institut für Wissenschaftsgeschichte, Preprint 149, 2000.
- Hubert F. GOENNER, **On the history of unified field theories**, Living reviews in relativity, Max Planck institute for gravitational physics, Albert Einstein institute, Germany.
- Tilman SAUER, **Field equations in teleparallel spacetime : Einstein's Fernparallelismus approach toward unified field theory**, arXiv:physics/0405142.

Plan de l'exposé

A. Contribution initiale d'Élie Cartan à la relativité générale :

- méthode générale d'équivalence
- démonstration de l'unicité des équations d'Einstein

B. Théorie des connexions affines :

- méthode du repère mobile
- concept de torsion

C. Recherches sur les théories unitaires à parallélisme absolu :

- les 22 équations d'Einstein
- systèmes en involution

III. Unicité du tenseur d'Einstein d'après Cartan

- Premier article de Cartan, dense, difficile, complexe :

Élie Cartan, **Sur les équations de la gravitation d'Einstein**, J. Math. pures et appl. 1 (1922), 141–203.

Théorème. Les équations covariantes de la relativité générale mises au point par Einstein entre 1913 et 1916 sont univoques pour des raisons purement mathématiques.

- **Rappels :**

- Espace pseudoriemannien.
- Coefficients de Christoffel.
- Tenseur riemannien de courbure.
- Tenseur de Ricci.
- Décomposition en tenseurs irréductibles.

- **Pseudo-métrique ou forme quadratique fondamentale :**

$$ds^2 = \sum_{1 \leq i, j \leq 4} g_{ij} dx^i dx^j,$$

avec la symétrie $g_{ij} = g_{ji}$ ayant 3 valeurs propres négatives et une valeur propre positive en tout point x .

- **Tensorialité :** par un changement de coordonnées $x \mapsto \bar{x} = \bar{x}(x)$, le $ds^2 = g_{ij}(x) dx^i dx^j$ initial se transforme en

un $d\bar{s}^2 = \bar{g}_{ij}(\bar{x}) d\bar{x}^i d\bar{x}^j$ dont les coefficients $\bar{g}_{ij}(\bar{x})$ sont donnés par :

$$\bar{g}_{ij} := \frac{\partial x^{i_1}}{\partial \bar{x}^i} \frac{\partial x^{j_1}}{\partial \bar{x}^j} g_{i_1 j_1}.$$

- **Convention de sommation sous-entendue :** lorsque deux indices sont répétés, l'un en haut, l'autre en bas.

- **Coefficients de Christoffel :**

$$\left\{ \begin{array}{c} k \\ i \ j \end{array} \right\} := \frac{1}{2} g^{pk} \left(\frac{\partial}{\partial x^i} g_{pj} + \frac{\partial}{\partial x^j} g_{pi} - \frac{\partial}{\partial x^p} g_{ij} \right),$$

où (g^{ij}) désigne la matrice inverse de la matrice (g_{ij}) .

- **Tenseur de courbure de Riemann :**

$$R_{ijk}{}^l := \frac{\partial \left\{ \begin{array}{c} l \\ i \ k \end{array} \right\}}{\partial x^j} - \frac{\partial \left\{ \begin{array}{c} l \\ j \ k \end{array} \right\}}{\partial x^i} + \sum_{p=1}^n \left\{ \begin{array}{c} p \\ i \ k \end{array} \right\} \left\{ \begin{array}{c} l \\ j \ p \end{array} \right\} - \left\{ \begin{array}{c} p \\ j \ k \end{array} \right\} \left\{ \begin{array}{c} l \\ i \ p \end{array} \right\}$$

- **Expression explicite :**

$$\begin{aligned} R_{ijk}{}^l &= \frac{1}{2} \sum_{m,p,q=1}^n g^{qm} g^{pl} \left(\frac{\partial g_{qp}}{\partial x^j} \left[\frac{\partial g_{km}}{\partial x^i} + \frac{\partial g_{im}}{\partial x^k} - \frac{\partial g_{ik}}{\partial x^m} \right] \right) - \\ &\quad - \frac{1}{2} \sum_{m,p,q=1}^n g^{qm} g^{pl} \left(\frac{\partial g_{qp}}{\partial x^i} \left[\frac{\partial g_{km}}{\partial x^j} + \frac{\partial g_{jm}}{\partial x^k} - \frac{\partial g_{jk}}{\partial x^m} \right] \right) + \\ &\quad + \frac{1}{2} \sum_{m=1}^n g^{ml} \left(\frac{\partial^2 g_{im}}{\partial x^j \partial x^k} - \frac{\partial^2 g_{ik}}{\partial x^j \partial x^m} - \frac{\partial^2 g_{jm}}{\partial x^i \partial x^k} + \frac{\partial^2 g_{jk}}{\partial x^i \partial x^m} \right) + \\ &\quad + \frac{1}{4} \sum_{m,p,q=1}^n g^{pm} g^{ql} \left(\left[\frac{\partial g_{pk}}{\partial x^i} + \frac{\partial g_{pi}}{\partial x^k} - \frac{\partial g_{ik}}{\partial x^p} \right] \left[\frac{\partial g_{qm}}{\partial x^j} + \frac{\partial g_{qj}}{\partial x^m} - \frac{\partial g_{jm}}{\partial x^q} \right] - \right. \\ &\quad \left. - \left[\frac{\partial g_{pk}}{\partial x^j} + \frac{\partial g_{pj}}{\partial x^k} - \frac{\partial g_{jk}}{\partial x^p} \right] \left[\frac{\partial g_{qm}}{\partial x^i} + \frac{\partial g_{qi}}{\partial x^m} - \frac{\partial g_{jm}}{\partial x^q} \right] \right). \end{aligned}$$

- **Symétries indicielles :**

$$\begin{cases} 0 = R_{ijk}^{l} + R_{kij}^{l} + R_{jki}^{l}, \\ 0 = R_{ijk}^{l} + R_{jik}^{l}. \end{cases}$$

- **Version contravariante :** Si l'on pose :

$$R_{ijkl} := g_{pl} R_{ijk}^{p},$$

on a les symétries indicielles :

$$\begin{cases} 0 = R_{ijkl} + R_{jkil} + R_{kijl}, \\ 0 = R_{ijkl} + R_{jikl}, \\ 0 = R_{ijkl} + R_{ijlk}, \\ 0 = R_{ijkl} - R_{klji}, \end{cases}$$

Lemme. Il n'y a que $\frac{n^2(n^2-1)}{12}$ quantités R_{ijkl} (ou R_{ijk}^{l}) qui sont linéairement indépendantes (et non pas n^4).

- **Raisonnement de Einstein 1916 :** Puisque le tenseur de Riemann R_{ijkl} est linéaire par rapport aux dérivées partielles $\frac{\partial^2 g_{\alpha\beta}}{\partial x^\gamma \partial x^\delta}$, ce tenseur semble approprié pour généraliser les équations newtoniennes de la gravitation dans un système arbitraire de coordonnées curvilignes. Toutefois, on doit trouver un tenseur (une quantité invariante) qui comporte seulement deux indices.

Einstein 1916. En partant du tenseur de courbure de Riemann et en le contractant de toutes les manières possibles, on obtient soit le **tenseur identiquement nul**, soit le **tenseur de Ricci** (ou son opposé) :

$$R_{ij} := R_{ikj}{}^k$$

- Einstein en 1929 sur le parallélisme absolu fait un raisonnement similaire :

Partons de la dérivée covariante $\Lambda_{\mu\nu;\sigma}^\alpha$ et contractons-la de toutes les manières possibles.

- **Question de mathématicien** : Passe-t-on à côté d'autres tenseurs invariants formés au moyen de certaines combinaisons linéaires invariantes du tenseur de courbure $R_{ijk}{}^l$ **qu'on ne peut pas obtenir par simple contraction** ?
- **Réaction de Cartan aux travaux d'Einstein** (vers 1920–1921) : l'argument mathématique d'Einstein est incomplet (bien que sa théorie physique soit déjà largement confirmée)
- **Cartan et la géométrie riemannienne (1921–1922)** : naissance d'un intérêt pour les travaux de Ricci, de Bianchi, de Levi-Civita, de Bortolotti, de Schouten, d'Eisenhart, sur la géométrie riemannienne en liaison avec les idées d'Einstein.

- **Méthode d'équivalence** : Cartan, avec sa méthode générale pour l'équivalence des structures groupo-différentielles, possédait implicitement une théorie complète pour les structures (pseudo)riemanniennes. Mais dans l'article de 1922, des concepts complexes, utilisés sans aucun rappel, sont imbriqués les uns dans les autres. Cartan écrit pour lui-même, court-circuitant de nombreux calculs.
- **Question** : Pourquoi Cartan est-il si difficile à lire ?
- **Question** : Pourquoi n'existe-t-il aucun ouvrage de physique ou de mathématique ayant modernisé, simplifié et rendu accessible à un large public la démonstration d'unicité de Cartan ?
- **Question anecdotique** : Pourquoi les pages des trois célèbres articles de Cartan **Sur les variétés à connexion affine et la théorie de la relativité généralisée** dans l'un des deux jeux de six volumes d'œuvres complètes que l'on trouve à la bibliothèque de mathématiques de l'ENS Ulm ne sont-elles pas découpées (ce qui semble indiquer qu'elles n'ont été lues depuis 1953 par aucun lecteur du département de mathématiques) ?
- **Christoffel 1869** : deux métriques riemanniennes données sont équivalentes si et seulement si leur courbures

riemanniennes ainsi que toutes leurs dérivées intrinsèques coïncident (vrai pour un ds^2 rigide).

Théorème fondamental de Christoffel-Cartan. Les composantes $R_{ijk}{}^l$ du tenseur de courbure accompagnées de toutes leurs dérivées covariantes

$$R_{ijk}{}^l; m_1, R_{ijk}{}^l; m_1; m_2, \dots, R_{ijk}{}^l; m_1; m_2; \dots; m_k, \dots$$

constituent un **système complet d'invariants différentiels de la (pseudo) métrique riemannienne**.

- Dans le premier mémoire de 1922 et dans les trois articles sur les connexions de 1923, 1924 et 1925, ce théorème général qui résout complètement (mais seulement en principe et d'une manière abstraite) le problème d'équivalence ainsi que le problème de classification n'est pas clairement énoncé.
- **Question :** Einstein savait-il (grâce aux travaux de Ricci et de Levi-Civita par exemple) que R_{ijkl} ainsi que ses dérivées covariantes constituent un système complet d'invariants différentiels pour le ds^2 , à changement de coordonnées près ?

- Théorème d'unicité des équations de la gravitation d'Einstein : une forme quadratique différentielle

$$\sum_{i,j=1}^n \mathcal{C}_{ij}^0 \left(g_{\alpha\beta}(x), \frac{\partial g_{\alpha\beta}}{\partial x^\gamma}(x), \frac{\partial^2 g_{\alpha\beta}}{\partial x^\gamma \partial x^\delta}(x) \right) dx^i dx^j$$

dont les coefficients sont des fonctions \mathcal{C}_{ij}^0 du jet d'ordre 2 des coefficients métriques est **covariante de la forme quadratique fondamentale** $\sum_{i,j=1}^n g_{ij} dx^i dx^j$ si l'on a :

$$\begin{aligned} & \sum_{i,j=1}^n \mathcal{C}_{ij}^0 \left(\bar{g}_{\alpha\beta}(x), \frac{\partial \bar{g}_{\alpha\beta}}{\partial \bar{x}^\gamma}(\bar{x}), \frac{\partial^2 \bar{g}_{\alpha\beta}}{\partial \bar{x}^\gamma \partial \bar{x}^\delta}(\bar{x}) \right) d\bar{x}^i d\bar{x}^j = \\ &= \sum_{i,j=1}^n \mathcal{C}_{ij}^0 \left(g_{\alpha\beta}(x), \frac{\partial g_{\alpha\beta}}{\partial x^\gamma}(x), \frac{\partial^2 g_{\alpha\beta}}{\partial x^\gamma \partial x^\delta}(x) \right) dx^i dx^j, \end{aligned}$$

avec les mêmes fonctions \mathcal{C}_{ij}^0 de part et d'autre de l'égalité, pour tout changement de coordonnées $x \mapsto \bar{x} = \bar{x}(x)$. Autrement dit, les \mathcal{C}_{ij}^0 jouissent d'une loi de transformation tensorielle qui est exactement la même que celle que satisfait le tenseur de Ricci R_{ij} :

$$\mathcal{C}_{ij}^0 \left(J_{\bar{x}}^2 \bar{g}_{\alpha\beta} \right) = \sum_{i_1=1}^n \sum_{j_1=1}^n \frac{\partial x^{i_1}}{\partial \bar{x}^i} \frac{\partial x^{j_1}}{\partial \bar{x}^j} \mathcal{C}_{i_1 j_1}^0 \left(J_x^2 g_{\alpha_1 \beta_1} \right),$$

Théorème. (CARTAN, 1922) Toute forme quadratique différentielle

$$\sum_{i,j=1}^4 \mathcal{C}_{ij}^0 \left(g_{\alpha\beta}(x), \frac{\partial g_{\alpha\beta}}{\partial x^\gamma}(x), \frac{\partial^2 g_{\alpha\beta}}{\partial x^\gamma \partial x^\delta}(x) \right) dx^i dx^j,$$

linéaire par rapport aux dérivées partielles d'ordre 2 des coefficients $g_{\alpha\beta}$ et covariante de la forme quadratique fondamentale est nécessairement une combinaison linéaire incorporant le **tenseur de Ricci**, la **courbure scalaire que multiplie le tenseur pseudométrique** et le **tenseur pseudométrique** lui-même :

$$\mathcal{C}_{ij}^0 = a R_{ij} + b R g_{ij} + c g_{ij}$$

avec des constantes a , b et c arbitraires.

Corollaire. Le tenseur une fois covariant et une fois contravariant défini par :

$$E_i{}^j := a \left(R_i{}^j - \frac{1}{2} \delta_i^j A \right) + b \delta_i^j,$$

où a et b sont des constantes réelles, est le plus général qui satisfait la loi de conservation

$$E_i{}^j{}_{;j} = 0$$

(annulation de la divergence covariante).

- **Question :** Einstein a-t-il réagi à l'article de Cartan 1922 ?

Connexions affines d'après Cartan

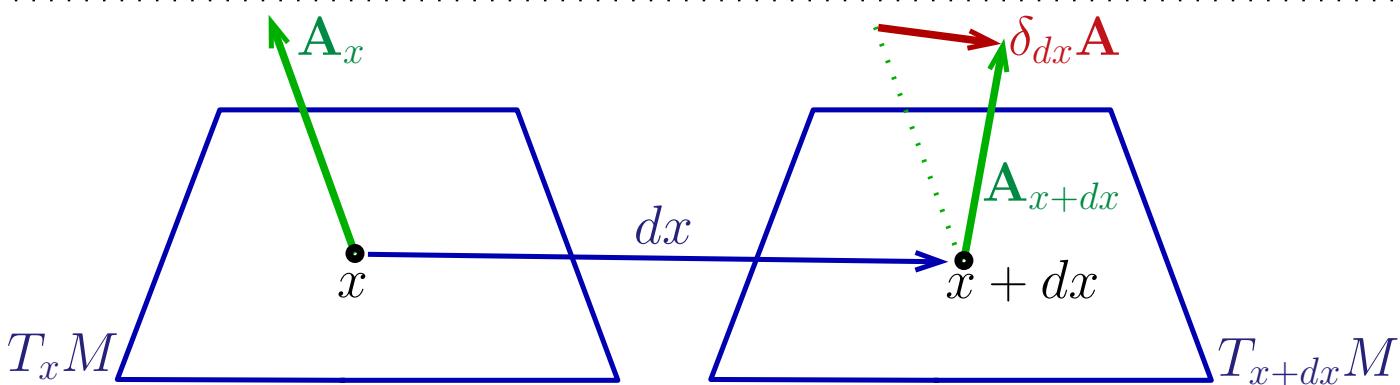
- **Concept géométrique de connexion :** Sur une variété lisse M , se donner une loi de transport linéaire entre deux espaces tangents infiniment proches, la loi de raccord dépendant *a priori* du petit déplacement dx entre un point x et un autre point infiniment proche $x + dx$:

$$\mathbf{A}_{x+dx} - \mathbf{A}_x = \text{linéaire en } \mathbf{A}_x \text{ et d'ordre 1 en } dx$$

- Expression analytique de la différence (infinitésimale) entre les n composantes A^μ :

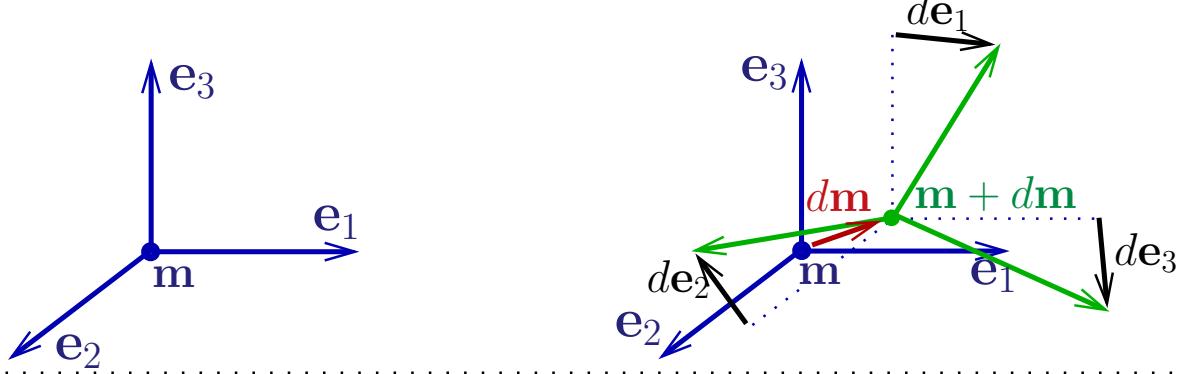
$$\begin{aligned} A^\mu|_{x+dx} - A^\mu|_x &= \delta_{dx} A^\mu \\ &= -\Delta_{\alpha\beta}^\mu A^\alpha dx^\beta \end{aligned}$$

où les $\Delta_{\alpha\beta}^\mu = \Delta_{\alpha\beta}^\mu(\mathbf{x})$ sont n^3 fonctions, appelées parfois **coefficients de Christoffel** de la connexion.



- Dans l'article sur le problème de Weyl, Cartan montre par un argument heuristique simple que si l'on souhaite définir un transport parallèle qui soit **invariant par changement de coordonnées**, une telle expression est nécessaire.

- Théorie générale : Champs de repères affines sur \mathbb{R}^n :



- Un point m accompagné d'un système de n vecteurs (e_1, e_2, \dots, e_n) linéairement indépendants.
- Le tout dépend de $x = (x^1, x^2, \dots, x^n) \in \mathbb{R}^n$ et éventuellement aussi de certains paramètres auxiliaires $\lambda = (\lambda_1, \dots, \lambda_r)$.
- **Philosophie infinitésimale** : toute l'information locale doit pouvoir résider dans la connaissance des différentielles par rapport à x :

$$d\mathbf{m} := \mathbf{m}_{x+dx} - \mathbf{m}_x$$

$$d\mathbf{e}_i := (\mathbf{e}_i)_{x+dx} - (\mathbf{e}_i)_x$$

- **Auto-expression** : repérer le système de référence d'origine $m + dm$ par rapport au système de référence en m .
- **Redécomposer** chacun de ces $1 + n$ vecteurs infinitésimaux dm et $d\mathbf{e}_i$ (qui sont des vecteurs tangents à \mathbb{R}^n)

au point m) tout simplement en utilisant la base existante $(\mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2, \dots, \mathbf{e}_n)$. S'introduisent alors certains coefficients qui sont des formes différentielles

$$\omega^i = \omega^i(x, \lambda; dx), \quad \omega_i^j = \omega_i^j(x, \lambda; dx)$$

du type

$$\omega(x, \lambda; dx) = \varpi_1(x, \lambda) dx^1 + \cdots + \varpi_n(x, \lambda) dx^n$$

telles qu'on peut écrire (dans le cas $n = 3$) :

$$d\mathbf{m} = \omega^1 \mathbf{e}_1 + \omega^2 \mathbf{e}_2 + \omega^3 \mathbf{e}_3$$

ainsi que :

$$\begin{cases} d\mathbf{e}_1 = \omega_1^1 \mathbf{e}_1 + \omega_1^2 \mathbf{e}_2 + \omega_1^3 \mathbf{e}_3 \\ d\mathbf{e}_2 = \omega_2^1 \mathbf{e}_1 + \omega_2^2 \mathbf{e}_2 + \omega_2^3 \mathbf{e}_3 \\ d\mathbf{e}_3 = \omega_3^1 \mathbf{e}_1 + \omega_3^2 \mathbf{e}_2 + \omega_3^3 \mathbf{e}_3 \end{cases}$$

- **Écriture formelle générale :**

$$d\mathbf{m} = \omega^i \mathbf{e}_i$$

$$d\mathbf{e}_i = \omega_i^j \mathbf{e}_j$$

- **Résumé** : on déplace à la fois un point central et un système de n vecteurs.

- **Réinterprétation** : le vecteur $(\mathbf{e}_i)_{x+dx}$ constitue le résultat du **transport parallèle** du vecteur $(\mathbf{e}_i)_x$ du point x vers le point $x + dx$, en suivant la direction infinitésimale dx issue du point x .

- Gauss, Riemann, Christoffel, Lipschitz, Ricci, Schouten, Levi-Civita, Weyl, **Cartan**, Einstein :

concepts de courbure et de torsion

- Version formelle :

$$\Omega^i := d\omega^i - \omega^k \wedge \omega_k^i$$

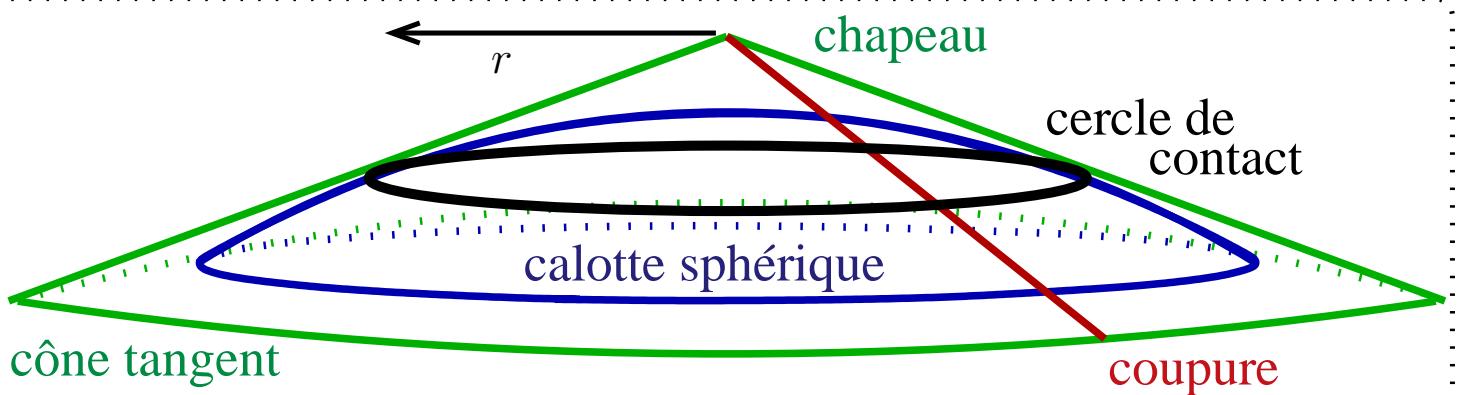
$$= \Lambda_{jk}^i \omega^j \wedge \omega^k,$$

$$\Omega_i^j := d\omega_i^j - \omega_i^k \wedge \omega_k^j$$

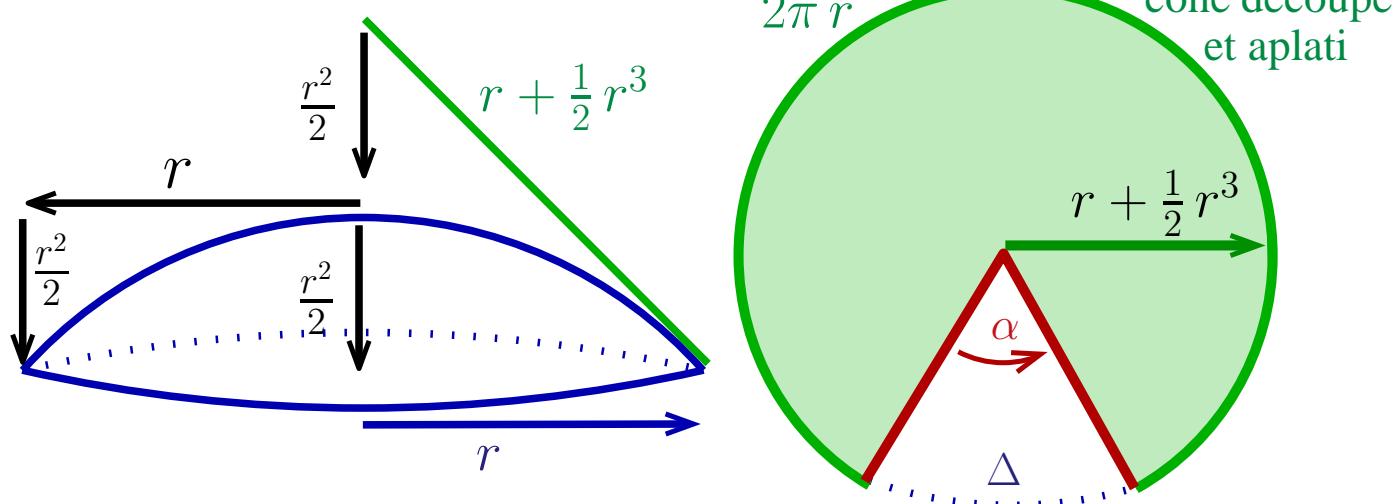
$$= A_{jkl}^i \omega^k \wedge \omega^l.$$

Version géométrique

- Exemple ou rappel : courbure et torsion de la connexion de Levi-Civita dans \mathbb{R}^3 .
- Surface modèle : calotte d'une sphère de rayon 1.



- Introduire un cône auxiliaire qui chapeaute la calotte avec un contact tangentiel le long d'un cercle de rayon r .
- Découper le cône le long d'une génératrice et l'aplatir sur un plan auxiliaire.



- Effectuer le transport parallèle du point-origine et des vecteurs simplement de manière euclidienne dans le plan du cône aplati.
- **Écartement** : (négliger les termes d'ordre supérieur comme dans les figures)

$$\Delta = 2\pi \left(r + \frac{1}{2} r^3 \right) - 2\pi r = \pi r^3.$$

- **Angle** :

$$\alpha = 2\pi \left(1 - \frac{r}{r + \frac{1}{2} r^3} \right) = \pi r^2$$

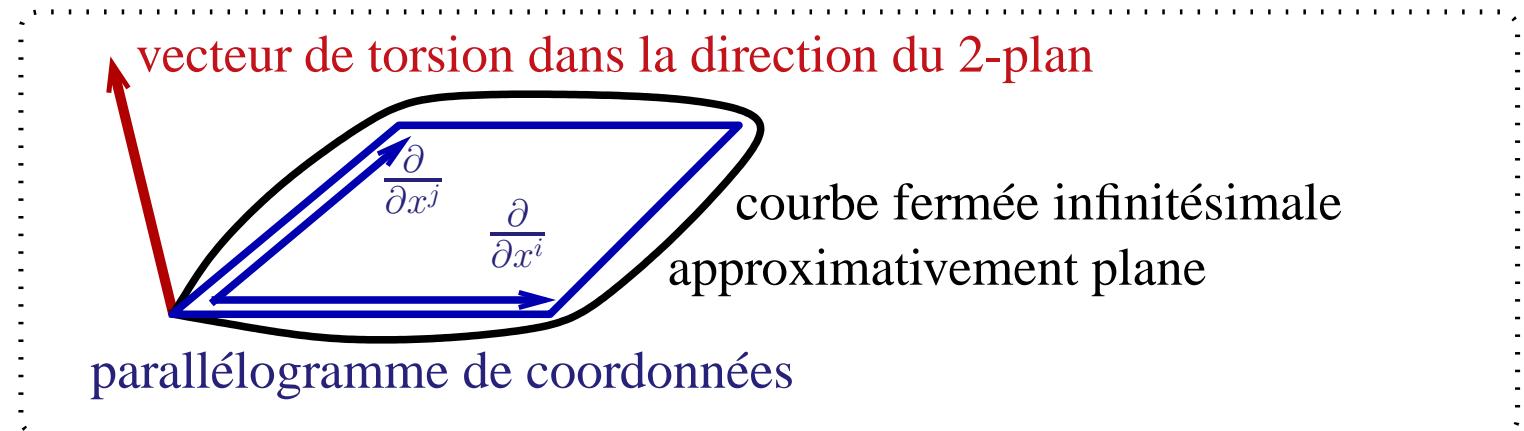
Torsion := $\lim \frac{\text{Écartement}}{\text{aire}} = \lim \frac{\Delta}{\pi r^2} = \lim \frac{\pi r^3}{\pi r^2} = 0.$
--

courbure := $\lim \frac{\text{angle}}{\text{aire}} = \lim \frac{\alpha}{\pi r^2} = \lim \frac{\pi r^2}{\pi r^2} = 1.$
--

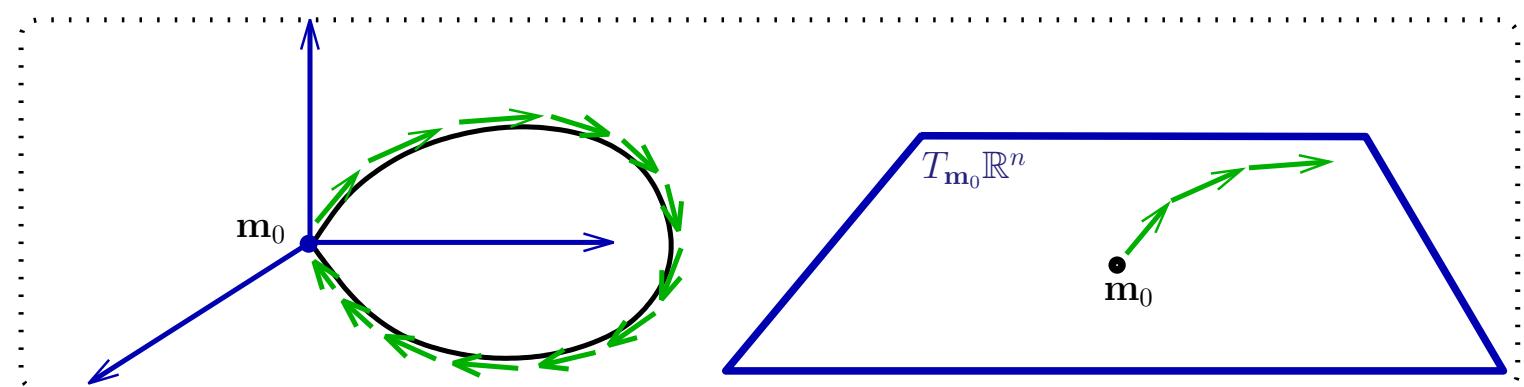
- **Généralisation** : Ce procédé se généralise en considérant les éléments infinitésimaux de surface tracés dans

une variété riemannienne plongée et en introduisant une hypersurface développable tangente auxiliaire dans laquelle on effectue un transport parallèle simplement euclidien.

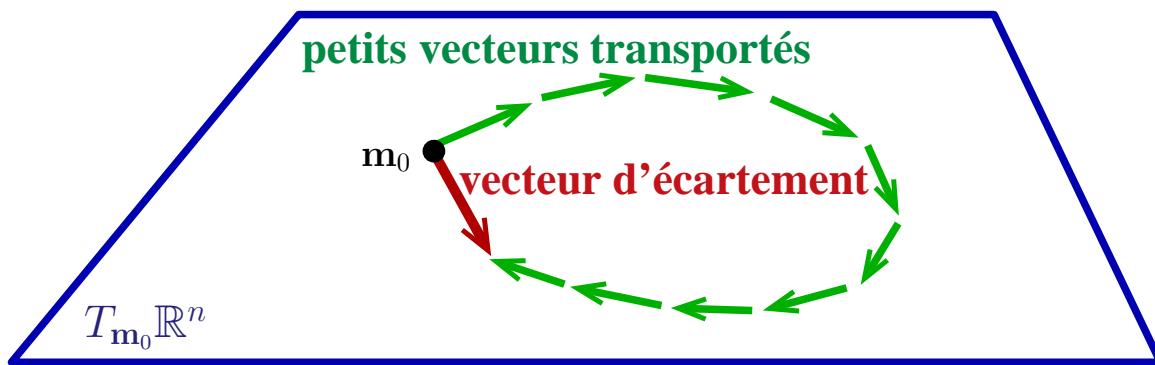
- On regarde des courbes fermées simples issues d'un point m_0 essentiellement dirigées par un 2-plan infinitésimal.



- Expliquons seulement ce à quoi correspond la torsion de la connexion.
- On approxime la courbe par une suite de vecteurs infinitésimaux.



- Grâce au transport parallèle des vecteurs que définit la connexion, on peut mettre bout à bout tous les petits vecteurs dans le plan tangent fixe $T_{m_0}\mathbb{R}^n$.
- En général, bien que la courbe tracée dans \mathbb{R}^n se referme, la courbe verte tracée dans $T_{m_0}\mathbb{R}^n$ **ne se referme pas.**



$$\text{Vecteur Torsion} := \lim \frac{\text{Écartement}}{\text{aire}}$$

- Si on envisage la torsion en tant que tenseur :

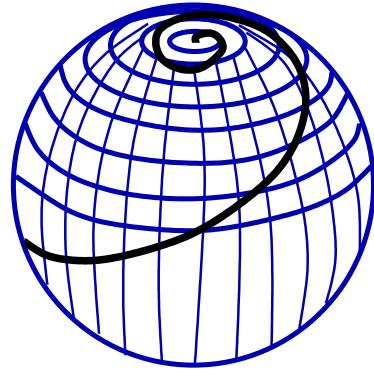
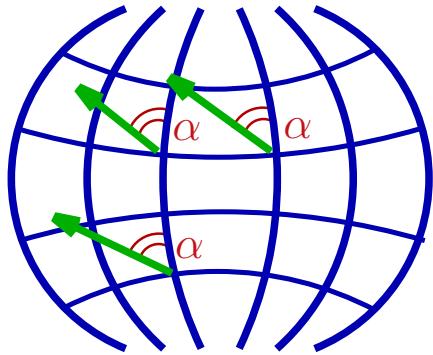
$$\Lambda_{ij}^k$$

il y aura donc **trois** indices :

- deux indices ij **antisymétriques** pour paramétrer l'ensemble des 2-plans de coordonnées $\text{Vect} \left(\frac{\partial}{\partial x^i}, \frac{\partial}{\partial x^j} \right)$
- un indice k relatif à la décomposition du vecteur de torsion dans la base $\left(\frac{\partial}{\partial x^1}, \dots, \frac{\partial}{\partial x^n} \right)$

$\Lambda_{ij}^k :=$ **composante k -ième du vecteur de torsion
associé au 2-plan** $\left(\frac{\partial}{\partial x^i}, \frac{\partial}{\partial x^j}\right)$

- Exemple le plus simple d'espace à torsion : regarder comme **parallèles** deux vecteurs sur la sphère terrestre qui font le même angle α avec le méridien passant par leur origine.



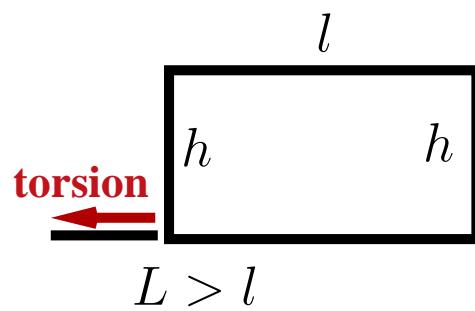
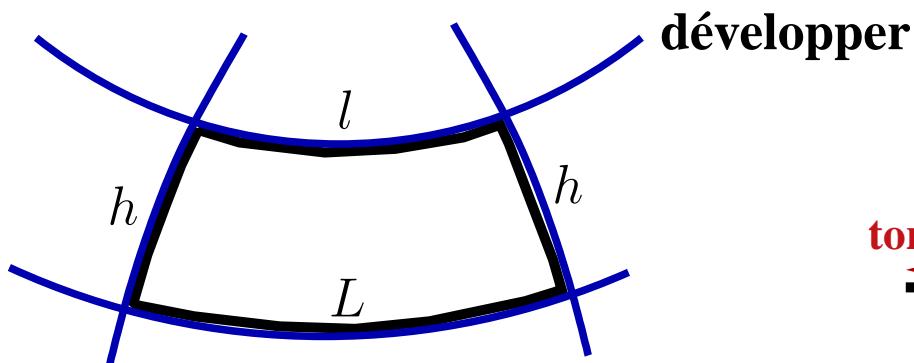
- Les géodésiques sont des loxodromies, d'équation :

$$v \cotan \alpha = R \log \tan \left(\frac{\pi}{4} + \frac{u}{2R}, \right)$$

pour la métrique sphérique

$$ds^2 = R^2 (du^2 + \cos^2 u dv^2.)$$

- Vecteur de torsion :

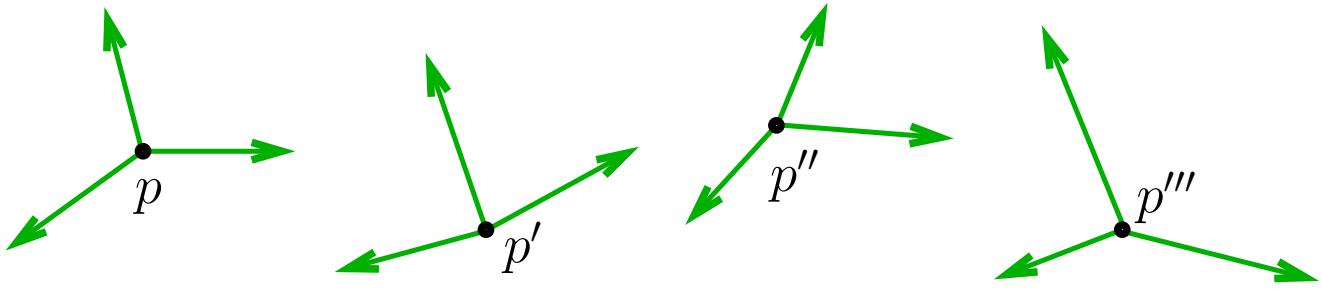


Théorie unitaire à parallélisme absolu

- Sur une variété \mathcal{C}^∞ de dimension $n \geq 2$, se donner un système de n champs de vecteurs

$$\mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2, \dots, \mathbf{e}_n$$

linéairement indépendants en tout point $p \in M$.



- **Terminologie :** **n-pode**, **n-Bein**, **frame**, **repère**.
- Tout sera essentiellement **local**, donc $M = \mathbb{R}^n$ dans un système de coordonnées curvilignes (x^1, x^2, \dots, x^n)
- Relativité et électromagnétisme : $n = 4$:
 (x^1, x^2, x^3, x^4) .

- Quatre champs de vecteurs indépendants associés :

$$\frac{\partial}{\partial x^1} \quad \frac{\partial}{\partial x^2} \quad \frac{\partial}{\partial x^3} \quad \frac{\partial}{\partial x^4}$$

- Décomposer chacun des quatre vecteurs \mathbf{e}_s :

$$\mathbf{e}_s = h_s{}^1 \frac{\partial}{\partial x^1} + h_s{}^2 \frac{\partial}{\partial x^2} + h_s{}^3 \frac{\partial}{\partial x^3} + h_s{}^4 \frac{\partial}{\partial x^4},$$

pour certaines fonctions $h_s{}^\nu = h_s{}^\nu(\mathbf{x})$.

- Deux manières de décomposer un champ de vecteurs :

$$\begin{aligned}\mathbf{A} &= A^1 \frac{\partial}{\partial x^1} + A^2 \frac{\partial}{\partial x^2} + A^3 \frac{\partial}{\partial x^3} + A^4 \frac{\partial}{\partial x^4} \\ &= A_1 \mathbf{e}_1 + A_2 \mathbf{e}_2 + A_3 \mathbf{e}_3 + A_4 \mathbf{e}_4\end{aligned}$$

donc en insérant $\mathbf{e}_s = h_s^\nu \frac{\partial}{\partial x^\nu}$, les deux types de composantes A^ν et A_s sont reliées par :

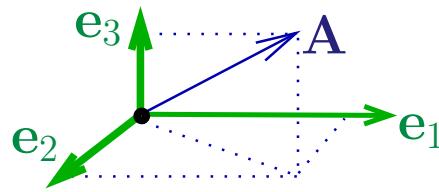
$$A^\nu = h_s^\nu A_s$$

et inversement :

$$A_s = h_{s\nu} A^\nu$$

avec la convention de sommation habituelle, où $h_{s\nu}$ est simplement la matrice inverse de h_s^ν , qui satisfait

$$\delta_r^s = h_{s\nu} h_r^\nu.$$



- Définir une métrique riemannienne associée en **déclarant** que le champ de repères $(\mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2, \mathbf{e}_3, \mathbf{e}_4)$ **est orthonomé**, d'où par la règle de Pythagore :

$$\|\mathbf{A}\|^2 = \sum A_s^2 = \sum h_{s\mu} h_{s\nu} A^\mu A^\nu.$$

Ainsi, les coefficients de la métrique $ds^2 = g_{\mu\nu} dx^\mu dx^\nu$ sont donnés par :

$$g_{\mu\nu} := h_{s\mu} h_{s\nu}.$$

- **Comptage heuristique** : en relativité générale, il y a **10** potentiels de gravitation $g_{\mu\nu}$ ($1 \leq \mu \leq \nu \leq 4$) à cause de la symétrie $g_{\mu\nu} = g_{\nu\mu}$. Ici, il y a **16 fonctions** h_s^ν .
- **Connexion associée** : déclarer qu'un vecteur \mathbf{A} en un point p est **parallèle** à un autre vecteur \mathbf{A}' en un autre point p' si \mathbf{A} et \mathbf{A}' ont **les mêmes composantes** dans les repères respectifs $(\mathbf{e}_1, \dots, \mathbf{e}_4)$ en p et $(\mathbf{e}'_1, \dots, \mathbf{e}'_4)$ en p' .
- Le parallélisme est intrinsèque, il ne dépend pas du chemin suivi pour aller de p en p' , il est **absolu**.
- Le parallélisme ne change pas si l'on fait un changement de repère global à coefficients constants indépendants de p .
- **Fernparallelismus** ou **Parallélisme absolu**.

Résumé. Étant donné une variété **a-métrique** M munie d'un champ \mathcal{C}^∞ de repères $(\mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2, \dots, \mathbf{e}_n)$, on peut y **définir une métrique riemannienne** en déclarant que les repères en question sont orthonormés.

Réciproquement, si la variété M est munie à la fois d'un champ de repères et d'une métrique riemannienne, on peut **orthonormaliser les repères** grâce au procédé d'orthonormalisation de Gram-Schmidt.

Tenseur de torsion et équivalence

- Retour au parallélisme absolu, d'après Einstein.

- Coefficients de Christoffel d'une connexion :

$$\begin{aligned} A^\mu|_{x+dx} - A^\mu|_x &= \delta_{dx} A^\mu \\ &= -\Delta_{\alpha\beta}^\mu A^\alpha dx^\beta \end{aligned}$$

- Pour la connexion naturellement associée à un parallélisme absolu : $e_s = h_s{}^\nu \frac{\partial}{\partial x^\nu}$:

$$\Delta_{\alpha\beta}^\mu = -h_{s\alpha} h_s{}^\mu,_\beta$$

où l'on désigne par $(\cdot)_{,\beta}$ la dérivation d'une quantité (\cdot) par rapport à la variable x^β .

- **Tenseur de torsion :**

$$\begin{aligned} \Lambda_{\alpha\beta}^\mu &:= \Delta_{\alpha\beta}^\mu - \Delta_{\beta\alpha}^\mu \\ &= h_{s\beta} h_s{}^\mu,_\alpha - h_{s\alpha} h_s{}^\mu,_\beta. \end{aligned}$$

On vérifie par un calcul direct que c'est bien un tenseur.

- **Observation :** ce tenseur ne contient que des dérivées premières des composantes fondamentales $h_s{}^\nu$, alors que dans le schéma de Levi-Civita, ce tenseur s'annule identiquement, et le premier tenseur invariant : la courbure, dépend des dérivées d'ordre deux de la métrique.

Proposition. L'espace muni d'un système de repères $(\mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2, \mathbf{e}_3, \mathbf{e}_4)$ dépendant de $x = (x^1, x^2, x^3, x^4)$ est équivalent, via une transformation locale $x \mapsto \bar{x}$, à l'espace des $(\bar{x}^1, \bar{x}^2, \bar{x}^3, \bar{x}^4)$ muni des repères triviaux

$$\left(\frac{\partial}{\partial \bar{x}^1}, \frac{\partial}{\partial \bar{x}^2}, \frac{\partial}{\partial \bar{x}^3}, \frac{\partial}{\partial \bar{x}^4} \right)$$

si et seulement si tous les coefficients de torsion s'annulent identiquement, i.e. $\Lambda_{\alpha\beta}^\mu = 0$.

- **Platitude :** c'est l'analogue de la proposition disant qu'un espace riemannien est localement équivalent à un espace euclidien si et seulement si le tenseur de courbure de Riemann s'annule identiquement.

Relativité générale :

Présence de courbure

$$R^i_{jkl} \neq 0$$

Torsion nulle :

$$\Lambda_{\alpha\beta}^\mu = 0$$

Théorie unitaire :

Courbure nulle :

$$R^i_{jkl} = 0$$

Présence de torsion

$$\Lambda_{\alpha\beta}^\mu \neq 0$$

- **Dérivée covariante :**

tenseur contravariant :

$$A^\mu{}_{;\sigma} = A^\mu{}_{,\sigma} + A^\alpha \Delta^\mu_{\alpha\sigma}.$$

tenseur covariant :

$$A_{\mu;\sigma} = A_{\mu,\sigma} - A_\alpha \Delta^\alpha_{\mu\sigma}.$$

- **Observation :** les dérivées covariantes du tenseur fondamental h_s^ν ainsi que du tenseur métrique associé $g_{\sigma\tau}$

s'annulent identiquement :

$$0 = h_s{}^\nu{}_{;\tau} = h_{s\nu;\tau} = g_{\sigma\tau;\rho} = g^{\sigma\tau}{}_{;\rho},$$

ces identités exprimant que la connexion est compatible avec le parallélisme absolu et avec la métrique associée.

Théorème fondamental de Cartan. Les composantes $\Lambda_{\alpha\beta}^\mu$ de la torsion accompagnées de toutes leurs dérivées covariantes par rapport à e_1, e_2, \dots, e_n :

$$\Lambda_{\alpha\beta;\gamma_1}^\mu, \Lambda_{\alpha\beta;\gamma_1;\gamma_2}^\mu, \dots, \Lambda_{\alpha\beta;\gamma_1;\gamma_2;\dots;\gamma_k}^\mu, \dots$$

constituent un **système complet d'invariants du parallélisme absolu au sens suivant**.

Explication : Autrement dit, si l'on se place localement au voisinage d'un point où l'application de M à valeurs dans \mathbb{R}^∞

$$x \longmapsto (\Lambda_{\alpha\beta}^\mu(x), \dots, \Lambda_{\alpha\beta;\gamma_1;\gamma_2;\dots;\gamma_k}^\mu(x), \dots)$$

est de rang constant, disons égal à r (avec $0 \leq r \leq n$), et si l'on choisit une sous-collection de r dérivées covariantes fondamentales de rang r par rapport à x

$$\Lambda_i(x) := \Lambda_{\alpha(i)\beta(i);\gamma_1(i);\gamma_2(i);\dots;\gamma_{k(i)}(i)}^\mu(x), \quad i = 1, \dots, r,$$

alors par le théorème du rang constant, toutes les **autres** dérivées covariantes s'expriment au moyen de certaines fonctions de ces Λ_i :

$$\Lambda_{\alpha\beta;\gamma_1;\gamma_2;\dots;\gamma_k}^\mu \equiv \Phi_{\alpha\beta\gamma_1\dots\gamma_k}(\Lambda_1, \dots, \Lambda_r)$$

et ces fonctions $\Phi_{\alpha\beta\gamma_1\dots\gamma_k}$ sont indépendantes du système de coordonnées.

- **Résolution du problème d'équivalence** : De plus, étant donné deux parallélismes absolus e_1, e_2, \dots, e_n et $\bar{e}_1, \bar{e}_2, \dots, \bar{e}_n$ donnés dans deux systèmes de coordonnées (x^1, x^2, \dots, x^n) et $(\bar{x}^1, \bar{x}^2, \dots, \bar{x}^n)$, il existe une transformation ponctuelle (un difféomorphisme) $x \mapsto \bar{x}$ qui transforme le premier champ de repères en le second **si et seulement si**, $\bar{r} = r$ et les dépendances fonctionnelles Φ et $\bar{\Phi}$ sont exactement les mêmes.

Motivation et historique initial

- **Rappel :** En relativité générale, *i.e.* sur une variété à 4 dimensions munie d'un ds^2 pseudo-riemannien (minkowskien sur chaque espace tangent), les 10 fameuses équations d'EINSTEIN (1916) pour la gravitation générale s'écrivaient :

$$R^{ik} - \frac{1}{2} g^{ik} R = T^{ik},$$

$1 \leq i \leq k \leq 4$, où R^{ik} est le tenseur de Ricci et g^{ik} le tenseur (pseudo)métrique, tous deux écrits en composantes covariantes, où R est la courbure scalaire, et où T^{ik} est le tenseur d'énergie-impulsion de la matière. Le premier membre $R^{ik} - \frac{1}{2} g^{ik} R$, appelé **membre géométrique**, est purement mathématique.

- Ici, nous avons **10** fonctions inconnues $g_{\mu\nu}$ (potentiels de gravitation) observés Einstein, mais le système des **4** coordonnées (x^1, x^2, x^3, x^4) permet d'en normaliser 4 parmi 10, par exemple

$$g_{14} = 0, \quad g_{24} = 0, \quad g_{34} = 0, \quad g_{44} = 1,$$

et donc, heuristiquement parlant, il ne reste plus que **6 inconnues** principales, à savoir les **6** $g_{\mu\nu}$ restantes qui doivent satisfaire **10 > 6** équations. Mais comme on le sait, la loi de conservation infinitésimale de l'énergie exige que la divergence covariante de T^{ik} s'annule, ce

qui donne les **4** équations de compatibilité suivantes :

$$0 \equiv (R^{ik} - \frac{1}{2} g^{ik} R)_{;k}$$

$1 \leq i \leq 4$, qui rétablissent la cohérence du système d'Einstein.

- Dans la recherche d'une théorie synthétisant gravitation et électromagnétisme, on se concentre d'abord sur l'élaboration d'équations tensorielles géométriques généralisant $R^{ik} - \frac{1}{2} g^{ik} R = 0$, et on est amené à discuter de la nature et du nombre des équations à choisir, ainsi qu'à **spéculer sur le nombre de relations de compatibilité qui doivent nécessairement être satisfaites par le système recherché**.
- Par ailleurs, on est tenté, afin de respecter un principe de déterminisme physique (au moins local), à privilier seulement les systèmes tels que les données physiques initiales sur une sous-variété à trois dimension déterminent uniquement toutes les quantités dans un voisinage. Autrement dit, les systèmes souhaités doivent être non caractéristiques (au sens de la théorie des EDP).
- Avant de poursuivre, rappelons aussi que pour les équations de MAXWELL (électromagnétisme) dans le vide

$$\begin{aligned} \text{rot } \mathbf{H} - \frac{1}{c} \frac{\partial \mathbf{E}}{\partial t} &= 0 & \text{rot } \mathbf{E} + \frac{1}{c} \frac{\partial \mathbf{H}}{\partial t} &= 0, \\ \text{div } \mathbf{E} &= 0, & \text{div } \mathbf{H} &= 0, \end{aligned}$$

sont au nombre de **8** pour **6 inconnues**, mais il y a les **2 = 8 – 6** équations de compatibilité obtenues en prenant la divergence de la première ligne.

- **Paradoxe métaphysique** : les équations de la physique envisagées seulement avec le regard d'un algébriste différentiel.
- **Visite d'Einstein à Paris en mars/avril 1922.**
- **Quatre conférences au Collège de France à l'invitation de Paul Langevin.**
- **1921–22 : Théorème de Cartan sur l'unicité du tenseur d'Einstein.**
- Six ans plus tard, en 1928, quand Einstein publia ses premières réflexions sur le parallélisme absolu dans les *Sitzungsberichte*, poussé par son ami Paul Langevin à manifester sa priorité scientifique, Cartan dut rappeler à Einstein l'existence de ses trois articles sur les connexions parus aux *Annales de l'École Normale* (1923, 1924, 1925), où est notamment introduit le **concept de torsion** (déjà explicitement présent dans une note aux *Comptes Rendus* en 1922).

La notion d'espace riemannien doué d'un *Fernparallelismus* est un cas particulier d'une notion plus générale, celle d'espace à connexion euclidienne, que j'ai indiquée succinctement en 1922 dans une note des *Comptes Rendus* (t. 174, pp. 593–595) parue au moment où vous faitiez vos conférences au Collège de France ; je me rappelle même avoir, chez M. Hadamard, essayé de vous donner l'exemple le plus simple d'un espace de Riemann avec *Fernparallelismus* en prenant une sphère et en regardant comme parallèles deux vecteurs faisant le même angle avec les méridiennes qui passent par leurs deux origines : les géodédiques correspondantes sont les loxodromies.

- **Spéculation épistémologique :** Einstein croyait avoir trouvé par lui-même l'idée de parallélisme absolu à distance fini. Tout scientifique peut inconsciemment rencontrer ou redécouvrir soudainement une idée qui a été déposée des années auparavant dans son inconscient, et l'on peut croire qu'Einstein n'avait même pas essayé de suivre ce que Cartan avait essayé de lui expliquer. Mais on peut aussi penser qu'Einstein était renseigné sur les travaux de Cartan dont il devait certainement avoir reçu des tirés à part, bien qu'il ne se sentît pas obligé de réagir aux articles purement mathématiques de Cartan, de Schouten, d'Eisenhart et de Weitzenböck.

- Eisenhart 1925 : *Riemannian geometry*, Princeton University Press ; connexion associée à un parallélisme absolu.
- Weitzenböck 1928 : *Differentialinvarianten in der Einsteinschen Theorie des Fernparallelismus*, Sitzungsber. Prüss. Akad. Wiss. **26** (1928), 466–474.

• Réponse d'Einstein à Cartan :

Ich sehe in der That ein, dass die von mir benutzten Mannigfaltigkeiten in den von Ihnen studierten als Spezialfall enthalten sind. Auch die Herren Eisenhart (Princeton) und Weitzenböck (Saaren) haben die mathematische Grundlagen meiner neuen Theorie bereits teilweise vor mir dargelegt. Letzterer hat in einer zu unserer Akademie *Sitz. Ber.* 1928, **XXVI**, gedruckten Abhandlung ein — wie es schien vollständiges — Litteratur-Verzeichnis der einschlägigen mathematischen Arbeiten angegeben; *dabei hat er aber auch Ihre Arbeiten übersehen*. Dies muss nun wieder gut gemacht werden. Ich bin aber ein bisschen ratlos, wie ich es machen soll, um alle gerechten Ansprüche zu befriedigen.

• Réaction dubitative de Cartan :

Le silence de Weitzenböck à mon égard est un peu curieux car il indique dans sa bibliographie une note de Bortolotti dans laquelle il se réfère plusieurs fois à mes travaux.

- Le 15 mai 1929, Einstein propose à Cartan d'écrire un article historique sur la notion de parallélisme absolu dans *Zeitschrift für Physik*, comme complément à un mémoire de survol d'Einstein.
- Une semaine plus tard (seulement !), le 24 mai 1929, Cartan envoie son projet de **Notice historique sur le parallélisme absolu**.
- Trois mois plus tard, le 25 août 1929, s'excusant pour son long silence causé par de nouveaux doutes sur la légitimité d'appliquer cette théorie à la physique, Einstein propose de publier plutôt dans les *Mathematische Annalen*,

weil einstweilen nur die mathematischen Zusammenhänge untersucht werden, nicht aber deren Anwendung auf die Physik.

- Einstein s'est toujours plaint de la lenteur (déjà légendaire en 1930) des publications dans les revues de mathématiques :

P.S. [10-I-30] Es ist merkwürdig, dass die *Mathematische Annalen* eine so schreckliche Verstopfung haben, dass sie in so vielen Monaten nicht ausscheinden, was sie zu sich genommen haben.

Les 22 équations d'Einstein

- **Rappel :** système de 4 champs de vecteurs linéairement indépendants

$$\mathbf{e}_s = h_s^\nu \frac{\partial}{\partial x^\nu}, \quad 1 \leq s \leq 4,$$

dont un système complet d'invariants fondamentaux est constitué par les composantes $\Lambda_{\alpha\beta}^\mu$ du tenseur de torsion ainsi que de toutes ses dérivées covariantes $\Lambda_{\alpha\beta;\gamma_1}^\mu, \Lambda_{\alpha\beta;\gamma_1;\gamma_2}^\mu, \dots$

- **Comptage initial :** Il y a en tout $4 \times 6 = 24$ quantités $\Lambda_{\alpha\beta}^\mu$, tandis que les h_s^ν sont seulement au nombre de 16. Avant même de chercher à synthétiser des équations unitaires, il faut donc comprendre les relations algébriques abstraites et générales qui lient les $\Lambda_{\alpha,\beta}^\mu$. C'est le **point de vue du démiurge**, comme l'écrivit Cartan à Einstein le 3 décembre 1912 : Einstein physicien revêt temporairement la robe algébriste.

- **Objectif principal :** inventer un système covariant d'équations aux dérivées partielles unifiant la fois la relativité générale et l'électromagnétisme.
- **Sous-objectif :** comprendre les identités algébriques que doivent satisfaire les composantes de torsion.
- **Paradoxe :** la physique semble disparaître, le problème revenant à une simple question d'algèbre différentielle ?

• Einstein à l'IHP en novembre 1929 :

Mon point de départ a été constitué par les identités auxquelles satisfont les grandeurs $\Lambda_{\alpha\beta}^\mu$. D'une façon générale, la recherche de certaines identités peut être d'un grand secours pour le choix des équations du champ, en nous suggérant des formes possibles pour les relations cherchées. L'étude de ces identités doit donc logiquement précéder le choix du système d'équations.

• Comment Einstein dérive-t-il ses équations ?

- Le parallélisme étant absolu, la courbure riemannienne est identiquement nulle, donc les coefficients de Christoffel $\Delta_{\chi\lambda}^\nu$ de la connexion satisfont :

$$0 \equiv \Delta_{\chi\lambda,\mu}^\nu - \Delta_{\chi\mu,\lambda}^\nu - \Delta_{\sigma\lambda}^\nu \cdot \Delta_{\chi\mu}^\sigma + \Delta_{\sigma\mu}^\nu \cdot \Delta_{\chi\lambda}^\sigma.$$

- Afin de faire intervenir le tenseur de torsion, on permute circulairement les indices χ, λ, μ , on somme et on fait apparaître les dérivations covariantes :

$$0 = \Lambda_{\chi\lambda;\mu}^\nu + \Lambda_{\lambda\mu;\chi}^\nu + \Lambda_{\mu\chi;\lambda}^\nu + (\Lambda_{\chi\alpha}^\nu \Lambda_{\lambda\mu}^\alpha + \Lambda_{\lambda\alpha}^\nu \Lambda_{\mu\chi}^\alpha + \Lambda_{\mu\alpha}^\nu \Lambda_{\chi\lambda}^\alpha)$$

- Soulever (ou abaisser) les indices grâce au tenseur métrique :

$$\Lambda_{\underline{\mu}\underline{\nu}}^\alpha := \Lambda_{\sigma\tau}^\alpha g^{\mu\sigma} g^{\nu\tau}.$$

- Appliquer à ce tenseur $T := \Lambda_{\underline{\mu}\underline{\nu}}^\alpha$ la formule de permutation des dérivées covariantes :

$$T_{;\nu;\alpha} - T_{;\alpha;\nu} = -T_{;\sigma} \Lambda_{\nu\alpha}^\sigma$$

(avec les mêmes indices α et ν) ce qui donne :

$$\Lambda_{\underline{\mu}\underline{\nu};\nu;\alpha}^\alpha - \Lambda_{\underline{\mu}\underline{\nu};\alpha;\nu}^\alpha = -\Lambda_{\underline{\mu}\underline{\nu};\sigma}^\alpha \Lambda_{\nu\alpha}^\sigma.$$

Ensuite, grâce à la formule de dérivation d'un produit $(T \cdot S)_{;\sigma} = T_{;\sigma} \cdot S_{;\sigma} + T \cdot S_{;\sigma}$, on réexprime le membre de droite :

$$= -(\Lambda_{\underline{\mu}\underline{\nu}}^\alpha \Lambda_{\nu\alpha}^\sigma)_{;\sigma} + \Lambda_{\underline{\mu}\underline{\nu}}^\alpha \Lambda_{\nu\alpha;\sigma}^\sigma$$

et on change les indices muets σ , α et ν du premier de ces deux derniers termes en α , σ et τ , ce qui donne :

$$= - \left(\Lambda_{\underline{\mu}\underline{\tau}}^{\sigma} \Lambda_{\tau\sigma}^{\alpha} \right)_{;\alpha} + \Lambda_{\underline{\mu}\underline{\nu}}^{\alpha} \Lambda_{\nu\alpha;\sigma}^{\sigma}.$$

On place les quatre termes dans le membre de gauche et on met en facteur la dérivée covariante $(\cdot)_{;\alpha}$:

$$\left(\Lambda_{\underline{\mu}\underline{\nu};\nu}^{\alpha} - \Lambda_{\underline{\mu}\underline{\tau}}^{\sigma} \Lambda_{\sigma\tau}^{\alpha} \right)_{;\alpha} - \Lambda_{\underline{\mu}\underline{\nu};\alpha;\nu}^{\alpha} - \Lambda_{\underline{\mu}\underline{\nu}}^{\alpha} \Lambda_{\nu\alpha;\sigma}^{\sigma} \equiv 0.$$

Les 22 Équations d'Einstein :

$$16 \quad 0 = G^{\mu\alpha} := \Lambda_{\underline{\mu}\underline{\nu}}^{\alpha} - \Lambda_{\underline{\mu}\underline{\tau}}^{\sigma} \Lambda_{\sigma\tau}^{\alpha} = 0$$

$$6 \quad 0 = F^{\mu\nu} := \Lambda_{\underline{\mu}\underline{\nu};\alpha}^{\alpha}$$

satisfont les 4 identités :

$$0 \equiv G^{\mu\alpha}_{;\alpha} - F^{\mu\alpha}_{;\alpha} - \Lambda_{\underline{\mu}\underline{\nu}}^{\alpha} F_{\nu\alpha}$$

.

- **Arguments (cuisine spéculative) d'Einstein :** Les équations les plus simples :

$$\Lambda_{\mu\nu}^{\alpha} = 0$$

sont trop restrictives : elles équivalent à dire que l'espace est euclidien, et de plus *elles ne contiennent que des dérivées premières des h_s^ν* .

- Les mêmes équations, dérivées une fois :

$$\Lambda_{\mu\nu;\sigma}^{\alpha} = 0$$

sont presque équivalentes aux précédentes, et elles suggèrent d'annuler toutes les divergences possibles qu'on peut former à partir de $\Lambda_{\mu\nu;\sigma}^{\alpha}$: soit

$$6 \quad 0 = \Lambda_{\mu\nu;\alpha}^{\alpha}$$

soit

$$16 \quad 0 = \Lambda_{\mu\nu;\nu}^{\alpha}.$$

- Par un argument intuitif mystérieux (qui n'est pas soutenu par une spéculation rigoureuse), Einstein est conduit à rejeter ces équations et à sélectionner les **22** équations écrites dans l'encadré, qui ne sont autres que certaines combinaisons linéaires des **6 + 16** équations obtenues ci-dessus.
- Du point de vue de l'analyse épistémologique, on assiste à une tentative d'imitation de la stratégie gagnante qui avait conduit à l'élaboration des équations de la relativité générale.
- **Relations de compatibilité** : Einstein considère que, à un changement de coordonnées près, il y a **$16 - 4 = 12$** quantités inconnues h_s^{ν} indépendantes, parce que l'on peut normaliser :

$$h_{14} = h_{24} = h_{34} = 0, \quad h_{44} = 1.$$

Or, pour être compatibles, les **22** équations satisfaites par **12** doivent être liées par **$22 - 12 = 10$** identités algébriques indépendantes, et comme **4** sont déjà connues, il faut en trouver encore **6**.

- Einstein en trouve **6 de plus**, comme il le souhaitait.

? Contribution de Cartan ?

Anticipation. Après une correspondance soutenue et concentrée dans le temps, Cartan en appliquant sa théorie des systèmes en involution montre qu'il fallait en vérité s'attendre à **12** > 10 identités algébriques indépendantes et fait découvrir à Einstein les 2 identités supplémentaires.

Théorème de Cauchy-Kowalewsky

- Systèmes d'ordre 1 : existence et unicité
- Exemple : systèmes d'équations différentielles ordinaires : $t \in \mathbb{R}$ variable temps et $u = (u^1, \dots, u^m) \in \mathbb{R}^m$ inconnues :

$$\begin{cases} \frac{\partial u}{\partial t} = \text{Fonction}(t, u) \\ u(0) = u_0 \end{cases}$$

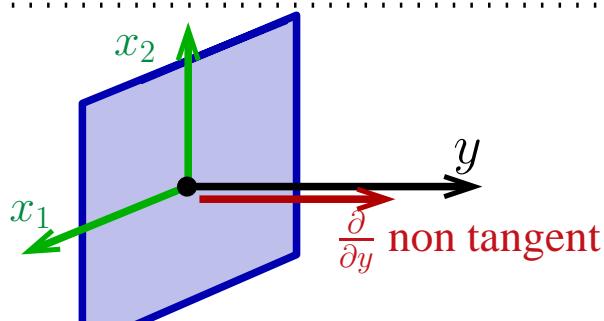
- Deuxième exemple : systèmes d'équations différentielles ordinaires avec paramètre $\lambda = (\lambda_1, \dots, \lambda_r) \in \mathbb{R}^r$:

$$\begin{cases} \frac{\partial u}{\partial t} = \text{Fonction}(t, u; \lambda) \\ u(0) = u_0(\lambda) \end{cases}$$

- Cauchy-Kowalewsky :

- variables indépendantes : $(x^1, \dots, x^n) \in \mathbb{R}^n$ et $y \in \mathbb{R}$.
- variables dépendantes : $(u^1, \dots, u^m) \in \mathbb{R}^m$.

$$\begin{cases} \frac{\partial u}{\partial y} = \text{Fonction analytique}(x, y, u, \underline{u}_x) \\ u(x, 0) = \varphi(x) \end{cases}$$



Théorie des systèmes en involution

- Article de synthèse de Cartan : Bull. Soc. Math. France **59** (1931), 88–118, paru après les échanges de lettres avec Einstein.
- Exposé de la théorie sans utiliser le langage des formes différentielles.
- Deux variables indépendantes : $(x, y) \in \mathbb{R}^2$.
- m variables dépendantes : $(u^1, \dots, u^m) \in \mathbb{R}^m$.
- Notation abrégée :

$$u_{\color{red}x}^i := \frac{\partial u^i}{\partial \color{red}x} \quad u_{\color{red}y}^i := \frac{\partial u_x^i}{\partial \color{red}y}$$

- Système de \mathbf{r} équations linéaires aux dérivées partielles d'ordre 1 :

$$\left\{ \begin{array}{l} 0 = \sum_{1 \leqslant k \leqslant m} a_k^1 u_x^k + \sum_{1 \leqslant k \leqslant m} b_k^1 u_y^k + c^1 \\ \dots \dots \dots \dots \dots \dots \\ 0 = \sum_{1 \leqslant k \leqslant m} a_k^{\mathbf{r}} u_x^k + \sum_{1 \leqslant k \leqslant m} b_k^{\mathbf{r}} u_y^k + c^{\mathbf{r}} \end{array} \right.$$

- Réécrire matriciellement :

$$0 = a u_x + b u_y + c$$

- Cas particulier : maximalement résoluble par rapport à u_y , c'est-à-dire :

$$\text{rang matrice } (b_k^i) = \mathbf{r} = \text{nombre d'équations}$$

- Renuméroter et découper les fonctions inconnues :

$$(u', u'') := (u^1, \dots, u^{\mathbf{r}}, u^{\mathbf{r}+1}, \dots, u^m)$$

- Réécrire le système :

$$0 = a u_x + b' u'_y + b'' u''_y + c$$

- La matrice b' devant \underline{u}'_y est inversible donc on peut résoudre par rapport à \underline{u}'_y :

$$\begin{aligned} \underline{u}'_y &= F(x, y, \underline{u}_x, \underline{u}''_y) \\ &= F(x, y, \underline{u}'_x, \underline{u}''_x, \underline{u}''_y) \end{aligned}$$

- Pour pouvoir appliquer le théorème de Cauchy-Kowalewsky, il faudrait considérer comme étant fonctions inconnues seulement celles qui sont dans le membre de gauche, à savoir les r fonctions \underline{u}'_y . Donc on oublie les $n - r$ fonctions restantes \underline{u}'' , ou plutôt, **on choisit arbitrairement ces fonctions $\underline{u}'' = \underline{u}''(x, y)$** et ensuite **on les oublie** en considérant qu'elles sont incorporées dans les premiers arguments (x, y) de la fonction F , ce qui donne :

$$\underline{u}'_y = G(x, y, \underline{u}'_x),$$

et ainsi, le théorème de Cauchy-Kowalewsky s'applique à \underline{u}' .

- **Résumé** : Si le rang de la matrice (b_k^i) est égal au nombre r d'équations, la solution générale du système dépend de :
 - r fonctions de **1** variable $\varphi_1(x), \dots, \varphi_r(x)$;
 - $n - r$ fonctions de **2** variables $u^{r+1}(x, y), \dots, u^m(x, y)$.

- **Cas général** :

$$\text{rang matrice } (b_k^i) = r - \cancel{r_1} \leqslant r = \text{nombre d'équations}$$

- **Généricité** : on demande que ce rang soit localement maximal, c'est-à-dire qu'on se place au voisinage d'un point générique et on suppose que ce rang reste constant quand on fait agir des changements de coordonnées linéaires de la forme : $(x, y) \mapsto (x, y + \lambda x)$.

- **Découpage de coordonnées** :

$$u = \begin{pmatrix} u' & u'' & u''' \end{pmatrix}$$

A diagram showing the decomposition of a vector u into three components. The vector u is at the top. Below it is a green arrow labeled r_1 pointing right. Below that is a green arrow labeled $r - r_1$ pointing right. Below that is a green arrow labeled m pointing right.

- **Forme du système après simplification :**

$$r \begin{cases} r_1 [0 = X' := u'_x + a_2 u''_x + a_3 u'''_x + \mathcal{R} \\ r_1 [0 = Y' := u'_y + 0 + b_3 u'''_y + \mathcal{R} u_x + \mathcal{R} \\ r - 2r_1 [0 = Y'' := 0 + u''_y + c_3 u'''_y + \mathcal{R} u_x + \mathcal{R} \end{cases}$$

- La généricté implique que les lignes de la matrice :

$$\begin{pmatrix} 1 & a_2 & a_3 \end{pmatrix}$$

sont combinaisons linéaires des lignes de la matrice :

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & b_3 \\ 0 & 1 & c_3 \end{pmatrix}$$

- **Conditions de compatibilité nécessaires :** effectuer la différentiation croisée et simplifier en utilisant les équations $X' = 0$, $Y' = 0$ et $Y'' = 0$ ainsi que les équations $\frac{\partial X'}{\partial x} = 0$:

$$\begin{aligned} 0 &\equiv \frac{\partial X'}{\partial y} - \frac{\partial Y'}{\partial x} \\ &\equiv \Theta(x, y, u''_x, u'''_x, u''_y, u''_{xx}, u'''_{xx}) \end{aligned}$$

- **Définition :** Le système est **en involution** si les r_1 expressions :

$$\Theta_i := \frac{\partial X'_i}{\partial y} - \frac{\partial Y'_i}{\partial x}$$

$(1 \leq i \leq r_1)$ réduites en tenant compte des équations du système, sont identiquement nulles quand on regarde les arguments de Θ comme des variables indépendantes.

Involution \equiv système compatible

Théorème. Si le système est en involution, il possède des solutions analytiques par application du théorème de Cauchy-Kowalewsky.

- **Premier cas :** $m > r - r_1$: on fixe arbitrairement les $m - r + r_1$ fonctions u''' de 2 variables, on résout d'abord le sous-système formé des deux dernières familles d'équations $u'_y = \dots, u''_y = \dots$ et ensuite, la première famille d'équations $0 = X'$ est automatiquement satisfaite grâce aux conditions de compatibilité $\Theta = 0$.
- **Deuxième cas :** $m = r - r_1$: il n'y a plus de fonctions u''' arbitraires de deux variables, et d'après Cauchy-Kowalewsky, les deux dernières familles d'équations $u_y = \dots$ déterminent complètement la solution u dès que $u(x, 0)$ est choisi, mais la première famille d'équations :

$$u'_x = -a_2 u''_x - \mathcal{R},$$

restreinte à $\{(x, 0)\}$ impose que seule les $m - r_1$ fonctions $u''_x(x, 0)$ de 1 variable sont quelconques.

Degré d'arbitraire de la solution :

$$\begin{array}{ccc} m - r_1 & \geqslant & m - r + r_1 \\ \text{fonctions de} & & \text{fonctions de} \\ 1 \text{ variable} & & 2 \text{ variables} \end{array}$$

- **Définition :** Le système **détermine** les fonctions inconnues si $m = r - r_1$.

Résumé. Pour qu'un système à deux variables (x, y) soit en involution et qu'il **détermine** les fonctions inconnues, il faut :

- que les équations du système soient résolubles par rapport aux m dérivées $\frac{\partial u^k}{\partial y}$;
- qu'il existe entre les dérivées des premiers membres exactement $r_1 = r - m$ identités de compatibilité linéairement indépendantes.

Passage à trois variables

- Trois variables indépendantes : $(x, y, z) \in \mathbb{R}^3$.
- m variables dépendantes : $(u^1, \dots, u^m) \in \mathbb{R}^m$.

• Forme du système après simplification :

$$u = \begin{pmatrix} u' & u'' & u''' & u'''' \end{pmatrix}$$

$\xrightarrow{r_1}$

$\xrightarrow{r_2 - r_1}$

$\xrightarrow{r - r_2}$

\xrightarrow{m}

$$\left[\begin{array}{l} r_1 [\quad 0 = X' := u'_x + \lambda u''_x + \lambda u'''_x + \lambda u''''_x + \mathcal{R} \\ \quad 0 = Y' := u'_y + 0 + \lambda u''_y + \lambda u'''_y + \mathcal{R} u_x + \mathcal{R} \\ \quad 0 = Y'' := 0 + u''_y + \lambda u'''_y + \lambda u''''_y + \mathcal{R} u_x + \mathcal{R} \\ r_2 - r_1 [\quad 0 = Z' := u'_z + 0 + 0 + \lambda u''''_z + \mathcal{R} u_x + \mathcal{R} u_y + \mathcal{R} \\ \quad 0 = Z'' := 0 + u''_z + 0 + \lambda u''''_z + \mathcal{R} u_x + \mathcal{R} u_y + \mathcal{R} \\ \quad 0 = Z''' := 0 + 0 + u''''_z + \lambda u''''_z + \mathcal{R} u_x + \mathcal{R} u_y + \mathcal{R} \end{array} \right]$$

	u'_x	$\equiv 0$
-	u'_y	$\equiv 0$
	u''_y	$\equiv 0$
-	u'_z	$\equiv 0$
	u''_z	$\equiv 0$
	u'''_z	$\equiv 0$

u'_x
 u'_y
 u''_y
 u'_z
 u''_z
 u'''_z

4 variables physiques

- Trois variables indépendantes : $(x, y, z, t) \in \mathbb{R}^4$.
- m variables dépendantes : $(u^1, \dots, u^m) \in \mathbb{R}^m$.

Degré d'arbitraire de la solution :

$$\begin{array}{ccccccccc} m - r_1 & \geqslant & m - r_2 + r_1 & \geqslant & m - r_3 + r_2 & \geqslant & m - r + r_1 \\ \text{fonctions de} & & & & & & \text{fonctions de} \\ 1 \text{ variable} & & 2 \text{ variables} & & 3 \text{ variables} & & 4 \text{ variables} \end{array}$$

Le dernier entier non nul de cette suite décroissante donne le nombre de fonctions arbitraires de k variables dont dépend la solution générale d'un système en involution.

- **Définition :** Le système est **déterminé** si

$$m - r + r_3 = 0.$$

- **Définition :** Le système est **en involution** s'il y a

$$r_1 + r_2 + r_3$$

conditions de compatibilité indépendantes entre les équations.

Applications aux espaces à parallélisme absolu

- **Première application du théorème de Cartan :** avant d'ajouter certaines équations physiques, il faut comprendre le système mathématique d'EDP dont les solutions sont les espaces à parallélisme absolu $e_s = h_s^\alpha \frac{\partial}{\partial x^\alpha}$ doués de torsion.

Le tenseur de torsion $\Lambda_{\alpha\beta}^s$ est défini par les **24** équations :

$$(\mathcal{H}_{s\alpha\beta}) \quad 0 = h_{s\alpha,\beta} - h_{s\beta,\alpha} - \Lambda_{\alpha\beta}^s$$

avec $1 \leq \alpha < \beta \leq 4$ et $1 \leq s \leq 4$.

L'élimination des quantités fondamentales h conduit aux **16** identités de type Bianchi :

$$(\mathcal{L}_{\alpha\beta\gamma}^s) \quad 0 = \Lambda_{\alpha\beta,\gamma}^s + \Lambda_{\beta\gamma,\alpha}^s + \Lambda_{\gamma\alpha,\beta}^s,$$

avec $1 \leq \alpha < \beta < \gamma$ et $1 \leq s \leq 4$. Si, dans cette dernière équation, on réexprime les dérivées d'ordre 1 des coefficients de torsion en fonction des h_s^α , on obtient un système de 16 EDP du second ordre en les h_s^α .

- Oublier le parallélisme absolu et envisager les **24 + 16** équations $\mathcal{H}_{s\alpha\beta}$ et $\mathcal{L}_{\alpha\beta\gamma}^s$ comme un système de **40** EDP d'ordre 1 en les **16 + 24** fonctions inconnues h_s^α et Λ_α^β .

- Ce système satisfait les **16 + 4 = 20** relations de compatibilité linéairement indépendantes :

$$(*) \quad \begin{cases} 0 \equiv (\mathcal{H}_{s\alpha\beta}),_\gamma + (\mathcal{H}_{s\beta\gamma}),_\alpha + (\mathcal{H}_{s\gamma\alpha}),_\beta + (\mathcal{L}_{\alpha\beta\gamma}^s),_\alpha \\ 0 \equiv (\mathcal{L}_{\alpha\beta\gamma}^s),_\delta - (\mathcal{L}_{\alpha\beta\delta}^s),_\gamma + (\mathcal{L}_{\alpha\gamma\delta}^s),_\beta - (\mathcal{L}_{\beta\gamma\delta}^s),_\alpha \end{cases}$$

où $s = 1, 2, 3, 4$ et $1 \leq \alpha < \beta < \gamma \leq 4$ dans les premières et où, dans les secondes, $(\alpha, \beta, \gamma, \delta)$ forment une permutation circulaire de $(1, 2, 3, 4)$.

- **Appliquer le théorème de Cartan.**

Anticipation : les solutions ne sont autres que les **16** fonctions h_s^α de **4** variables.

- **Question :** quels sont les entiers

$$r', \quad r'_3, \quad r'_2, \quad r'_1$$

de ce système ?

- **Observation :** les équations sont résolubles pour les dérivées prises par rapport à x^4 des **12 + 12 = 24** fonctions suivantes :

$$h_{s\alpha,4} = h_{s4,\alpha} + \Lambda_{\alpha 4}^s \quad s = 1, 2, 3, 4 ; \alpha = 1, 2, 3$$

$$\Lambda_{\alpha\beta,4}^s = -\Lambda_{\beta 4,\alpha}^s - \Lambda_{4\alpha,\beta}^s \quad s = 1, 2, 3, 4 ; \beta = 1, 2, 3$$

Il reste donc

$$\begin{aligned} r'_3 &= 40 - 24 \\ &= 16 \end{aligned}$$

équations. On continue et on trouve :

$$r' = 40$$

$$r'_3 = 16$$

$$r'_2 = 4$$

$$r'_1 = 0$$

- **Conclusion :** Ainsi, la somme

$$r'_1 + r'_2 + r'_3 = 0 + 4 + 16$$

est précisément égale au nombre des relations de compatibilité (*), donc **le système est en involution**, et la solution générale dépend de

$$m - r' + r'_3 = 16$$

fonctions de **4** variables.

- **Seconde application du théorème de Cartan :** Supposons qu'on ajoute r nouvelles équations physiques aux équations mathématiques $(\mathcal{H}_{s\alpha\beta})$ et $(\mathcal{L}_{\alpha\beta\gamma}^s)$ et désignons par

$$r_1 + r'_1, \quad r_2 + r'_2, \quad r_3 + r'_3$$

- **Réduction du nombre d'inconnues :** en redressant le champ $\mathbf{e}_4 = \frac{\partial}{\partial x^4}$, on normalise

$$h_{14} = 0, \quad h_{24} = 0, \quad h_{34} = 0, \quad h_{44} = 1,$$

ce qui réduit de 4 unités le nombre de fonctions inconnues.

- Ensuite, on redresse dans le plan $\{x^4 = 0\}$, ce qui donne, dans $\{x^4 = 0\}$:

$$h_{13} = 0, \quad h_{23} = 0, \quad h_{33} = 1, \quad h_{43} = 0,$$

donc on se ramène à

$$40 - 8 = 32$$

fonctions inconnues.

Observation : Ici, je ne comprends pas tout.

Résultat. Pour qu'un système donné soit **en involution** et qu'il **détermine** les fonctions inconnues, il faut et il suffit :

- que les r équations physiques ajoutées aux équations $(\mathcal{H}_{s\alpha\beta})$ et $(\mathcal{L}_{\alpha\beta\gamma}^s)$ soient résolubles par rapport aux 12 dérivées $\Lambda_{\alpha 4, 4}^s$, ce qui donne

$$r - r_3 = 12 ;$$

- qu'il existe entre les dérivées des premiers membres de ces équations exactement

$$r_1 + r_2 + r_3 = r_1 + r_2 + r - 12$$

relations de compatibilité linéairement indépendantes.

Application aux 22 équations d'Einstein

$$\left\{ \begin{array}{ll} \textcolor{red}{6} & (\mathcal{F}_{\alpha\beta}) \quad 0 = \Lambda_{\alpha\beta;\rho}^{\rho} \\ \textcolor{red}{16} & (\mathcal{G}_{\alpha}^{\beta}) \quad 0 = \Lambda_{\alpha\rho;\underline{\rho}}^{\beta} + \Lambda_{\alpha\rho}^{\sigma} \Lambda_{\rho\sigma}^{\beta} \end{array} \right.$$

- Valeurs trouvées pour r_1, r_2, r_3 :

$$\mathbf{r}_1 = 0, \quad \mathbf{r}_2 = 2, \quad \mathbf{r}_3 = 10$$

donc le système est en involution s'il existe

$$r_1 + r_2 + r_3 = 12$$

identités de compatibilité. Cartan trouve ces 12 identités (Einstein n'en avait que 10).

- Cartan découvre un autre système de 22 équations en involution dont la solution générale dépend aussi de 12 fonctions arbitraires de 3 variables.
- Il découvre aussi un système de 15 équations dont la solution générale dépend de 18 fonctions de 3 variables.

Il est probable que les trois systèmes trouvés sont les seuls systèmes en involution indépendants du choix des variables et du choix des repères rectangulaires, qui soient linéaires par rapport aux dérivées covariantes des $\Lambda_{\alpha\beta}^{\gamma}$ et quadratiques par rapport aux $\Lambda_{\alpha\beta}^{\gamma}$, et qui *déterminent* les fonctions inconnues. Mais la discussion de cette question fait intervenir des problèmes d'Algèbre tout à fait étrangers à l'objet de ce Mémoire.

Removable singularities in CR dimension 1

JOËL MERKER

I. Denjoy, Painlevé, Harvey-Polking	4 mn.
II. Removable singularities	20 mn.
III. Global arguments	4 mn.
IV. Localization	6 mn.
V. Arbitrary codimension	6 mn.
VI. A nonremovable example	6 mn.

[**19** diagrams]
[**19** pages]

Survey talk

I. Denjoy, Painlevé, Harvey-Polking

- **Riemann 1851 :** $\mathcal{O}(\Omega \setminus \{p\}) \cap L_{loc}^\infty(\Omega) = \mathcal{O}(\Omega)$.
 - **Painlevé problem, Denjoy's conjecture.**
 - **Calderón, Coifman, McIntosh, Meyer :** the Cauchy transform on Lipschitz curves is L^2 -bounded.
- Theorem.** A closed subset C of a domain Ω of \mathbb{C} that is contained in a rectifiable curve is $(\bar{\partial}, L^\infty)$ -removable if and only if it has zero 1-dimensional Hausdorff measure.
- **Painlevé (still open) problem :** characterize geometrically compact sets $K \subset \mathbb{C}$ that are removable for bounded holomorphic functions.

- Hausdorff measure is not fine enough !
- **Garnett 1970 :** construction of a Cantor set $K \subset \mathbb{C}$ with $H^1(K) > 0$ that is $(\bar{\partial}, L^\infty)$ -removable.
- **Harvey-Polking 1970 :** unification, simplification of the sufficiency $H^1(C) = 0$.

On a domain $\Omega \subset \mathbb{R}^n$, consider a linear differential operator of order $m \geq 1$ having \mathcal{C}^∞ coefficients :

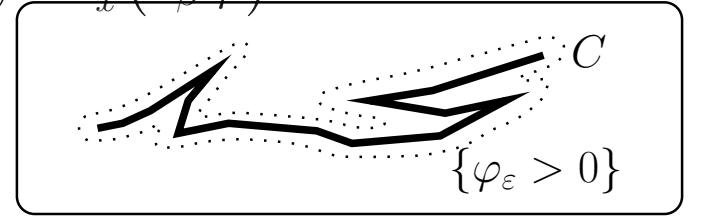
$$P = P(x, \partial_x) = \sum_{\beta \in \mathbb{N}^n, |\beta| \leq m} a_\beta(x) \partial_x^\beta,$$

for instance $\bar{\partial}$ (holomorphic) or $\bar{\partial}_b$ (CR).

Definition. A closed set $C \subset \Omega$ is (P, L_{loc}^p) -removable, $1 \leq p \leq \infty$, if every $f \in L_{loc}^p(\Omega)$ satisfying $Pf = 0$ in $\Omega \setminus C$ does satisfy $Pf = 0$ in all of Ω , in the sense of distributions.

- **Formal adjoint** : $(P\varphi, \psi) = (\varphi, {}^t P\psi)$ for all $\varphi, \psi \in \mathcal{C}_c^\infty(\Omega)$. Immediately :

$${}^t P(\varphi) := \sum_{|\beta| \leq m} (-1)^{|\beta|} \partial_x^\beta (a_\beta \varphi).$$



- **Principle** : small Mass.

$$|(\varphi, {}^t P(\varphi_\varepsilon \psi))| \leq C_\varphi \cdot \text{Mss}(C)$$

Theorem. (i) Let $1 < p < \infty$ and assume that $n - mp' \geq 0$. If $\mathbb{H}^{n-mp'}(K) < \infty$ for every compact set $K \subset C$, then C is (P, L_{loc}^p) -removable.

(ii) Let $p = \infty$ and assume that $n - m \geq 0$. If $\mathbb{H}^{n-m}(C) = 0$, then C is (P, L_{loc}^∞) -removable.

Proof of (i). Let $\varphi \in \mathcal{C}_c^\infty(\Omega)$, set $K := C \cap \text{supp } \varphi$ and set $p' := \frac{p-1}{p}$, so $1 < p' < \infty$.

Lemma. Assume $n - mp' \geq 0$. For every $\varepsilon > 0$, there exists $\varphi_\varepsilon \in \mathcal{C}_c^\infty(\mathbb{R}^n)$ with $\varphi_\varepsilon \equiv 1$ near K and

$$\text{supp } \varphi_\varepsilon \subset K_\varepsilon := \{x : \text{dist}(x, K) < \varepsilon\}$$

such that for all $\beta \in \mathbb{N}^n$ with $|\beta| \leq m$, we have :

$$\|\partial_x^\beta \varphi_\varepsilon\|_{L^{p'}} \leq C \varepsilon^{m-|\beta|} (\mathbb{H}^{n-mp'}(K) + \varepsilon)^{1/p'},$$

where $C > 0$ is independent of ε .

With such cut-off functions φ_ε , since $\text{supp } Pf \subset C$:

$$(Pf, \varphi) = (Pf, \varphi_\varepsilon \varphi) = (f, {}^t P(\varphi_\varepsilon \varphi)).$$

By Hölder's inequality and the preceding lemma :

$$\begin{aligned} |(Pf, \varphi)| &\leq \|f \mathbf{1}_{K_\varepsilon}\|_{L^p} \|{}^t P(\varphi_\varepsilon \varphi)\|_{L^{p'}} \\ &\leq C \|f \mathbf{1}_{K_\varepsilon}\|_{L^p} (\mathbb{H}^{n-mp'}(K) + \varepsilon)^{1/p'}. \end{aligned}$$

The theorem follows from

$$\lim_{\varepsilon \rightarrow 0^+} \|f \mathbf{1}_{K_\varepsilon}\|_{L^p} = 0,$$

since $\mathbb{H}^n(K_\varepsilon) \rightarrow 0$ (remind $\mathbb{H}^{n-mp'}(K) < \infty$). \square

Corollary. If $M \subset \mathbb{C}^n$ is a CR manifold and if $C \subset M$ satisfies $\mathsf{H}^{\dim M-1}(C) = 0$, then

$$L_{loc}^\infty(M) \cap CR(M \setminus C) = L_{loc,CR}^\infty(M).$$

- Without a growth assumption near the singularity, Harvey-Polking's approach fails for L^1 -removability.
- A point in \mathbb{C} is not $(\bar{\partial}, L_{loc}^1)$ -removable : pick $\frac{1}{z}$.

Theorem. A point p on a CR manifold of dimension ≥ 3 is always $(L^1, \bar{\partial}_b)$ -removable.

- **Question :** there is just one exception, which one ?
- **Question :** why is it true ?
- **Answer :** automatic holomorphic extension to larger sets ; Hartogs-Bochner with singularities ; no growth assumption ; extrinsic.

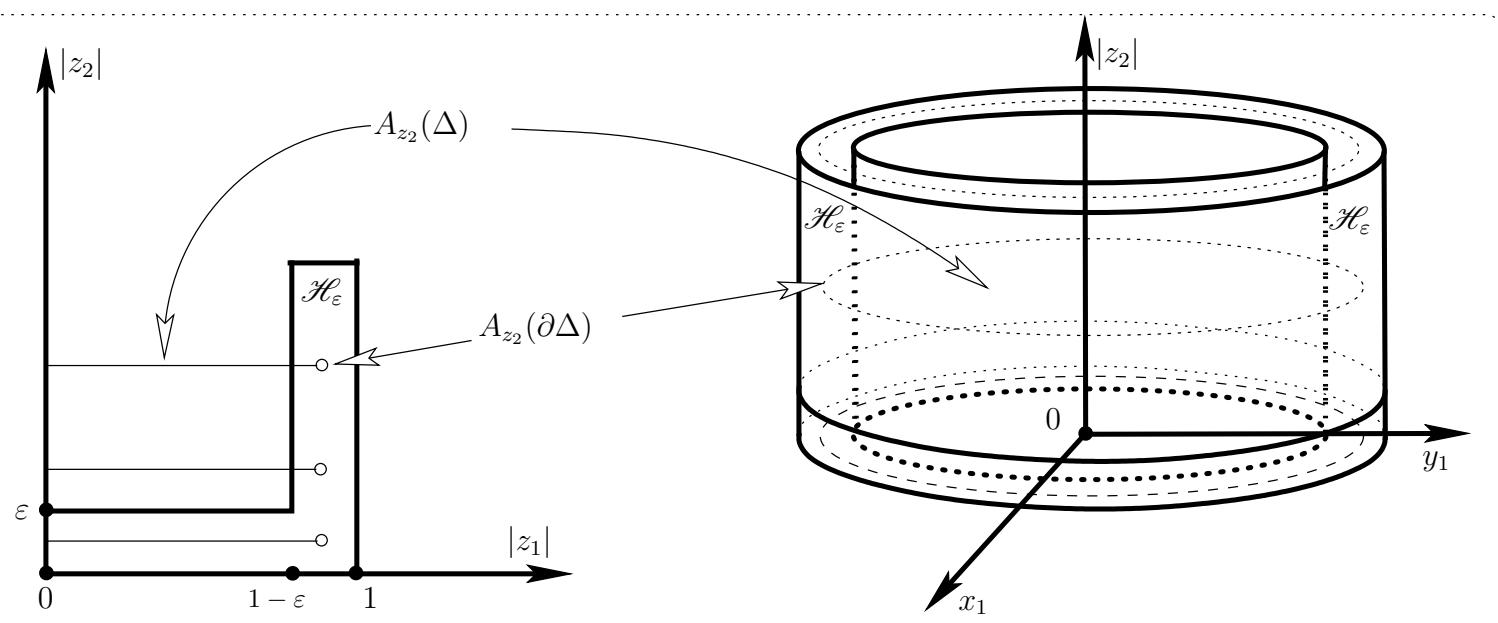
II. CR Removable singularities

Hartogs-Bochner theorem. Let Ω be a bounded domain in \mathbb{C}^n having connected boundary. Then for every neighborhood U of $\partial\Omega$ in \mathbb{C}^n and every holomorphic function $f \in \mathcal{O}(U)$, there exists a function $F \in \mathcal{O}(\overline{\Omega})$ with $F|_{\partial\Omega} = f|_{\partial\Omega}$.

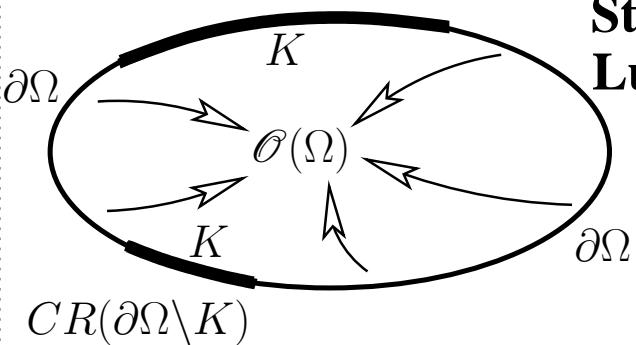
Also true with f only CR on $\partial\Omega$, with $f, \partial\Omega \in \mathcal{C}^1$.

Analytic or geometric proofs :

- Bochner-Martinelli or $\bar{\partial}$ with compact support.
- pushing analytic discs in Hartogs skeletons.



Problem. Characterize compact sets $K \subset \partial\Omega$ such that $\partial\Omega \setminus K$ enjoys the Hartogs-Bochner theorem.



Stout 1981 : $\partial\Omega \in \mathbb{C}^n$ SPC, $n = 2$
Lupaccioli 1994 : $\partial\Omega \in \mathbb{C}^n$ SPC, $n \geq 3$

Tomassini Kytmanov Leiterer Joericke	Rosay Chirka Laurent-Thiébaut Duval	Porten
---	--	----------------------

functional characterization

\neq

Geometric characterization

Ahlfors 1947 : analytic capacity of $K \Subset \mathbb{C}$.

Theorem. A compact set $K \Subset \mathbb{C}$ is removable for $\mathcal{O}(\mathbb{C} \setminus K) \cap L^\infty(\mathbb{C} \setminus K)$ if and only if :

$$0 = \sup \left\{ |f'(\infty)| : f \in H^\infty(\mathbb{C} \setminus K), \|f\|_{L^\infty} \leq 1 \right\},$$

Stout 1981 : holomorphic convexity of $K \Subset \overline{\Omega}$.

Definition. Let $\Omega \Subset \mathbb{C}^n$ be a bounded domain and let $K \subset \overline{\Omega}$ be compact. The $\mathcal{O}(\overline{\Omega})$ -convex hull of K is

$$\widehat{K}_{\mathcal{O}(\overline{\Omega})} := \left\{ z \in \overline{\Omega} : |g(z)| \leq \max_{w \in K} |g(w)|, \forall g \in \mathcal{O}(\overline{\Omega}) \right\}.$$

If $K = \widehat{K}_{\mathcal{O}(\overline{\Omega})}$, then K is called $\mathcal{O}(\overline{\Omega})$ -convex.

Theorem. In complex dimension $n = 2$, a compact subset $K \subset \partial\Omega$ of a \mathcal{C}^2 strongly pseudoconvex boundary $\partial\Omega \Subset \mathbb{C}^2$ is CR-removable if and only if it is $\mathcal{O}(\overline{\Omega})$ -convex.

Commentary : the relatively short proofs do not provide any geometric insight.

Geometrically removable singularities :

no restriction : $1 \leq p \leq \infty$

no growth assumption

Motivation for removable singularities :

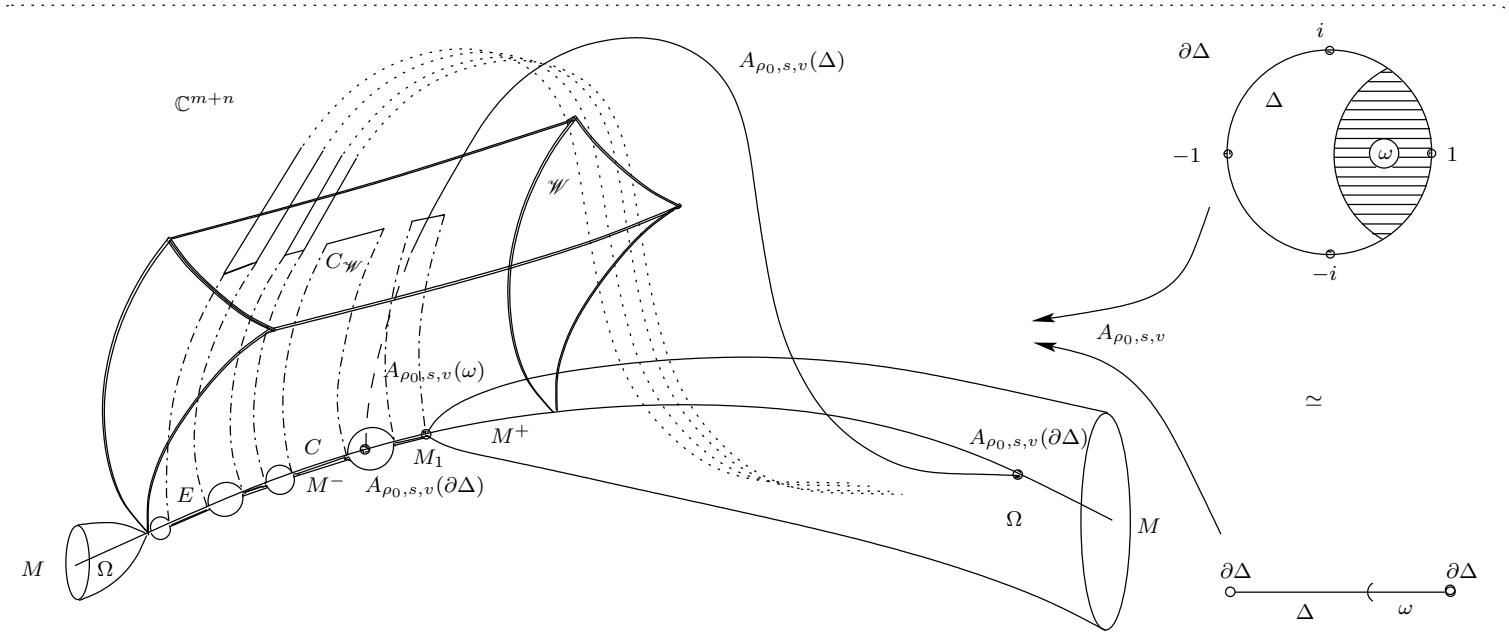
CR-meromorphic functions

Let $M \subset \mathbb{C}^n$ generic $\mathcal{C}^{2,\alpha}$ ($0 < \alpha < 1$) of codimension $d \geq 1$ and of CR dimension $m \geq 1$.

Definition. A closed set $C \subset M$ is :

- **CR-removable** if there exists a wedgelike domain \mathcal{W} attached to M to which every $f \in \mathcal{C}_{CR}^0(M \setminus C)$ extends holomorphically ;
- **\mathcal{W} -removable** if $\mathcal{O}(\mathcal{W}_{M \setminus C}) = \mathcal{O}(\mathcal{W}_M)$;
- **L^p -removable** ($1 \leq p \leq \infty$), if

$$L_{loc}^p(M) \cap CR(M \setminus C) = L_{loc, CR}^p(M).$$



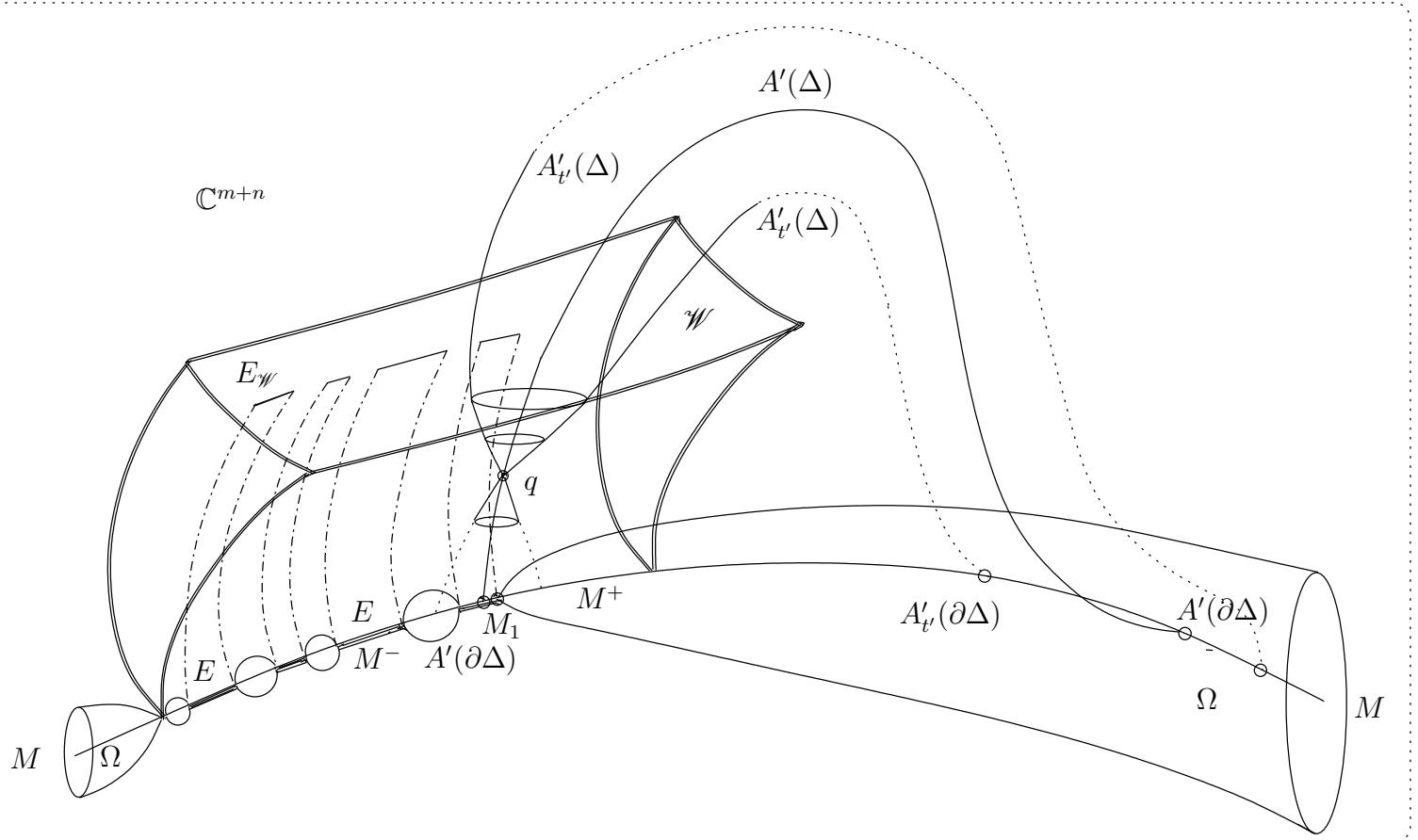
Theorem. (M.-PORTEN, 2002) Suppose $M \subset \mathbb{C}^n$ is globally minimal. Then every closed $C \subset M$ with $M \setminus C$ also globally minimal such that $H^{\dim M - 2}(C) = 0$ is CR-, \mathcal{W} - and L^p -removable.

Definition. CR-meromorphic functions on M ;

- $\mathcal{D}_f \subset M$ dense open, $f : \mathcal{D}_f \rightarrow P_1(\mathbb{C})$ is \mathcal{C}^1 ;
- graph Γ_f in $\mathbb{C}^n \times P_1(\mathbb{C})$ is CR with $d\Gamma_f = 0$.

The *indeterminacy locus* of f is denoted by

$$I_f := \{p \in M : \{p\} \times P_1(\mathbb{C}) \subset \Gamma_f\}.$$



Lemma (SARKIS) I_f is metrically thin and there exists a unique CR measure T_f on $M \setminus I_f$ with $\mathsf{T}_f|_{\mathcal{D}_f}$ coinciding with $f : \mathcal{D}_f \rightarrow P_1(\mathbb{C})$.

Theorem. (M.-PORTEN, 2002) Suppose $M \subset \mathbb{C}^n$ is locally minimal at every point. Then there exists \mathcal{W} attached to M to which every CR-meromorphic function on M extends meromorphically.

Singularities of bigger dimension

Paradigmatic : $\partial\Omega \in \mathbb{C}^2$, SPC, \mathcal{C}^2 , of dimension 3.

Arbitrary codimension : $M \subset \mathbb{C}^n$ generic, $\mathcal{C}^{2,\alpha}$, of CR dimension $m \geq 1$ and of codimension $d \geq 1$.

Distinction : hypersurfaces or higher codimension.

Second major distinction :

$$m \geq 2 \quad \neq \quad m = 1$$

More massive singularities : submanifolds of M .

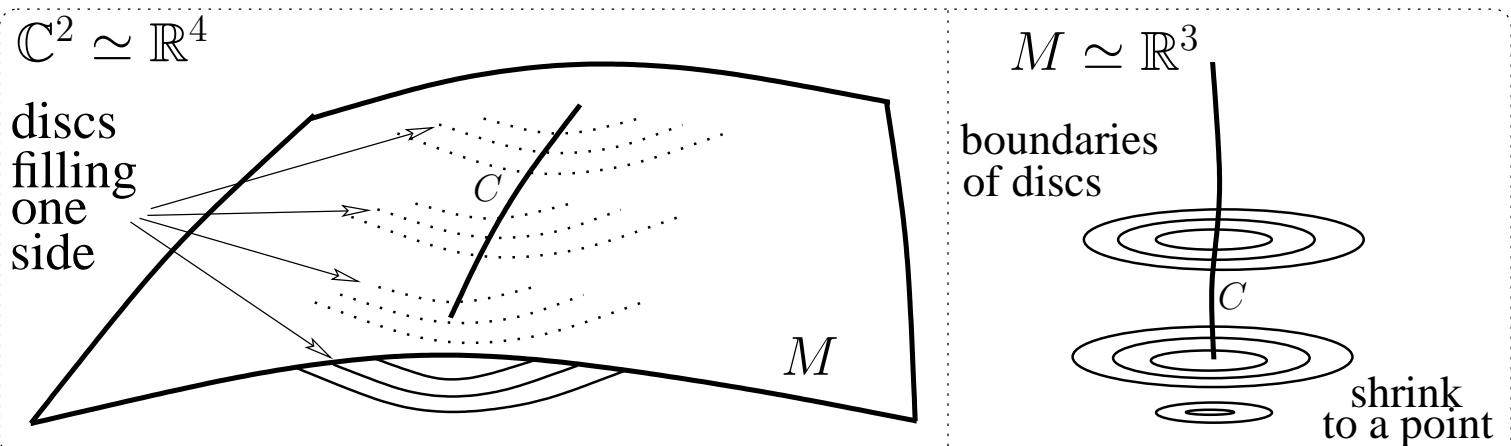
Theorem 6.31. (JÖRICKE, M.) *Let $N \subset M$ be a connected $\mathcal{C}^{2,\alpha}$ submanifold. Assume both M and $M \setminus N$ are globally minimal. A closed set $C \subset N$ is removable if :*

- $m \geq 1$ and $C \neq N$; or if :
- $m \geq 2$ and N is somewhere generic.

Example : $M = \Omega \subset \mathbb{C}^n$ domain.

Idea of proof for $C = \text{Jordan arc in } S^3$:

Bishop discs : [...], Tumanov, Trépreau, Jöricke.



Continuity principle : one-parameter family of analytic discs with boundaries in $M \setminus C$.

Summary :

- $\text{codim } \geq 3$: always removable.
- $H^{\dim M - 2} = 0$: always removable.
- $\text{codim } = 2$: theorem above.
- $\text{codim } = 1$: CR version of Denjoy-Painlevé.

Question : what happens for $m = 1, d \geq 2$?

	$\text{codim}_M = 2^{+0}$	$\text{codim}_M = 2$	$\text{codim}_M = 1$
$m \geq 2$	OK	OK	OK
$m = 1, d = 1$	OK	OK	OK *
$m = 1, d \geq 2$	OK	OK	New

Firstly, survey : OK *.

Data : $\Omega \Subset \mathbb{C}^2$, SPC, $\partial\Omega \in \mathcal{C}^2$

Example : $\Omega = \mathbb{B}_2$, $\partial\Omega = S^3$.

Secondly, present : New.

Milnor link : $P = P(z_1, z_2)$ holomorphic homogeneous polynomial having isolated singularity at 0.

$$N := S^3 \cap \{P = 0\}.$$

Stolzenberg ; Harvey-Lawson ; Stout : let $\partial\Omega \Subset \mathbb{C}^2$ strongly pseudoconvex \mathcal{C}^2 boundary.

Model : $\Omega = \mathbb{B}_2$ and $\partial\Omega = S^3$.

Theorem. Let $N \subset \partial\Omega$ be a closed \mathcal{C}^1 curve. FCAE :

- (i) N is nonremovable ;
- (ii) N bounds a complex curve $\Sigma \subset \Omega$;
- (iii) N is not $\mathcal{O}(\overline{\Omega})$ -convex ;
- (iv) $\int_N \omega = 0$ for every 1-form $\omega = \sum_{k=1}^n \omega_k(z) dz_k$ having entire coefficients $\omega_k \in \mathcal{O}(\mathbb{C}^n)$.

Conclusion : infinitely many $N \subset S^3$ of codimension 2 already *not removable*.

Question : are singularities of codimension 1 in S^3 too massive to be removable ?

Jöricke 1988 : outstanding disc theorem :

Theorem. Let $\partial\Omega \Subset \mathbb{C}^2$ be strongly pseudoconvex \mathcal{C}^2 and let $M^1 \subset \partial\Omega$ be a \mathcal{C}^2 submanifold :

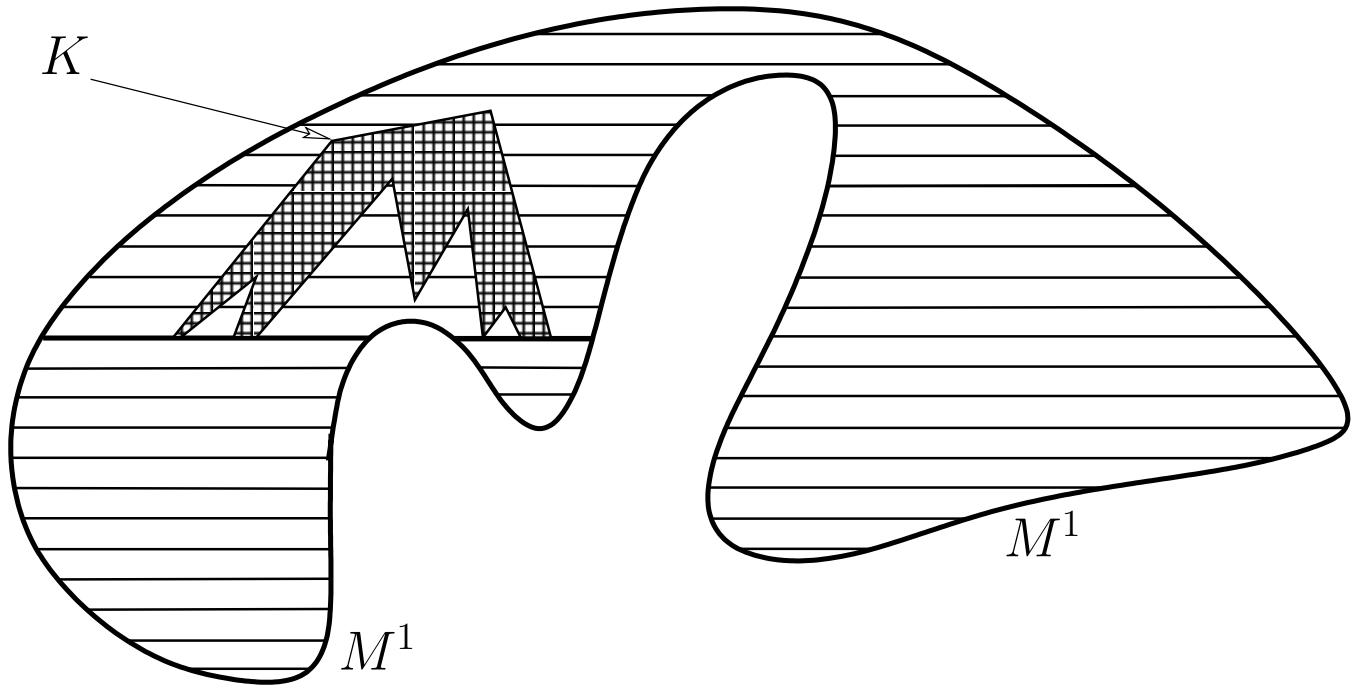
- $\text{codim}_{\partial\Omega}(M^1) = 1$;
- M^1 is totally real at every point ;
- M^1 is diffeomorphic to a real 2-disc.

Then every compact set $K \subset M^1$ is removable.

Characteristic foliation : line bundle

$$p \longmapsto T_p^c M \cap T_p M^1$$

Poincaré-Bendixson : no singularity, no limit cycle inside : curves entering the disc M^1 must exit.



$\mathcal{F}_{M^1}^c\{K\}$: for every subcompact $K' \subset K$, there exists a characteristic segment $\gamma : [-1, 1] \rightarrow M^1$ with $\gamma(-1) \notin K'$, $\gamma(0) \in K'$, $\gamma(1) \notin K'$, such that K' lies entirely in one side of $\gamma[-1, 1]$.

Duval 1992 : surface $M^1 \subset \partial\Omega \in \mathbb{C}^2$, with $\partial\Omega$ SPC.

Theorem. *The Essential polynomial hull* (e.g. a disc boundary) *must cross* $\mathcal{F}_{M^1}^c\{K\}$ *everywhere.*

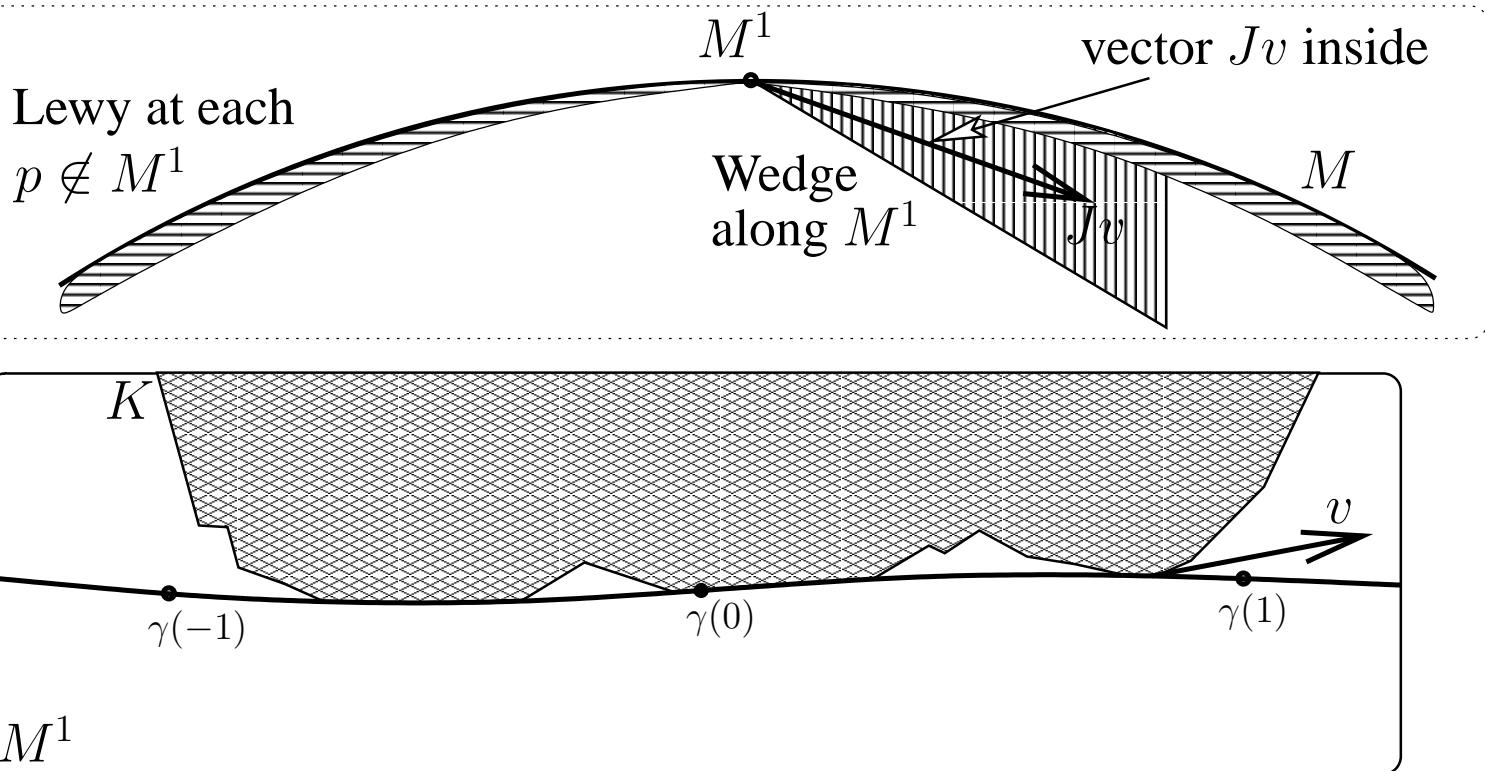
Topological observation : a connected boundary $\simeq S^1 \subset \partial\Omega \in \mathbb{C}^2$ of a Riemann surface can be thickened as a 2-torus, but *not* as a 2-disc, if totally real.

III. Global arguments

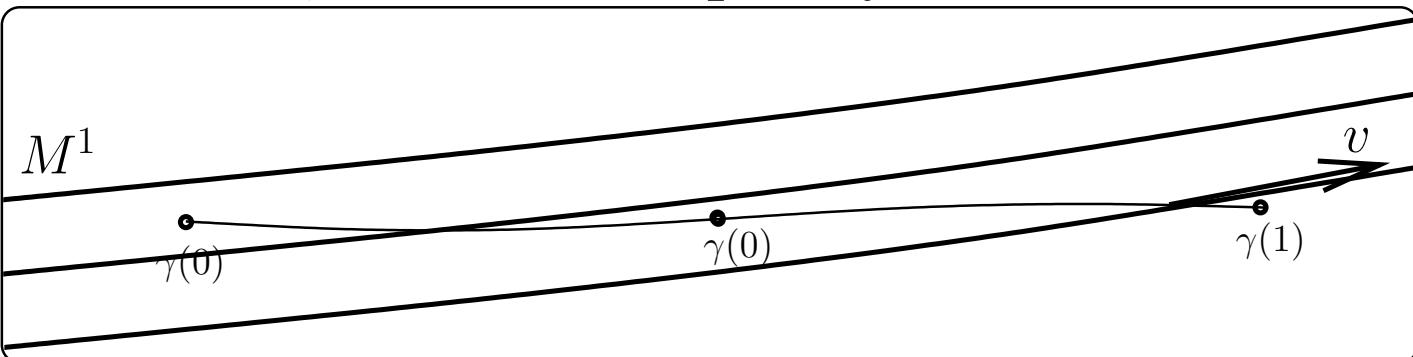
Main goals (IV) :

- remove SPC assumption
- localize the disc construction
- pass to arbitrary codimension

With $M = \partial\Omega \in \mathbb{C}^2$ SPC :



Real analytic case : complexify a chosen foliation.



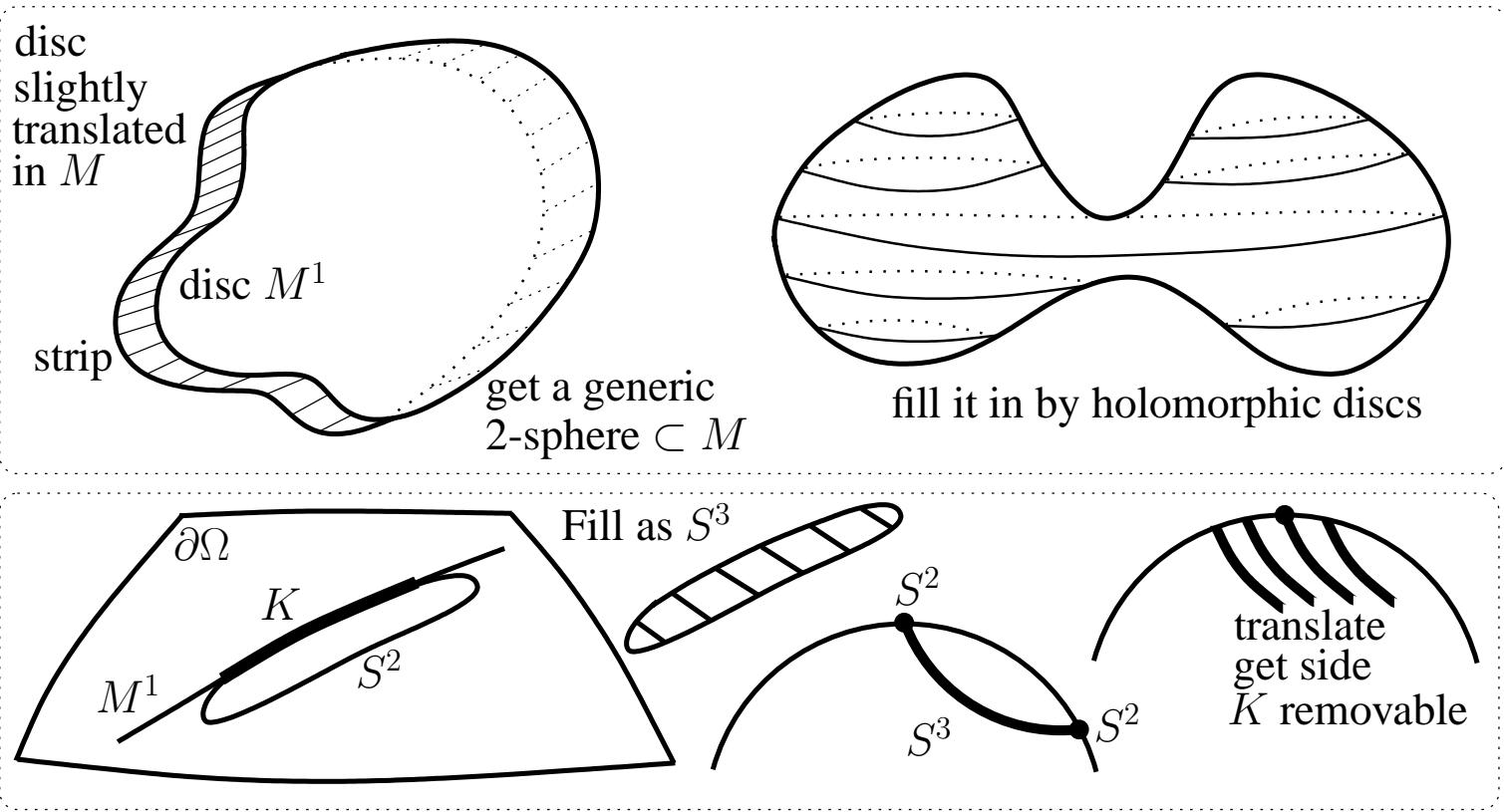
Global continuity principle (Jöricke 1988).
 \mathcal{C}^2 case : approximation argument. □

Other proofs of Jöricke's disc theorem :

Forstnerič-Stout 1991 : Bedford-Klingenberg-Kruzhilin filling of (generic) 2-spheres.

Porten 2003 : no pseudoconvexity assumption.

Theorem. Let $M \subset \mathbb{C}^2$ be \mathcal{C}^∞ , globally minimal, let $M^1 \subset M$ be \mathcal{C}^∞ , maximally real, diffeomorphic a real 2-disc. Then every compact set $K \subset M^1$ is removable.



Fornæss-Ma 1995 : example of $S^2 \subset \mathbb{C}^2$ not contained in SPC $\partial\Omega$ and *not* fillable.

Trick : M^1 totally real has a Stein nbd basis.

Ślapar 2004 : surfaces having *flat* hyperbolic complex tangencies.

IV. Localization

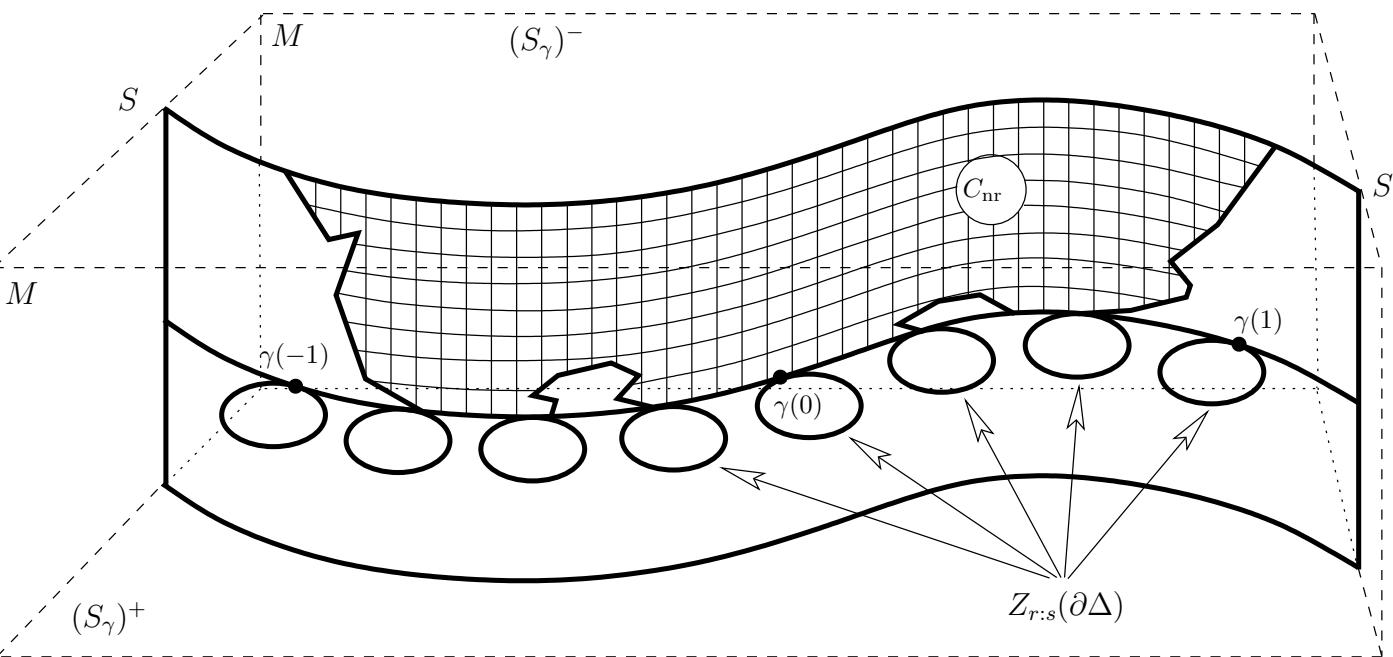
Motivation : passage to higher codimension.

- **Reason by contradiction.**

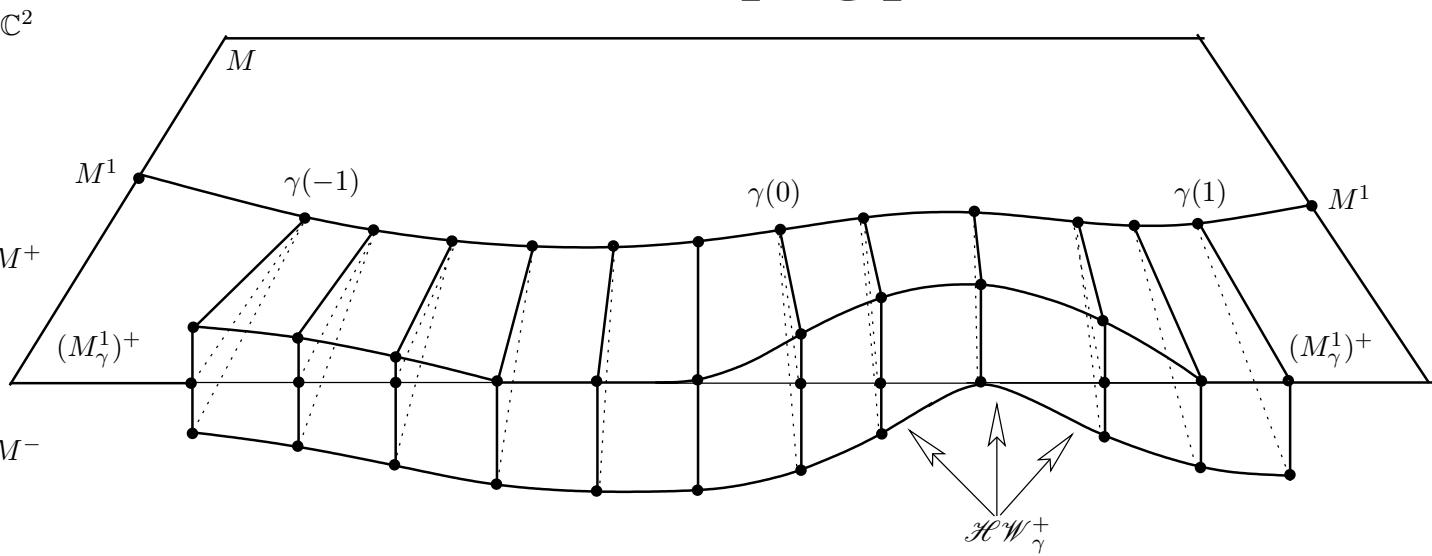
- There exists at least one special point p'_{sp} near $C' \cap \gamma(-1, 1)$ which is removable.
- **Warning :** most points of C' are *not* locally removable : *the choice is the main trick !*
- **Surfaces having arbitrary topology.** (Duval, 1992)

Corollary. *Compacts K of discs $M^1 \subset M \subset \mathbb{C}^2$ are removable if M^1 has only finitely many hyperbolic complex tangencies.*

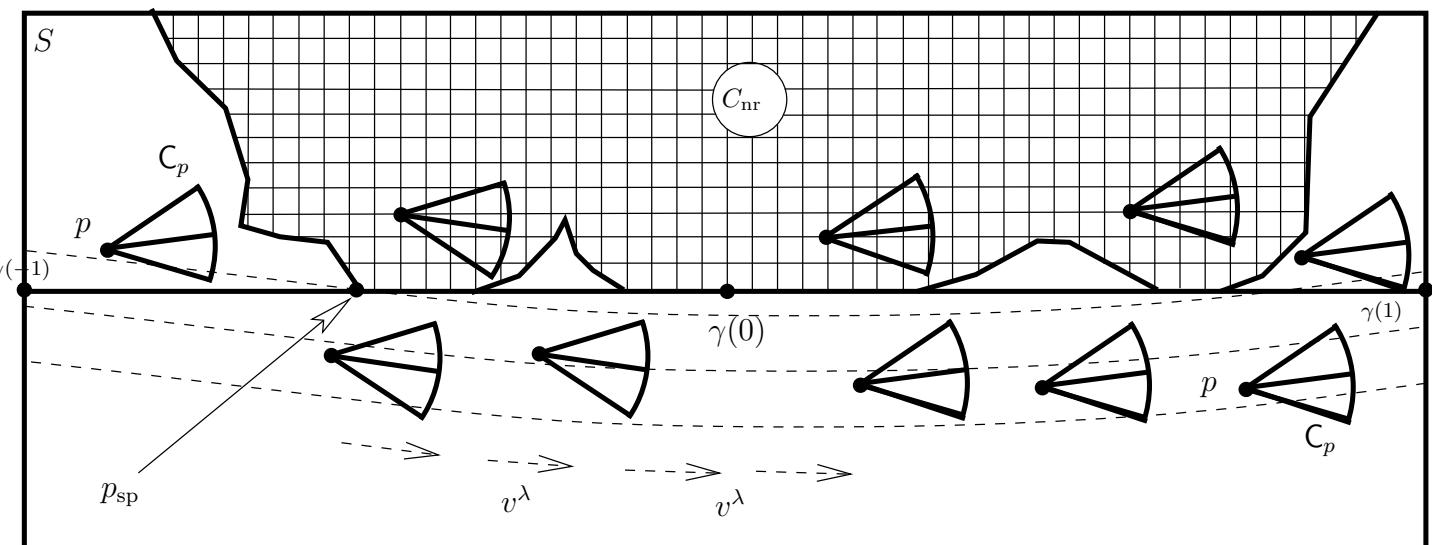
Punctual contact of a string of discs.



Rotate and translate, keeping punctual contact.



Field of cones tangent to the surface.



V. Arbitrary codimension.

Let $M \subset \mathbb{C}^n$ generic $\mathcal{C}^{2,\alpha}$ globally minimal, let $M^1 \subset M$ be a $\mathcal{C}^{2,\alpha}$ submanifold with

- $\text{codim}_M(M^1)$;
- M^1 is generic at every point.

Let $C \subset M^1$ be closed, both in M^1 and in M .

Theorem. (JÖRICKE, PORTEN, M.) *in CR dimension $m \geq 2$, C is removable provided ;*
 $(**)$ *C contains no CR orbit of M^1 .*

Induced complex tangential structure :

$$TM^1 \cap T^c M|_{M^1}.$$

Vector subbundle of TM^1 of rank $(2m - 1)$.

CR orbits \longleftrightarrow **Characteristic segments**

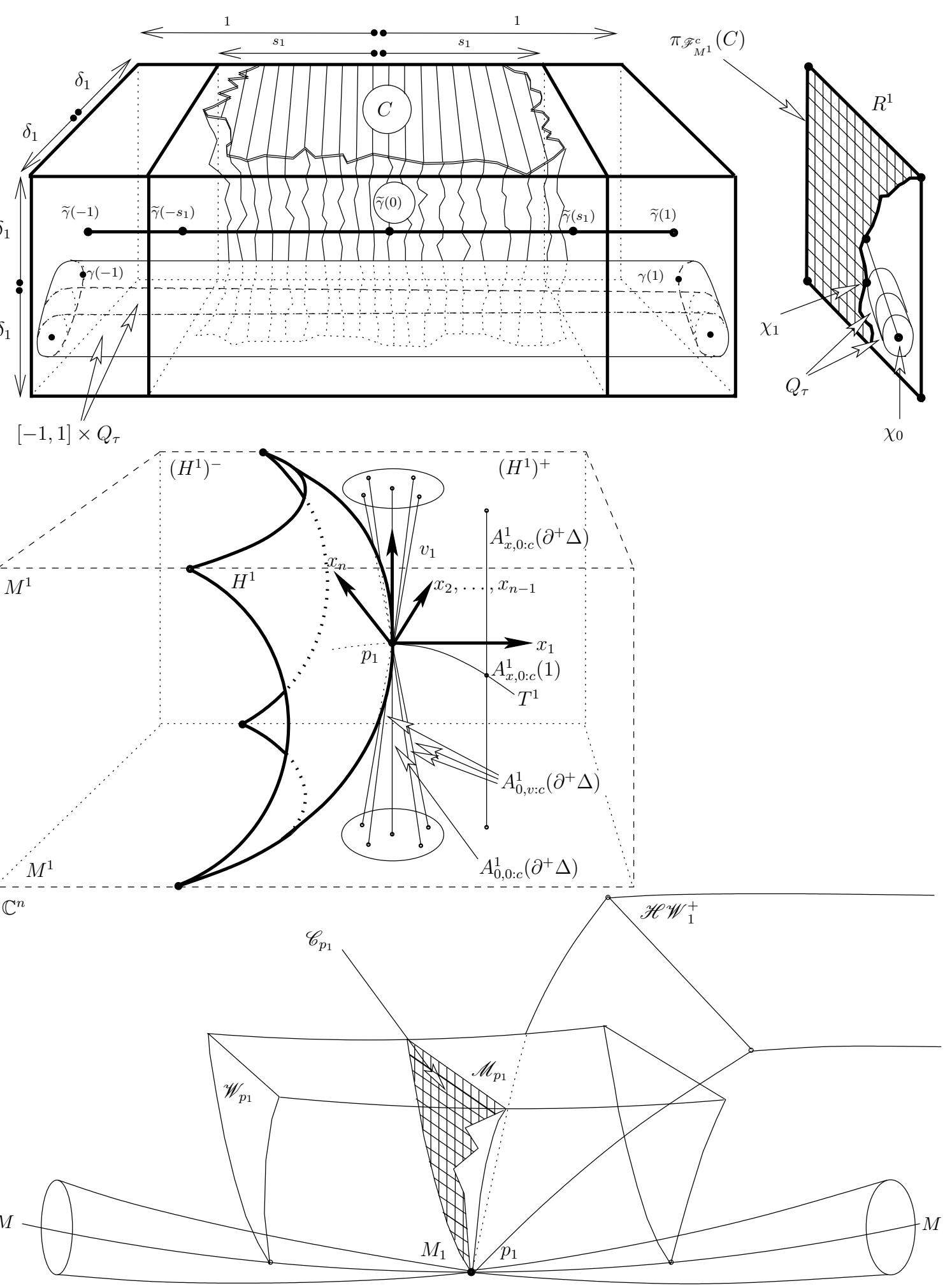
Idea : in CR dimension $m = 1$, removability holds provided C does not contain characteristic segments.

False : Milnor link !

Strong difference between $m = 1$ and $m \geq 2$

Theorem. *In CR dimension $m = 1$, C is removable provided :*

$(*)$ *$C \subset M^1$ is nontransversal to $\mathcal{F}_{M^1}^c$.*



VI. A nonremovable example.

Theorem 1.8. *There exists (M, M^1, C) , where*

- (i) $M \simeq \mathbb{R}^4$ is \mathcal{C}^∞ generic in \mathbb{C}^3 of CR dimension 1 ;
- (ii) $M^1 \simeq \mathbb{R}^3$, $M^1 \subset M$ is \mathcal{C}^∞ maximally real ;
- (iii) $C \subset M^1$ compact 2-torus transversal to $\mathcal{F}_{M^1}^c$;
- (iv) M of type 4 at every point, so globally minimal,
such that C is neither CR- nor \mathcal{W} - nor L^p -removable.

Habilitation à diriger des recherches (spécialité : mathématiques)

Sélection de travaux et perspectives

JOËL MERKER

I. Prolongement holomorphe des fonctions CR

II. Élimination des singularités

III. Symétries de Lie de systèmes d'EDP

IV. Principe de réflexion

V. Perspectives

[**19** diagrammes]
[**35** pages]

I. Prolongement holomorphe des fonctions CR

T transformée de Hilbert sur le cercle unité $\partial\Delta$:

$$\mathsf{T}u(e^{i\theta}) := \text{p.v. } \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} \frac{u(e^{i(\theta-t)})}{\tan(t/2)} dt.$$

$\mathsf{T}_1 u := \mathsf{T}u - \mathsf{T}u(1)$. Extension holomorphe $u + i\mathsf{T}_1 u$.

- **Privalov 1910** : borné dans $\mathcal{C}^{0,\alpha}$.
- **Aleksandrov 1975** : norme exacte $\|\mathsf{K}^0\|_{0,\alpha}$.
- **Information significative** :

$$\boxed{\frac{1/C}{\alpha(1-\alpha)} \leq \|\mathsf{T}_1\|_{\kappa,\alpha} \leq \frac{C}{\alpha(1-\alpha)}},$$

où $C > 1$ absolue et $\kappa \in \mathbb{N}$.

- **Équation de Bishop** : Bishop 1965, Hill-Taiani 1978, Boggess 1982, 1985, Trépreau 1986, Coupet 1987, Tumanov 1990, 1994, 1996.

Théorème. Soit $\Phi = \Phi(u, e^{i\theta}, s)$ une application à valeurs dans \mathbb{R}^d de classe $\mathcal{C}^{\kappa,\alpha}$, $\kappa \geq 1$, $0 < \alpha < 1$;

- $u \in \mathbb{R}^d$ satisfait $|u| < \rho_1$ avec $\rho_1 > 0$;

- $\theta \in \mathbb{R}$;

- $s \in \mathbb{R}^b$ satisfait $|s| < \sigma_1$ avec $0 < \sigma_1 < 1$.

Supposons que sur $\square_{\rho_1}^d \times \partial\Delta \times \square_{\sigma_1}^b$, l'application Φ et ses dérivées d'ordre 1 par rapport à u et par rapport à θ satisfont les trois inégalités :

$$\|\Phi\|_{0,0} \leq \mathbf{c}_1, \quad \|\Phi_u\|_{0,0} \leq \mathbf{c}_2, \quad \|\Phi_\theta\|_{0,0} \leq \mathbf{c}_3,$$

avec

$$\textcolor{red}{c}_1 \leq C \alpha \rho_1, \quad \textcolor{red}{c}_2 \leq C^2 \alpha^2 \left[1 + \sup_{|s| < \sigma_1} \|\Phi|_s\|_{1,\alpha} \right]^{-2}, \quad \textcolor{red}{c}_3 \leq \rho_1^2 \textcolor{red}{c}_2,$$

$0 < C < 1$ absolue. *Alors* pour tous paramètres

- $U_0 \in \mathbb{R}^d$ satisfaisant $|U_0| < \frac{\rho_1}{16}$,
- $s \in \mathbb{R}^b$ satisfaisant $|s| < \sigma_1$,

l'équation de Bishop à paramètres :

$$U(e^{i\theta}) = -\mathsf{T}_1 [\Phi(U(\cdot), \cdot, s)](e^{i\theta}) + U_0$$

possède une unique solution sur le cercle unité :

$$\partial\Delta \ni e^{i\theta} \longmapsto U(e^{i\theta}, s, U_0) \in \mathbb{R}^d$$

satisfaisant $\|U\|_{0,0} \leq \rho_1/4$ qui est :

- (i) de classe $\mathcal{C}^{\kappa,\alpha}$ sur $\partial\Delta$;
- (ii) *de classe* $\mathcal{C}^{\kappa,\alpha-0} = \bigcap_{\beta < \alpha} \mathcal{C}^{\kappa,\beta}$ par rapport à toutes les variables, y compris les paramètres.

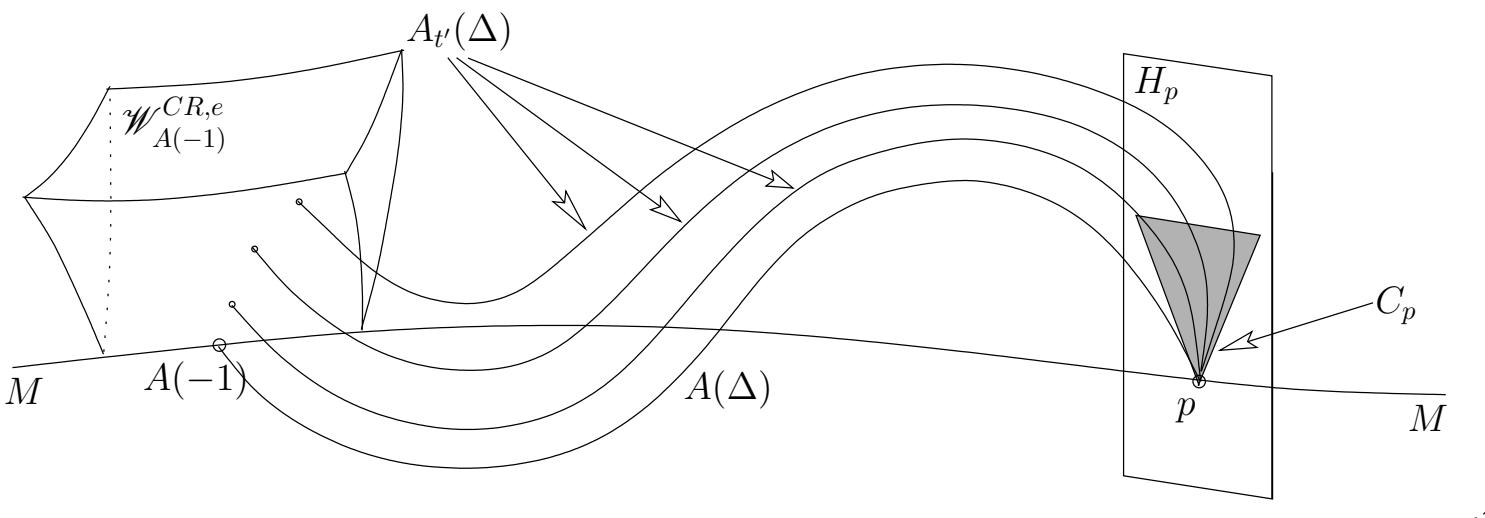
Optimal : un exemple montre que $\mathsf{T}(\mathcal{C}_{\text{param}}^{0,\alpha}) \not\subset \mathcal{C}^{0,\alpha}$.

Problème Ouvert. *Résoudre l'équation de Bishop à paramètres dans les espaces de Sobolev.*

- Disques analytiques attachés aux variétés CR.
- Prolongement holomorphe des fonctions CR.

Lewy 1960, Hill-Taiani 1978, Bedford-Fornæss 1978, Boggess 1982, Rea 1984, Boggess-Pitts 1985, Trépreau 1986, Tumanov 1988, 1990, Baouendi-Rothschild-Trépreau 1994, Jöricke 1994, M. 1994, Porten 2004, M.-Porten 2005.

Théorème. (JÖRICKE, M. 1994) Si $M \subset \mathbb{C}^n$ générique $\mathcal{C}^{2,\alpha}$ est globalement minimale, il existe un domaine de type wedge global \mathcal{W} attaché à M tel que toute fonction CR continue $f \in \mathcal{C}_{CR}^0(M)$ possède un prolongement holomorphe $F \in \mathcal{O}(\mathcal{W}) \cap \mathcal{C}^0(M \cup \mathcal{W})$, $F|_M = f$. De plus, toute fonction $f \in L_{loc,CR}^p$, $1 \leq p \leq \infty$, possède un prolongement holomorphe dans l'espace de Hardy $H_p^p(\mathcal{W})$.



- Déformations normales d'un disque attaché.
- Propagation de l'extension holomorphe.
- Variation de la direction de sortie du disque :

$$\mathbb{R}^e \ni t' \longmapsto \mathbf{ex}(A_{t'}) = \text{proj}_{H_p} \left(-\frac{\partial A_{t'}}{\partial r}(1) \right) \in \mathbb{R}^d.$$

Problème Ouvert. *Transférer aux structures presque complexes la déformation normale de disques.*

- Sukhov-Tumanov 2005 : $m = d = 1$, $n = 2$.

II. Élimination des singularités

- **Hypersurfaces réelles de variétés de Stein.**

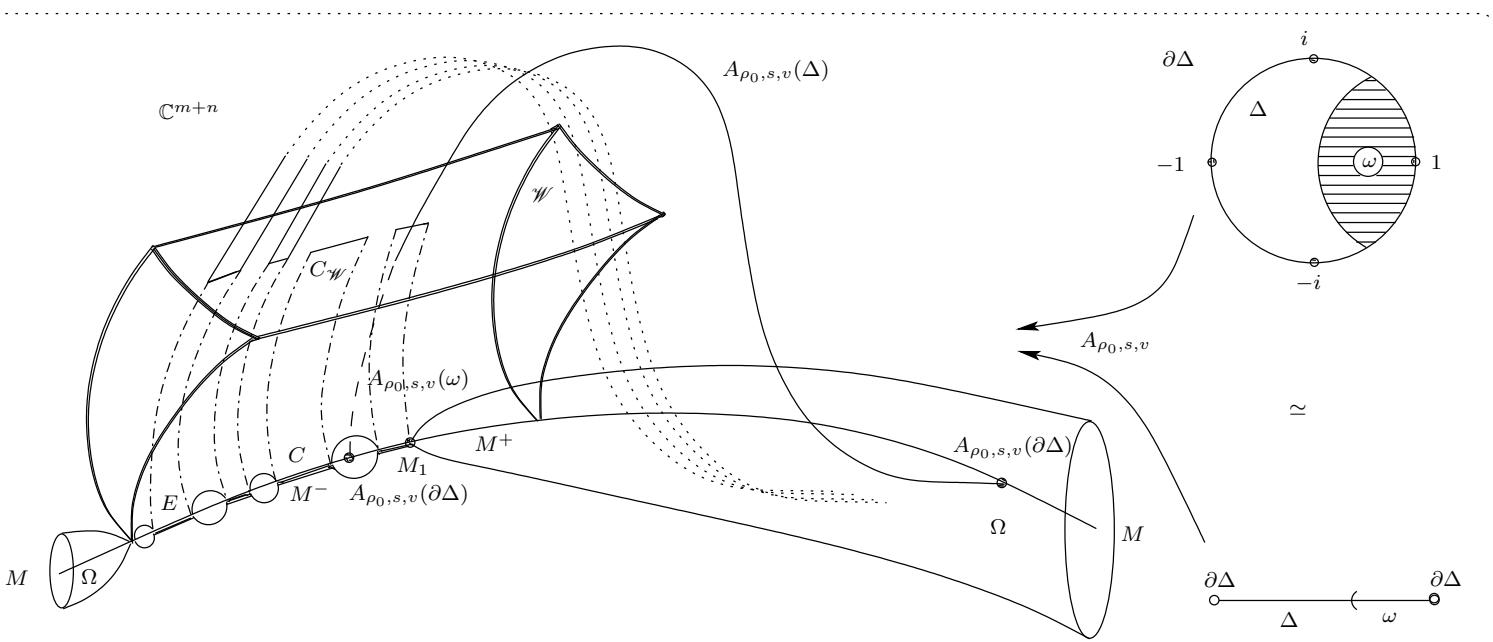
Stout 1982–2000, Laurent-Thiébaut, Leiterer 1980–2000 Lupaccioli 1985–1996, Kytmanov 1980–2005, Chirka-Stout 1994, Jöricke 1986–2005.

- **Codimension quelconque.** Jöricke, M., Porten 1996–2005.

Soit $M \subset \mathbb{C}^n$ générique $\mathcal{C}^{2,\alpha}$, de codimension $d \geq 1$ et de dimension CR $m \geq 1$. Soit $C \subset M$ fermé.

Trois notions de singularité apparente :

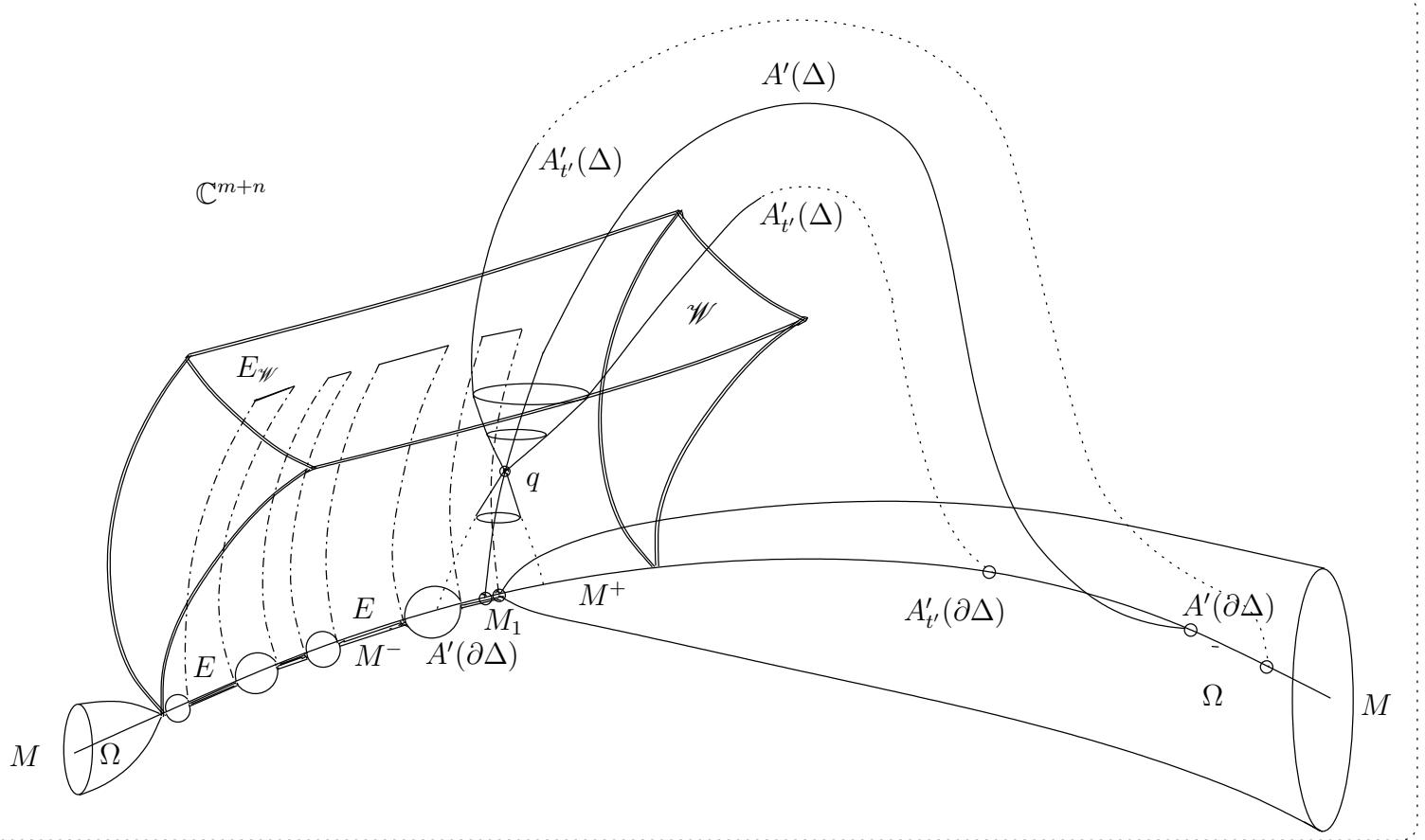
- C est **CR -éliminable** ;
- **\mathcal{W} -éliminable** ;
- **L^p -éliminable**.



Théorème. (M.-PORTEN, 2002) Supposons $M \subset \mathbb{C}^n$ de classe $\mathcal{C}^{2,\alpha}$, de codimension $d \geq 1$ et de dimension CR $m \geq 1$. Alors tout sous-ensemble fermé C de M tel que

les deux variétés génériques M et $M \setminus C$ sont globalement minimales et tel que $\mathsf{H}^{\dim M - 2}(C) = 0$ est CR-, \mathcal{W} - et L^p -éliminable.

- Déformations normales de disques.
- Contrôle des indices partiels.



- Fonction CR-méromorphe $f : M \rightarrow P_1(\mathbb{C})$.

Lieu d'indétermination de f :

$$I_f := \{p \in M : \{p\} \times P_1(\mathbb{C}) \subset \Gamma_f\}.$$

Lemme I_f est un sous-ensemble d'intérieur vide d'une sous-variété $N_f \subset M$ de classe \mathcal{C}^1 à singularités maigres et de codimension 2.

Théorème (M.-PORTEN, 2002) Supposons que $M \subset \mathbb{C}^n$ de classe $\mathcal{C}^{2,\alpha}$ est localement minimale en tout point. Alors il existe un domaine de type wedge \mathcal{W} attaché à M tel que toute fonction CR-méromorphe sur M se prolonge méromorphiquement à \mathcal{W} .

CR dimension $m = 1$ et codimension $d = 1 : \mathbb{C}^2$.

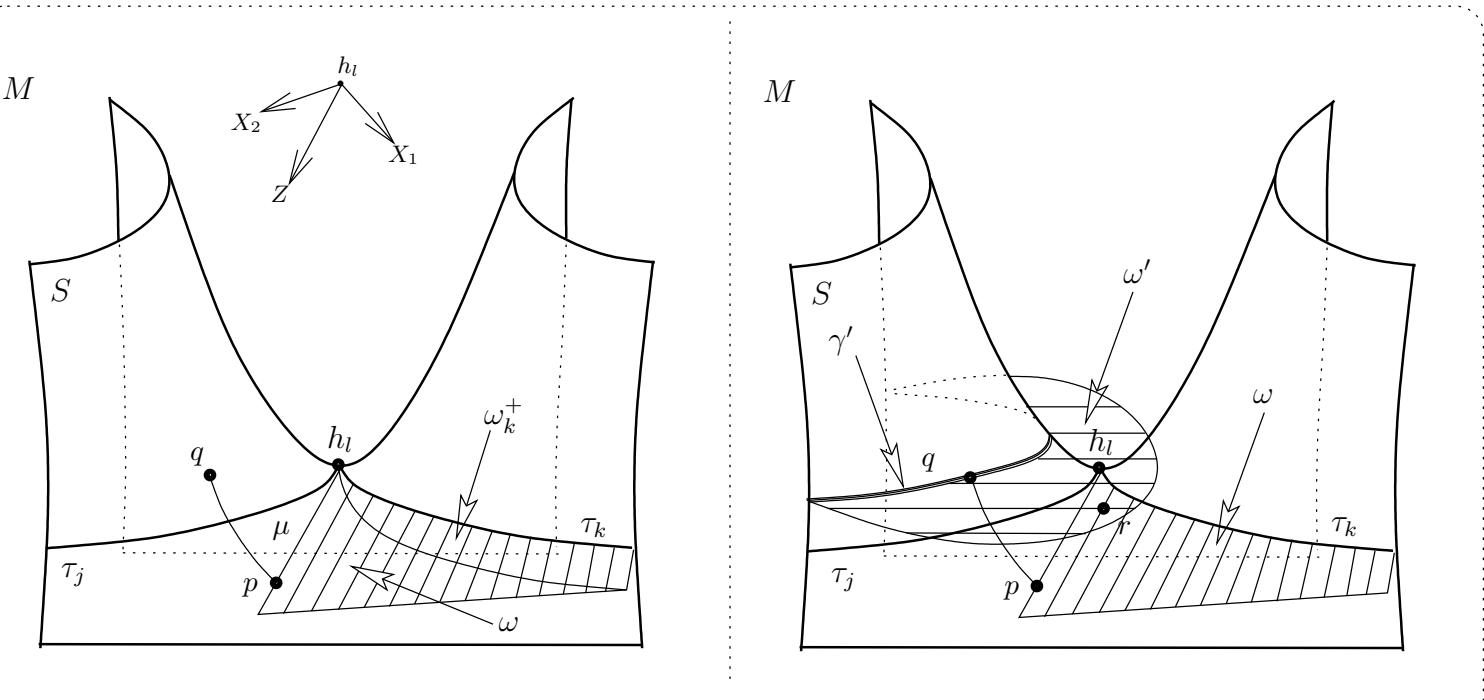
Arguments globaux :

Jöricke 1988–1999, Bedford-Klingenberg 1991, Kruzhilin 1991, Forstnerič-Stout 1991, Duval 1992, Porten 2004.

Théorème. Soit $M \subset \mathbb{C}^2$ une hypersurface $\mathcal{C}^{2,\alpha}$ globalement minimale et soit $D \subset M$ une surface $\mathcal{C}^{2,\alpha}$ qui est

- difféomorphe au disque unité ouvert de \mathbb{R}^2 et
- totalement réelle hors d'un nombre fini de points qui sont des points complexes tangentiels hyperboliques au sens de Bishop.

Sous ces hypothèses, tout compact K de D est CR-, \mathcal{W} - et L^p -éliminable.

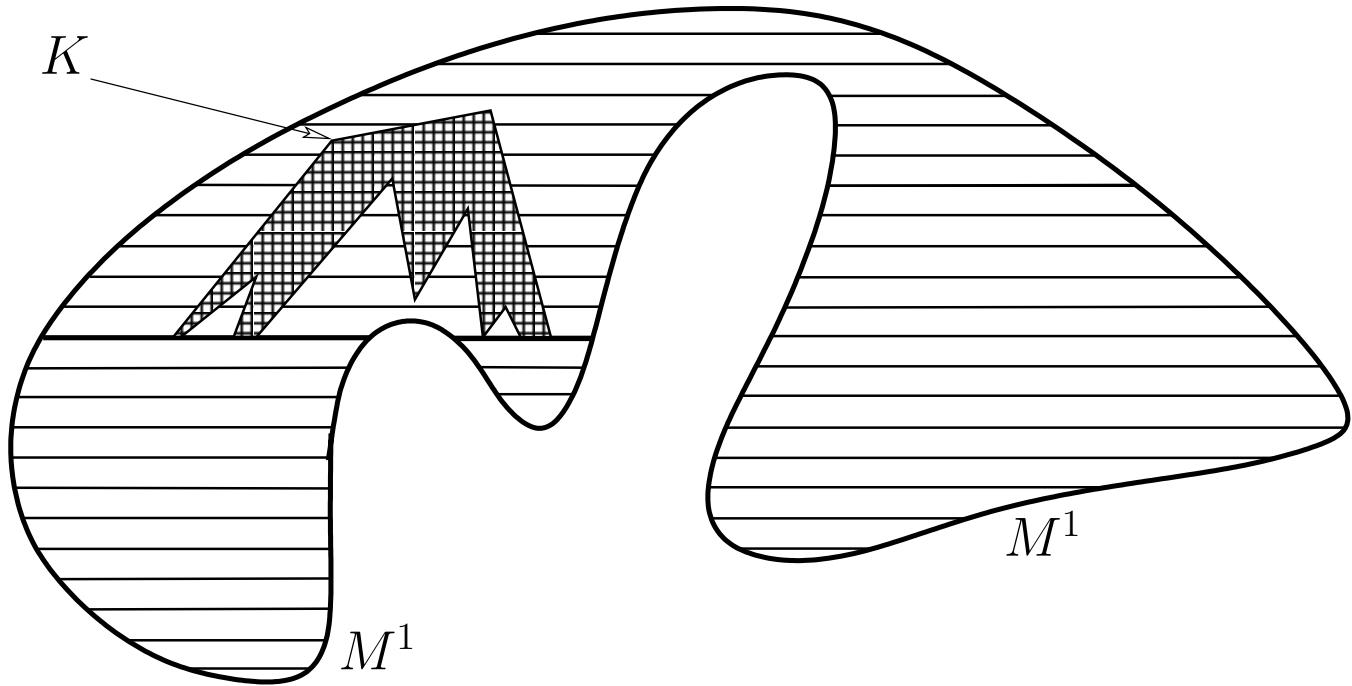


COMPORTEMENT DES ORBITES CR COMPLEXES PRÈS D'UN POINT HYPERBOLIQUE

Lemme. M et $M \setminus K$ sont globalement minimales.

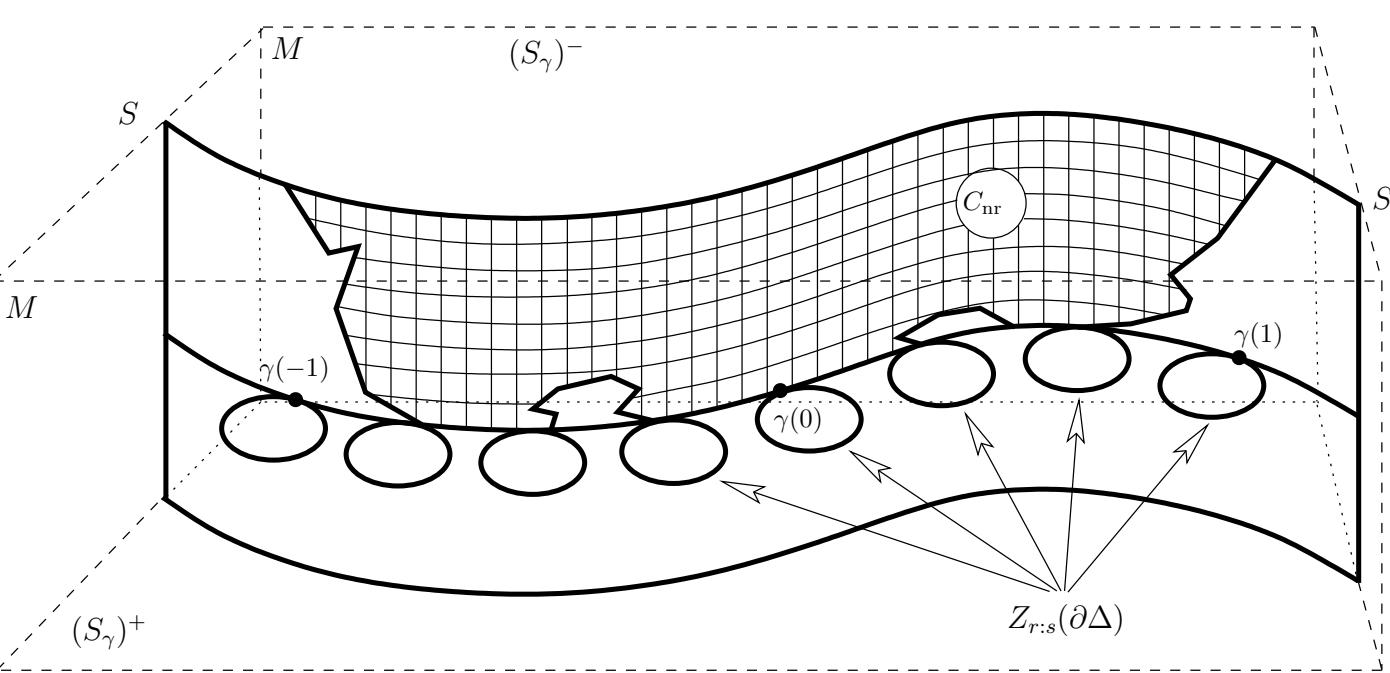
Localisation.

- Feuilletage caractéristique : $TD \cap T^c M|_D$.
- Théorème de Poincaré-Bendixson.

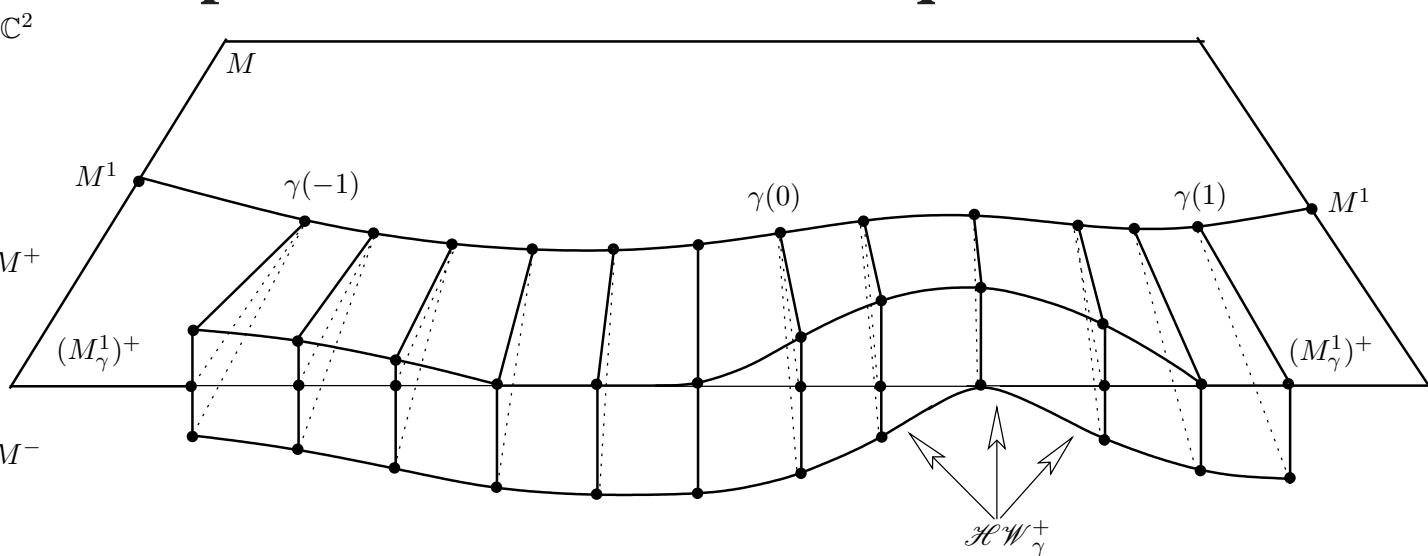


$\mathcal{F}_D^c\{K\}$: pour tout sous-compact $K' \subset K$, il existe un arc caractéristique $\gamma : [-1, 1] \rightarrow D$ avec $\gamma(-1) \notin K'$, $\gamma(0) \in K'$, $\gamma(1) \notin K'$, tel que K' se situe entièrement d'un seul côté de $\gamma[-1, 1]$ dans un voisinage de $\gamma[-1, 1]$ dans D .

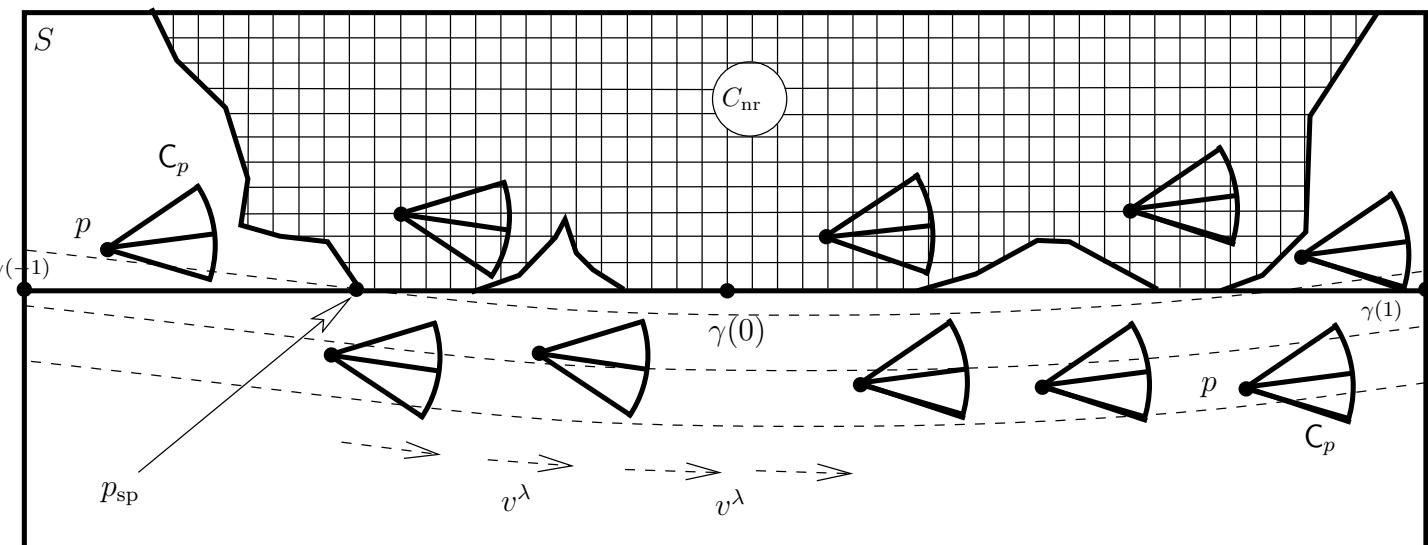
- Raisonnner par contradiction.
- Existence d'au moins un point spécial p'_{sp} situé dans un voisinage de $C' \cap \gamma(-1, 1)$ qui est *localement* CR-, \mathcal{W} - et L^p -éliminable.
- La plupart des points de C' ne sont *pas* localement éliminables : *the choice is the main trick !*
- Surfaces de topologie arbitraire. (Duval, 1992)



Faire pivoter une chaîne de disques au contact.



Champ de cônes tangents à la surface.

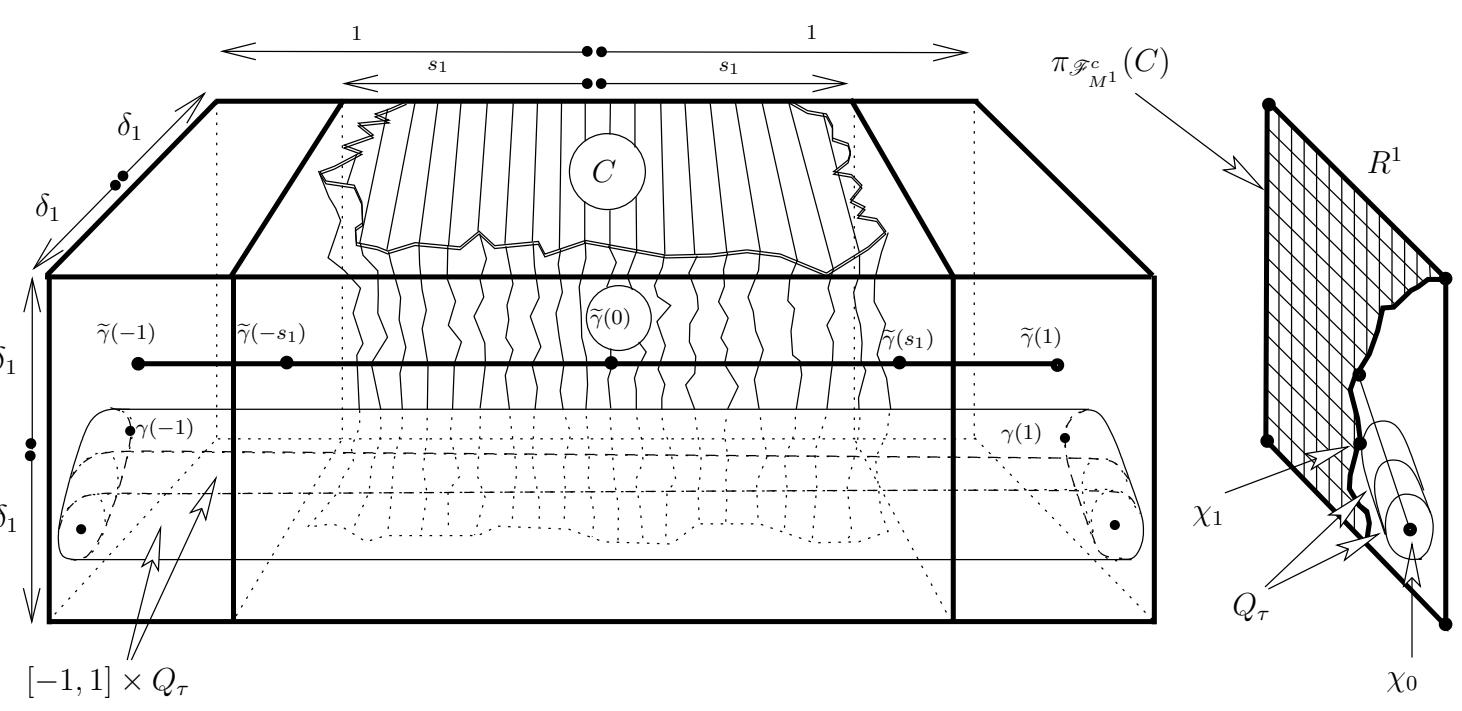


Passage en codimension supérieure Soit $M \subset \mathbb{C}^n$ ($n \geq 2$) générique $\mathcal{C}^{2,\alpha}$ de codimension $(n - 1)$, donc de dimension CR égale à 1. Soit $M^1 \subset M$ une sous-variété $\mathcal{C}^{2,\alpha}$ de codimension 1 qui est générique dans \mathbb{C}^n , donc maximalement réelle. Comme dans le cas hypersurface, M^1 possède un *feuilletage caractéristique* $\mathcal{F}_{M^1}^c$, dont les feuilles sont les courbes intégrales de la distribution de droites $p \mapsto T_p M^1 \cap T_p^c M|_{M^1}$.

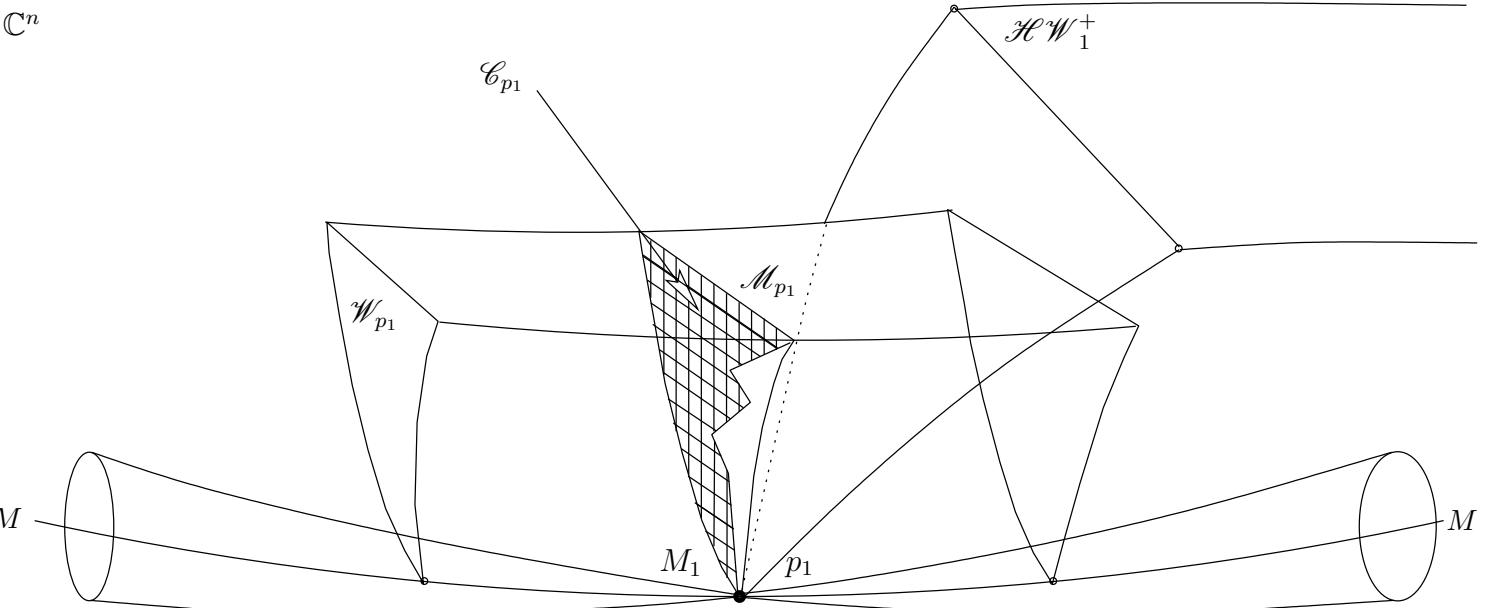
Théorème. Soient M, M^1 comme ci-dessus et soit $C \subset M$ fermé. Supposons :

$\boxed{\mathcal{F}_{M^1}^c\{C\}}$: pour tout sous-fermé $C' \subset C$, il existe un arc caractéristique $\gamma : [-1, 1] \rightarrow M^1$ avec $\gamma(-1) \notin C'$, $\gamma(0) \in C'$, $\gamma(1) \notin C'$, il existe une sous-variété locale $R^1 \subset M^1$ de dimension $(n - 1)$ transversale à γ passant par $\gamma(0)$ et il existe un voisinage allongé V_1 de $\gamma[-1, 1]$ dans M^1 tels que, si $\pi_{\mathcal{F}_{M^1}^c} : V_1 \rightarrow R^1$ désigne la projection semi-locale parallèle aux courbes caractéristiques de $\mathcal{F}_{M^1}^c$, alors le point $\gamma(0)$ appartient au bord, relativement à la topologie de R^1 , de $\pi_{\mathcal{F}_{M^1}^c}(C' \cap V_1)$.

Sous ces hypothèses, C est CR-, \mathcal{W} - et L^p -éliminable.



- Choix d'un point $p_1 \in C$ localement éliminable.
- Demi-wedge \mathcal{HW}_1^+ semi-global attaché.
- Disques partiellement attachés à M^1 .
- Principe de continuité.
- Élimination d'un sous-ensemble fermé \mathcal{C}_{p_1} d'un wedge \mathcal{W}_{p_1} en p_1 .



Nécessité de $\mathcal{F}_{M^1}^C\{C\}$

Théorème. Il existe un triplet (M, M^1, C) , où

- (i) $M \subset \mathbb{C}^3$ est une sous-variété générique \mathcal{C}^∞ de dimension CR égale à 1 difféomorphe à une boule réelle de dimension 4 ;
- (ii) $M^1 \subset M$ est une sous-variété \mathcal{C}^∞ de codimension 1 qui est maximalement réelle et difféomorphe à une boule réelle de dimension 3 ;
- (iii) C est un compact de M^1 difféomorphe à un tore réel de dimension 2 qui est transverse en tout point au feuilletage caractéristique $\mathcal{F}_{M^1}^C$, donc viole la condition de non-transversalité $\mathcal{F}_{M^1}^C\{C\}$;
- (iv) M est de type 4 en tout point, donc globalement minimale,

tel que C n'est ni CR- ni \mathcal{W} - ni L^p -éliminable.

Conclusion. Réponse complète à un problème de Jöricke 1999.

III. Symétries de Lie de systèmes d'EDP

Soit $\mathbb{K} = \mathbb{R}$ ou \mathbb{C} . Soit $x \in \mathbb{K}$, soit $m \geq 2$, soit $y := (y^1, \dots, y^m) \in \mathbb{K}^m$ et soit

$$y_{xx}^1(x) = F^1(x, y(x), y_x(x)), \dots, \\ y_{xx}^m(x) = F^m(x, y(x), y_x(x))$$

une collection de m équations différentielles ordinaires du second ordre à second membre analytique.

Transformation ponctuelle locale $(x, y) \mapsto (X, Y)$.

Problème. *Caractériser les systèmes équivalents à une particule newtonienne libre :*

$$Y_{XX}^1 = 0, Y_{XX}^2 = 0, \dots, Y_{XX}^m = 0.$$

Lie 1883, Hachtroudi 1937, Chern 1939, Leach 1980, González-López 1988, Fels 1995, Crampin-Martínez-Sarlet 1996, Grossman 2000.

Théorème. Supposons $m \geq 2$. Les trois conditions suivantes sont équivalentes :

(1) le système $y_{xx}^j = F^j(x, y, y_x)$, $j = 1, \dots, m$, est équivalent, via une transformation ponctuelle $(x, y^j) \mapsto (X, Y^j)$ au système newtonien libre $Y_{XX}^j = 0$, $j = 1, \dots, m$;

(2) le groupe de symétries locales de $y_{xx}^j = F^j(x, y, y_x)$, de dimension $(m^2 + 4m + 3)$, est localement isomorphe à $\text{PGL}(m + 1, \mathbb{K})$;

(3) les seconds membres $F^j(x, y, y_x)$ sont d'une forme spéciale, décrite comme suit.

(i) Il existe des fonctions \mathbb{K} -analytiques G^j , $H_{l_1}^j$, L_{l_1, l_2}^j et M_{l_1, l_2} , où $j, l_1, l_2 = 1, \dots, m$, satisfaisant $L_{l_1, l_2}^j = L_{l_2, l_1}^j$ et $M_{l_1, l_2} = M_{l_2, l_1}$ et dépendant seulement de (x, y) telles que $F^j(x, y, y_x)$ s'écrit sous la forme cubique en y_x suivante :

$$y_{xx}^j = G^j + \sum_{l_1=1}^m y_x^{l_1} H_{l_1}^j + \sum_{l_1=1}^m \sum_{l_2=1}^m y_x^{l_1} y_x^{l_2} L_{l_1, l_2}^j + \\ + y_x^j \cdot \sum_{l_1=1}^m \sum_{l_2=1}^m y_x^{l_1} y_x^{l_2} M_{l_1, l_2}.$$

(ii) Les fonctions G^j , $H_{l_1}^j$, L_{l_1, l_2}^j et M_{l_1, l_2} satisfont le système explicite suivant de quatre familles d'EDP du premier ordre :

$$(I) \quad \left\{ \begin{array}{l} 0 = -2G_{y^{l_1}}^j + 2\delta_{l_1}^j G_{y^{l_2}}^{l_2} + H_{l_1, x}^j - \delta_{l_1}^j H_{l_2, x}^{l_2} + \\ + 2 \sum_{k=1}^m G^k L_{l_1, k}^j - 2\delta_{l_1}^j \sum_{k=1}^m G^k L_{l_2, k}^{l_2} + \\ + \frac{1}{2}\delta_{l_1}^j \sum_{k=1}^m H_{l_2}^k H_k^{l_2} - \frac{1}{2} \sum_{k=1}^m H_{l_1}^k H_k^j, \end{array} \right.$$

où les indices j, l_1 varient dans $\{1, 2, \dots, m\}$;

(II)

$$\left\{
 \begin{aligned}
 0 = & -\frac{1}{2} H_{l_1, y^{l_2}}^j + \frac{1}{6} \delta_{l_1}^j H_{l_2, y^{l_2}}^{l_2} + \frac{1}{3} \delta_{l_2}^j H_{l_1, y^{l_1}}^{l_1} + \\
 & + L_{l_1, l_2, x}^j - \frac{1}{3} \delta_{l_1}^j L_{l_2, l_2, x}^{l_2} - \frac{2}{3} \delta_{l_2}^j L_{l_1, l_1, x}^{l_1} + \\
 & + G^j M_{l_1, l_2} - \frac{1}{3} \delta_{l_1}^j G^{l_2} M_{l_2, l_2} - \frac{2}{3} \delta_{l_2}^j G^{l_1} M_{l_1, l_1} + \\
 & + \frac{1}{3} \delta_{l_1}^j \sum_{k=1}^m G^k M_{l_2, k} - \frac{1}{3} \delta_{l_2}^j \sum_{k=1}^m G^k M_{l_1, k} - \\
 & - \frac{1}{2} \sum_{k=1}^m H_k^j L_{l_1, l_2}^k + \frac{1}{2} \sum_{k=1}^m H_{l_1}^k L_{l_2, k}^j + \\
 & + \delta_{l_1}^j \left(\frac{1}{6} \sum_{k=1}^m H_k^{l_2} L_{l_2, l_2}^k - \frac{1}{6} \sum_{k=1}^m H_{l_2}^k L_{l_2, k}^{l_2} \right) + \\
 & + \delta_{l_2}^j \left(\frac{1}{3} \sum_{k=1}^m H_k^{l_1} L_{l_1, l_1}^k - \frac{1}{3} \sum_{k=1}^m H_{l_1}^k L_{l_1, k}^{l_1} \right),
 \end{aligned}
 \right.$$

où les indices j, l_1, l_2 varient dans $\{1, 2, \dots, m\}$;

$$(III) \quad \left\{ \begin{aligned} 0 &= L_{l_1, l_2, y^{l_3}}^j - L_{l_1, l_3, y^{l_2}}^j + \delta_{l_3}^j M_{l_1, l_2, x} - \delta_{l_2}^j M_{l_1, l_3, x} + \\ &\quad + \frac{1}{2} H_{l_3}^j M_{l_1, l_2} - \frac{1}{2} H_{l_2}^j M_{l_1, l_3} + \\ &\quad + \frac{1}{2} \delta_{l_1}^j \sum_{k=1}^m H_{l_3}^k M_{l_2, k} - \frac{1}{2} \delta_{l_1}^j \sum_{k=1}^m H_{l_2}^k M_{l_3, k} + \\ &\quad + \frac{1}{2} \delta_{l_3}^j \sum_{k=1}^m H_{l_1}^k M_{l_2, k} - \frac{1}{2} \delta_{l_2}^j \sum_{k=1}^m H_{l_1}^k M_{l_3, k} + \\ &\quad + \sum_{k=1}^m L_{l_1, l_3}^k L_{l_2, k}^j - \sum_{k=1}^m L_{l_1, l_2}^k L_{l_3, k}^j, \end{aligned} \right.$$

où les indices j, l_1, l_2, l_3 varient dans $\{1, \dots, m\}$; et

$$(IV) \quad \left\{ M_{l_1, l_2, y^{l_3}} - M_{l_1, l_3, y^{l_2}} = \sum_{k=1}^m L_{l_1, l_2}^k M_{l_3, k} + L_{l_1, l_3}^k M_{l_2, k}, \right.$$

où les indices l_1, l_2, l_3 varient dans $\{1, \dots, m\}$.

Problème Ouvert. Caractériser explicitement la linéarisabilité d'un système particulaire newtonien possédant

m degrés de libertés, i.e. l'équivalence à :

$$Y_{XX}^j = G_0^j(X) + \sum_{l=1}^m Y^l G_{1,l}^j(X) + \sum_{l_1=1}^m Y_X^{l_1} H_{l_1}^j(X).$$

Prolongations de Lie de champs de vecteurs

Pour $\kappa \in \mathbb{N}$ avec $\kappa \geq 1$, désignons les variables de jets d'ordre κ d'une fonction $y = y(x)$ par :

$$(x, y, y_1, y_2, \dots, y_\kappa) \in \mathcal{J}_{1,1}^\kappa.$$

Le prolongement d'ordre κ d'un champ de vecteurs :

$$\mathcal{L}^{(\kappa)} = \mathcal{X} \frac{\partial}{\partial x} + \mathcal{Y} \frac{\partial}{\partial y} + \mathbf{Y}_1 \frac{\partial}{\partial y_1} + \mathbf{Y}_2 \frac{\partial}{\partial y_2} + \cdots + \mathbf{Y}_\kappa \frac{\partial}{\partial y_\kappa}$$

possède des coefficients $\mathbf{Y}_1, \mathbf{Y}_2, \dots, \mathbf{Y}_\kappa$ qui sont calculables par les formules de récurrence :

$$\left\{ \begin{array}{l} \mathbf{Y}_1 := D^1(\mathcal{Y}) - D^1(\mathcal{X}) y_1, \\ \mathbf{Y}_2 := D^2(\mathbf{Y}_1) - D^1(\mathcal{X}) y_2, \\ \dots \dots \dots \dots \dots \dots \dots \dots \dots \\ \mathbf{Y}_\kappa := D^\kappa(\mathbf{Y}_{\kappa-1}) - D^1(\mathcal{X}) y_\kappa, \end{array} \right.$$

où, pour $1 \leq \lambda \leq \kappa$:

$$D^\lambda := \frac{\partial}{\partial x} + y_1 \frac{\partial}{\partial y} + y_2 \frac{\partial}{\partial y_1} + \cdots + y_\lambda \frac{\partial}{\partial y_{\lambda-1}}.$$

Théorème. Pour $\kappa \geq 1$, on a :

$$\mathbf{Y}_\kappa = \mathcal{Y}_{x^\kappa} + \sum_{d=1}^{\kappa+1} \sum_{1 \leq \lambda_1 < \dots < \lambda_d \leq \kappa} \sum_{\mu_1 \geq 1, \dots, \mu_d \geq 1} \sum_{\mu_1 \lambda_1 + \dots + \mu_d \lambda_d \leq \kappa+1} \left[\frac{\kappa \cdots (\kappa - \mu_1 \lambda_1 - \dots - \mu_d \lambda_d + 1)}{(\lambda_1!)^{\mu_1} \mu_1! \cdots (\lambda_d!)^{\mu_d} \mu_d!} \cdot \mathcal{Y}_{x^{\kappa-\mu_1 \lambda_1 - \dots - \mu_d \lambda_d} y^{\mu_1 + \dots + \mu_d}} - \frac{\kappa \cdots (\kappa - \mu_1 \lambda_1 - \dots - \mu_d \lambda_d + 2)(\mu_1 \lambda_1 + \dots + \mu_d \lambda_d)}{(\lambda_1!)^{\mu_1} \mu_1! \cdots (\lambda_d!)^{\mu_d} \mu_d!} \cdot \mathcal{X}_{x^{\kappa-\mu_1 \lambda_1 - \dots - \mu_d \lambda_d + 1} y^{\mu_1 + \dots + \mu_d - 1}} \right] (y_{\lambda_1})^{\mu_1} \cdots (y_{\lambda_d})^{\mu_d}.$$

Passage à plusieurs variables indépendantes

Soit

$n \geq 1$, soit $(x_1, \dots, x_n) \in \mathbb{K}^n$, soit $m = 1$, soit $y \in \mathbb{K}$, soit $\kappa \in \mathbb{N}$ avec $\kappa \geq 1$ et désignons les variables de jets d'ordre κ de $y = y(x)$ par :

$$\left(x^i, y, y_{i_1}, y_{i_1, i_2}, \dots, y_{i_1, i_2, \dots, i_\kappa} \right) \in \mathcal{J}_{n,1}^\kappa.$$

Les coefficients du prolongement d'ordre κ d'un champ de vecteurs :

$$\begin{aligned} \mathcal{L}^{(\kappa)} = & \sum_{i=1}^n \mathcal{X}^i \frac{\partial}{\partial x^i} + \mathcal{Y} \frac{\partial}{\partial y} + \sum_{i_1=1}^n \mathbf{Y}_{i_1} \frac{\partial}{\partial y_{i_1}} + \\ & + \cdots + \sum_{i_1, i_2, \dots, i_\kappa=1}^n \mathbf{Y}_{i_1, i_2, \dots, i_\kappa} \frac{\partial}{\partial y_{i_1, i_2, \dots, i_\kappa}}. \end{aligned}$$

sont donnés par les formules de récurrence suivantes :

$$\mathbf{Y}_{i_1} := D_{i_1}^1 (\mathcal{Y}) - \sum_{k=1}^n D_{i_1}^1 (\mathcal{X}^k) y_k,$$

$$\mathbf{Y}_{i_1, i_2} := D_{i_2}^2 (\mathbf{Y}_{i_1}) - \sum_{k=1}^n D_{i_2}^1 (\mathcal{X}^k) y_{i_1, k},$$

.....

$$\mathbf{Y}_{i_1, \dots, i_\kappa} := D_{i_\kappa}^\kappa \mathbf{Y}_{i_1, \dots, i_{\kappa-1}} - \sum_{k=1}^n D_{i_\kappa}^1 \mathcal{X}^k y_{i_1, \dots, i_{\kappa-1}, k},$$

où les opérateurs de différentiation totale :

$$D_{i'}^\lambda := \frac{\partial}{\partial x^{i'}} + y_{i'} \frac{\partial}{\partial y} + \sum_{i'_1=1}^n y_{i',i'_1} \frac{\partial}{\partial y_{i'_1}} + \\ + \cdots + \sum_{i'_1, \dots, i'_{\lambda-1}=1}^n y_{i',i'_1, \dots, i'_{\lambda-1}} \frac{\partial}{\partial y_{i'_1, \dots, i'_{\lambda-1}}}.$$

Théorème. On a :

$$\boxed{\mathbf{Y}_{i_1, \dots, i_\kappa} = \mathcal{Y}_{x^{i_1} \dots x^{i_\kappa}} + \sum_{d=1}^{\kappa+1} \sum_{1 \leq \lambda_1 < \dots < \lambda_d \leq \kappa} \sum_{\mu_1 \geq 1, \dots, \mu_d \geq 1} \sum_{\mu_1 \lambda_1 + \dots + \mu_d \lambda_d \leq \kappa+1} \\ \sum_{k_{1:1:1}, \dots, k_{1:1:\lambda_1}=1}^n \cdots \sum_{k_{1:\mu_1:1}, \dots, k_{1:\mu_1:\lambda_1}=1}^n \cdots \cdots \sum_{k_{d:1:1}, \dots, k_{d:1:\lambda_d}=1}^n \cdots \sum_{k_{d:\mu_d:1}, \dots, k_{d:\mu_d:\lambda_d}=1}^n \\ \left[\sum_{\sigma \in \mathfrak{F}_{\mu_1 \lambda_1 + \dots + \mu_d \lambda_d}^{(\mu_1, \lambda_1), \dots, (\mu_d, \lambda_d)}} \sum_{\tau \in \mathfrak{S}_\kappa^{\mu_1 \lambda_1 + \dots + \mu_d \lambda_d}} \\ \delta_{i_{\tau(1)}, \dots, i_{\tau(\mu_1 \lambda_1)}, \dots, i_{\tau(\mu_1 \lambda_1 + \dots + \mu_d \lambda_d)}}^{k_{\sigma(1:1:1)}, \dots, k_{\sigma(1:\mu_1:\lambda_1)}, \dots, k_{\sigma(d:\mu_d:\lambda_d)}} \frac{\partial^{\kappa - \mu_1 \lambda_1 - \dots - \mu_d \lambda_d + \mu_1 + \dots + \mu_d} \mathcal{Y}}{\partial x^{i_{\tau(\mu_1 \lambda_1 + \dots + \mu_d \lambda_d + 1)}} \dots \partial x^{i_{\tau(\kappa)}} (\partial y)^{\mu_1 + \dots + \mu_d}} - \right. \\ \left. - \sum_{\sigma \in \mathfrak{F}_{\mu_1 \lambda_1 + \dots + \mu_d \lambda_d}^{(\mu_1, \lambda_1), \dots, (\mu_d, \lambda_d)}} \sum_{\tau \in \mathfrak{S}_\kappa^{\mu_1 \lambda_1 + \dots + \mu_d \lambda_d - 1}} \\ \delta_{i_{\tau(1)}, \dots, i_{\tau(\mu_1 \lambda_1)}, \dots, i_{\tau(\mu_1 \lambda_1 + \dots + \mu_d \lambda_d - 1)}}^{k_{\sigma(1:1:1)}, \dots, k_{\sigma(1:\mu_1:\lambda_1)}, \dots, k_{\sigma(d:\mu_d:\lambda_d - 1)}} \frac{\partial^{\kappa - \mu_1 \lambda_1 - \dots - \mu_d \lambda_d + \mu_1 + \dots + \mu_d} \mathcal{X}^{k_{\sigma(d:\mu_d:\lambda_d)}}}{\partial x^{i_{\tau(\mu_1 \lambda_1 + \dots + \mu_d \lambda_d)}} \dots \partial x^{i_{\tau(\kappa)}} (\partial y)^{\mu_1 + \dots + \mu_d - 1}} \right] \\ \cdot \prod_{1 \leq \nu_1 \leq \mu_1} y_{k_{1:\nu_1:1}, \dots, k_{1:\nu_1:\lambda_1}} \cdots \prod_{1 \leq \nu_d \leq \mu_d} y_{k_{d:\nu_d:1}, \dots, k_{d:\nu_d:\lambda_d}}.}$$

IV. Principe de réflexion

$M \subset \mathbb{C}^n$ générique, analytique réelle (\mathcal{C}^ω).

$\text{CRdim } M = m \geqslant 1$, $\text{codim } M = d \geqslant 1$.

Coordonnées $t = (z, w) \in \mathbb{C}^m \times \mathbb{C}^d$. Équations

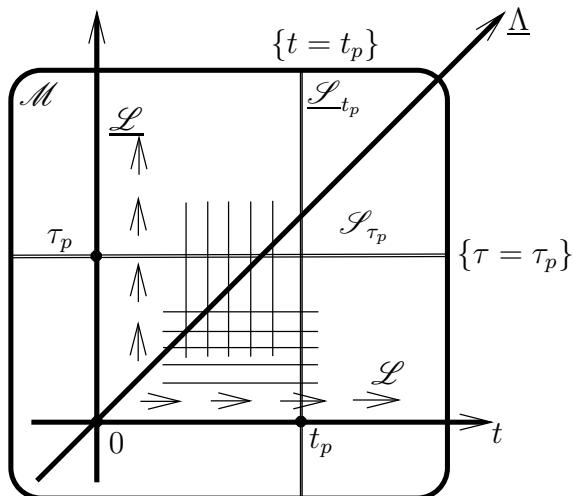
$$w = \overline{\Theta}(z, \bar{z}, \bar{w}) \quad \text{ou} \quad \bar{w} = \Theta(\bar{z}, z, w)$$

Complexification extrinsèque $\mathcal{M} \subset \mathbb{C}^{2n}$.

$\tau = (\zeta, \xi) \in \mathbb{C}^m \times \mathbb{C}^d$ remplace $\bar{t} = (\bar{z}, \bar{w})$.

$$w = \overline{\Theta}(z, \zeta, \xi) \quad \text{ou} \quad \xi = \Theta(\zeta, z, w)$$

Paire invariant de feuilletages.



La complexification d'une sous-variété analytique réelle porte une paire de feuilletages invariants qui sont les sous-variétés intégrales des complexifiés des champs de vecteurs de types $(1, 0)$ et $(0, 1)$ et qui s'identifient aussi aux sous-variétés de Segre complexifiées.

Soit $\tau_p, t_p \in \mathbb{C}^n$ fixés. Définissons la variété de Segre complexifiée \mathcal{S}_{τ_p} et la variété de Segre complexifiée conjuguée $\underline{\mathcal{S}}_{t_p}$ par :

$$\begin{cases} \mathcal{S}_{\tau_p} := \{(t, \tau) \in \mathbb{C}^n \times \mathbb{C}^n : \tau = \tau_p, w = \overline{\Theta}(z, \tau_p)\}, \\ \underline{\mathcal{S}}_{t_p} := \{(t, \tau) \in \mathbb{C}^n \times \mathbb{C}^n : t = t_p, \xi = \Theta(\zeta, t_p)\}. \end{cases}$$

Géométriquement, on a $\mathcal{S}_{\tau_p} = \mathcal{M} \cap \{\tau = \tau_p\}$ et $\underline{\mathcal{S}}_{t_p} = \mathcal{M} \cap \{t = t_p\}$.

Chaînes de Segre. Partir de $p = 0$, se déplacer verticalement le long de $\underline{\mathcal{L}}_0$ d'une hauteur de $z_1 \in \mathbb{C}^m$. Obtenir :

$$\underline{\mathcal{L}}_{z_1}(0) =: \underline{\Gamma}_1(z_1).$$

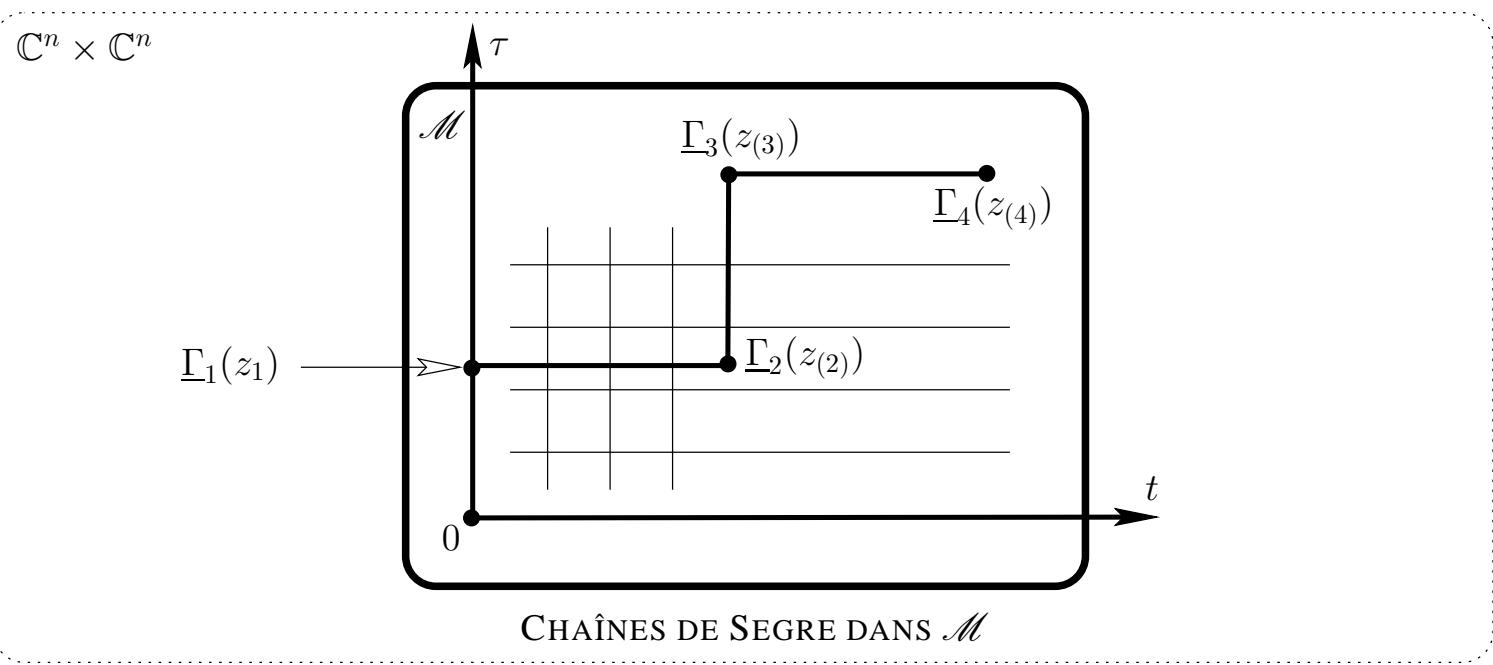
Observer $\underline{\Gamma}_1(0) = 0$. Repartir de $\underline{\Gamma}_1(z_1)$, se déplacer horizontalement d'une longueur de $z_2 \in \mathbb{C}^m$. Obtenir :

$$\underline{\Gamma}_2(z_1, z_2) := \underline{\mathcal{L}}_{z_2}(\underline{\mathcal{L}}_{z_1}(0)).$$

Ensuite $\underline{\Gamma}_3(z_1, z_2, z_3) := \underline{\mathcal{L}}_{z_3}(\underline{\mathcal{L}}_{z_2}(\underline{\mathcal{L}}_{z_1}(0)))$, et encore

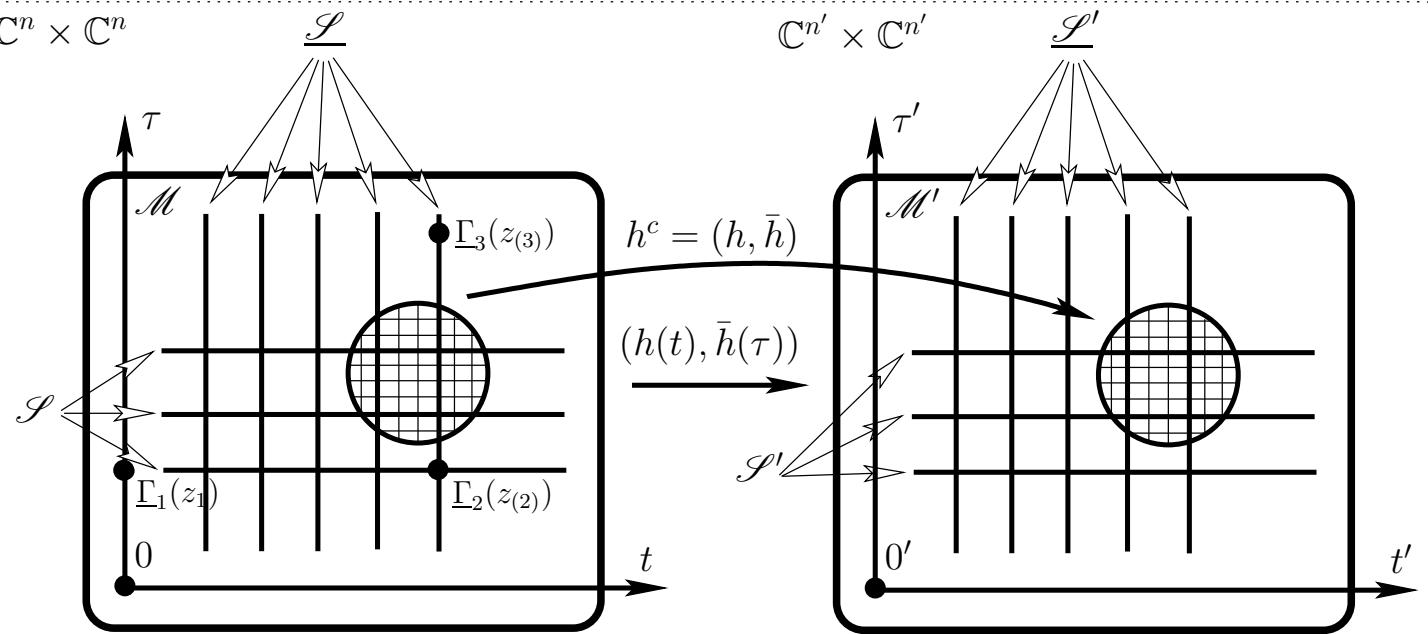
$$\underline{\Gamma}_4(z_1, z_2, z_3, z_4) := \underline{\mathcal{L}}_{z_4}(\underline{\mathcal{L}}_{z_3}(\underline{\mathcal{L}}_{z_2}(\underline{\mathcal{L}}_{z_1}(0)))),$$

et cætera.



Par récurrence, pour tout $k \in \mathbb{N}$, $k \geq 1$, obtenir la k -ième chaîne de Segre conjuguée $\underline{\Gamma}_k(z_1, \dots, z_k)$, à valeurs dans \mathcal{M} , définie pour $z_1, \dots, z_k \in \mathbb{C}^m$ suffisamment petits et satisfaisant $\underline{\Gamma}_k(0, \dots, 0) = 0$.

Soit $t \in \mathbb{C}^n$, soit $n' \geq 1$ et soit $h(t) = (h_1(t), \dots, h_{n'}(t)) \in \mathbb{C}[[t]]^{n'}$ une application telle que $h(0) = 0'$. On a $(\bar{h}(t))^c = \bar{h}((\bar{t})^c) = \bar{h}(\tau)$. L'application $h^c(t, \tau) := (h(t), \bar{h}(\tau))$ est à variables séparées.



LES APPLICATIONS FORMELLES COMPLEXIFIÉES RESPECTENT LES PAIRES DE FEUILLETAGES

Soit $M' \subset \mathbb{C}^{n'}$ de codimension $d' \geq 1$ et de dimension CR $m' = n' - d' \geq 1$. Il existe des coordonnées locales $t' = (z', w') \in \mathbb{C}^{m'} \times \mathbb{C}^{d'}$ centrées en $p' \in M'$ dans lesquelles M' est représentée par $\bar{w}' = \Theta'(\bar{z}', t')$. Posons :

$$\begin{aligned}\bar{r}(\bar{t}, t) &:= w - \bar{\Theta}(z, \bar{t}), \\ \bar{r}'(\bar{t}', t') &:= w' - \bar{\Theta}'(z', \bar{t}').\end{aligned}$$

Application CR formelle $h : (M, 0) \mapsto_{\mathcal{F}} (M', 0') :$
Il existe une matrice de taille $d' \times d$ de séries formelles $\bar{b}(\bar{t}, t)$ telle que, dans $\mathbb{C}[[t, \bar{t}]]^{d'}$:

$$\bar{r}'(\bar{h}(\bar{t}), h(t)) \equiv \bar{b}(\bar{t}, t) \bar{r}(\bar{t}, t).$$

Jets de variétés de Segre La variété de Segre complexifiée conjuguée associée à $t' \in \mathbb{C}^{n'}$ fixé est

$$\underline{\mathcal{S}}'_{t'} := \{(\zeta', \xi') \in \mathbb{C}^{n'} : \xi' = \Theta'(\zeta', t')\}.$$

Pour $k' \in \mathbb{N}$, définissons le *morphisme des k' -jets des variétés de Segre complexifiées conjuguées* par :

$$\varphi'_{k'}(\zeta', t') := J_{\tau'}^{k'} \underline{\mathcal{S}}'_{t'} := \left(\zeta', \left(\frac{1}{\beta'!} \partial_{\zeta'}^{\beta'} \Theta'_{j'}(\zeta', t') \right)_{|\beta'| \leq k'}^{1 \leq j' \leq d'} \right).$$

On dira que M' (ou \mathcal{M}') est :

(nd1) Levi non-dégénérée à l'origine si φ'_1 est de rang $m' + n'$ en $(\zeta', t') = (0', 0')$;

(nd2) finiment non-dégénérée à l'origine s'il existe un entier ℓ'_0 tel que $\varphi'_{k'}$ est de rang $n' + m'$ en $(\zeta', t') = (0', 0')$, pour $k' \geq \ell'_0$;

(nd3) essentiellement finie à l'origine s'il existe un entier ℓ'_0 tel que $\varphi'_{k'}$ est une application holomorphe finie en $(\zeta', t') = (0', 0')$, pour $k' \geq \ell'_0$;

(nd4) Segre non-dégénérée à l'origine s'il existe un entier ℓ'_0 tel que la restriction de $\varphi'_{k'}$ à la variété de Segre complexifiée \mathcal{S}'_0 est de rang générique m' , pour $k' \geq \ell'_0$;

(nd5) holomorphiquement non-dégénérée s'il existe un entier ℓ'_0 tel que l'application $\varphi'_{k'}$ est de rang générique maximal possible, égal à $m' + n'$, pour $k' \geq \ell'_0$.

Conditions CR-horizontales de non-dégénérescence

Soit $h : (M, 0) \rightarrow_{\mathcal{F}} (M', 0')$. Décomposer $h(t) = (f(t), g(t)) \in \mathbb{C}[[t]]^{m'} \times \mathbb{C}[[t]]^{d'}$. Remplacer w par $\bar{\Theta}(z, \tau)$ dans $f(t) = f(z, w)$, poser $\tau = 0$ et obtenir la *partie CR-horizontale* de h :

$$\mathbb{C}^m \ni z \longmapsto_{\mathcal{F}} f(z, \bar{\Theta}(z, 0)) \in \mathbb{C}^{m'}.$$

L'application CR formelle h est :

(cr1) CR-inversible à l'origine si $m' = m$ et si sa partie CR-horizontale est inversible en $z = 0$;

(cr2) CR-submersive à l'origine si $m' \leq m$ et si sa partie CR-horizontale est submersive en $z = 0$;

(cr3) CR-finie à l'origine si $m' = m$ et si sa partie CR-horizontale est une application formelle finie en $z = 0$.

(cr4) CR-dominante à l'origine si $m' \leq m$ et si il existe des entiers $1 \leq k(1) < \dots < k(m') \leq m$ tels que le déterminant

$$\det([\partial \varphi_{k'_1}/\partial z_{k(k'_2)}](z))_{1 \leq k'_1, k'_2 \leq m'} \neq 0$$

ne s'annule pas identiquement dans $\mathbb{C}[[z]]$, où $\varphi_{k'}(z) := f_{k'}(z, \bar{\Theta}(z, 0))$;

(cr5) CR-transversale à l'origine s'il n'existe pas de série formelle non nulle $F'(f_1, \dots, f_{m'}) \in \mathbb{C}[[f_1, \dots, f_{m'}]]$ telle que $F'(\varphi_1(z), \dots, \varphi_{m'}(z)) \equiv 0$ dans $\mathbb{C}[[z]]$, où $\varphi_{k'}(z) := f_{k'}(z, \bar{\Theta}(z, 0))$.

Versions classiques du principe de réflexion Soit $h : (M, 0) \rightarrow_{\mathcal{F}} (M', 0')$ une application CR formelle. Supposons M minimale en 0.

Théorème. Si M et M' sont analytiques réelles, si h est Levi non-dégénérée, ou finiment non-dégénérée, ou essentiellement finie, ou Segre non-dégénérée à l'origine, alors $h(t)$ est convergente, i.e. $h(t) \in \mathbb{C}\{t\}^{n'}$. Si, de plus, M et M' sont algébriques, alors h est algébrique.

Convergence de l'application de réflexion

L'application de réflexion associée à h et au système de coordonnées (z', w') est :

$$\mathcal{R}'_h(\tau', t) := \xi' - \Theta'(\zeta', h(t)) \in \mathbb{C}[\tau', t]^{d'}.$$

Théorème. Si M est minimale à l'origine et si h est CR-inversible, ou CR-submersive, ou CR-finie, ou CR-dominante, ou CR-transversale, alors pour tout système de coordonnées $(z', w') \in \mathbb{C}^{m'} \times \mathbb{C}^{d'}$ dans lesquelles la complexification extrinsèque \mathcal{M}' est représentée par $\xi' = \Theta'(\zeta', t')$, l'application de réflexion associée est convergente, c'est-à-dire :

$$\mathcal{R}'_h(\tau', t) \in \mathbb{C}\{\tau', t\}^{d'}.$$

La convergence de \mathcal{R}'_h dans un seul système de coordonnées entraîne sa convergence dans tout système de coordonnées.

Développer $\Theta'(\zeta', t') = \sum_{\gamma' \in \mathbb{N}^{m'}} (\zeta')^{\gamma'} \Theta'_{\gamma'}(t')$.

Corollaire. *Toutes les composantes $\Theta'_{\gamma'}(h(t))$ de l'application de réflexion convergent, i.e.*

$$\boxed{\Theta'_{\gamma'}(h(t)) \in \mathbb{C}\{t\}^{d'} \text{ pour tout } \gamma' \in \mathbb{N}^{m'}}.$$

En tenant compte des conditions de non-dégénérescence **(ndi)** et **(crj)**, une vingtaine de corollaires possibles se déduisent de ce théorème unificateur. Signalons seulement les cinq suivants.

Corollaire. *Si M est minimale à l'origine, si $(M', 0')$ est holomorphiquement non-dégénérée et si h est CR-inversible et inversible, ou CR-submersive et submersive, ou CR-finie et finie avec $m' = m$, ou CR-dominante et dominante, ou CR-transversale et transversale, alors $h(t) \in \mathbb{C}\{t\}^{n'}$ est convergente.*

Principe de la démonstration. L'hypothèse que h^c est une application CR formelle complexifiée entre $(\mathcal{M}, 0)$ et $(\mathcal{M}', 0')$ se lit comme suit :

$$\left\{ \begin{array}{l} \bar{g}(\tau) = \sum_{\gamma' \in \mathbb{N}^{m'}} \bar{f}(\tau)^{\gamma'} \Theta'_{\gamma'}(h(t)), \\ g(t) = \sum_{\gamma' \in \mathbb{N}^{m'}} f(t)^{\gamma'} \bar{\Theta}'_{\gamma'}(\bar{h}(\tau)). \end{array} \right.$$

Considérons les deux familles de dérivations :

$$\begin{cases} \mathcal{L}^\beta := (\mathcal{L}_1)^{\beta_1}(\mathcal{L}_1)^{\beta_2} \dots (\mathcal{L}_m)^{\beta_m} & \text{et} \\ \underline{\mathcal{L}}^\beta := (\underline{\mathcal{L}}_1)^{\beta_1}(\underline{\mathcal{L}}_1)^{\beta_2} \dots (\underline{\mathcal{L}}_m)^{\beta_m}, \end{cases}$$

où $\beta = (\beta_1, \beta_2, \dots, \beta_m) \in \mathbb{N}^m$. En les appliquant aux deux équations précédentes, on obtient *quatre* familles d'identités de réflexion. La première paire est :

$$\begin{cases} \underline{\mathcal{L}}^\beta \bar{g}(\tau) = \sum_{\gamma' \in \mathbb{N}^{m'}} \underline{\mathcal{L}}^\beta [\bar{f}(\tau)^{\gamma'}] \Theta'_{\gamma'}(h(t)), \\ 0 = \sum_{\gamma' \in \mathbb{N}^{m'}} f(t)^{\gamma'} \underline{\mathcal{L}}^\beta [\bar{\Theta}'_{\gamma'}(\bar{h}(\tau))]. \end{cases}$$

La seconde paire est :

$$\begin{cases} \mathcal{L}^\beta g(t) = \sum_{\gamma' \in \mathbb{N}^{m'}} \mathcal{L}^\beta [f(t)^{\gamma'}] \bar{\Theta}'_{\gamma'}(\bar{h}(\tau)), \\ 0 = \sum_{\gamma' \in \mathbb{N}^{m'}} \bar{f}(\tau)^{\gamma'} \mathcal{L}^\beta [\Theta'_{\gamma'}(h(t))]. \end{cases}$$

Dans la preuve du théorème, il faut jongler entre ces quatre identités. Les travaux précédents sur le principe de réflexion analytique utilisent seulement la première identité ainsi que sa «conjuguée complexifiée», *i.e.* la troisième.

Dans le théorème et dans ses applications, la minimalité de $(M, 0)$ est utilisée, mais elle ne semble pas être requise. Les résultats précédents restent-ils vrais lorsque $(M, 0)$ est minimale en un point Zariski-générique, mais pas forcément à l'origine ?

Question Ouverte. Soit h une équivalence formelle entre deux sous-variétés génériques analytiques réelles de \mathbb{C}^n qui sont minimales en un point Zariski-générique.

- L'application de réflexion \mathcal{R}'_h est-elle convergente ?
- L'application h est-elle déterminée uniquement par un jet d'ordre fini lorsque la cible est holomorphiquement non-dégénérée ?
- L'application h est-elle convergente sous l'hypothèse que la cible analytique réelle M' ne contient pas de courbe holomorphe ?

Algébricité de l'application de réflexion. L'énoncé suivant produit une synthèse définitive et complète du principe de réflexion algébrique.

Théorème. *Si h est une application holomorphe locale $(M, 0) \rightarrow (M', 0')$, si M et M' sont algébriques, si M est minimale en un point Zariski-générique et si M' est la plus petite (pour l'inclusion) sous-variété générique algébrique réelle locale contenant $h(M)$, alors l'application de réflexion $\mathcal{R}'_h(\tau', t)$ est algébrique.*

Des exemples triviaux contredisent l'algébricité de \mathcal{R}'_h lorsque M' n'est pas minimale pour l'inclusion contenant $h(M)$. Dans la démonstration de ce théorème, on se déplace en un point minimal $p \in M$ arbitrairement proche de l'origine. Mais lorsque h n'est qu'une application formelle, cette délocalisation est impossible.

Applications CR \mathcal{C}^∞ essentiellement finies Considérons une application CR $h : M \rightarrow M'$ de classe \mathcal{C}^∞ entre deux sous-variétés génériques analytiques réelles $M \subset \mathbb{C}^n$ et $M' \subset \mathbb{C}^{n'}$. Soit $p \in M$ et $p' := h(p) \in M'$. La série de Taylor $T^\infty h(p)$ de h en p induit une application CR formelle entre (M, p) et (M', p') . L'application h est dite *essentiellement finie* en p si

$$T^\infty h(p) : (M, p) \mapsto_{\mathcal{F}} (M', p')$$

est essentiellement finie.

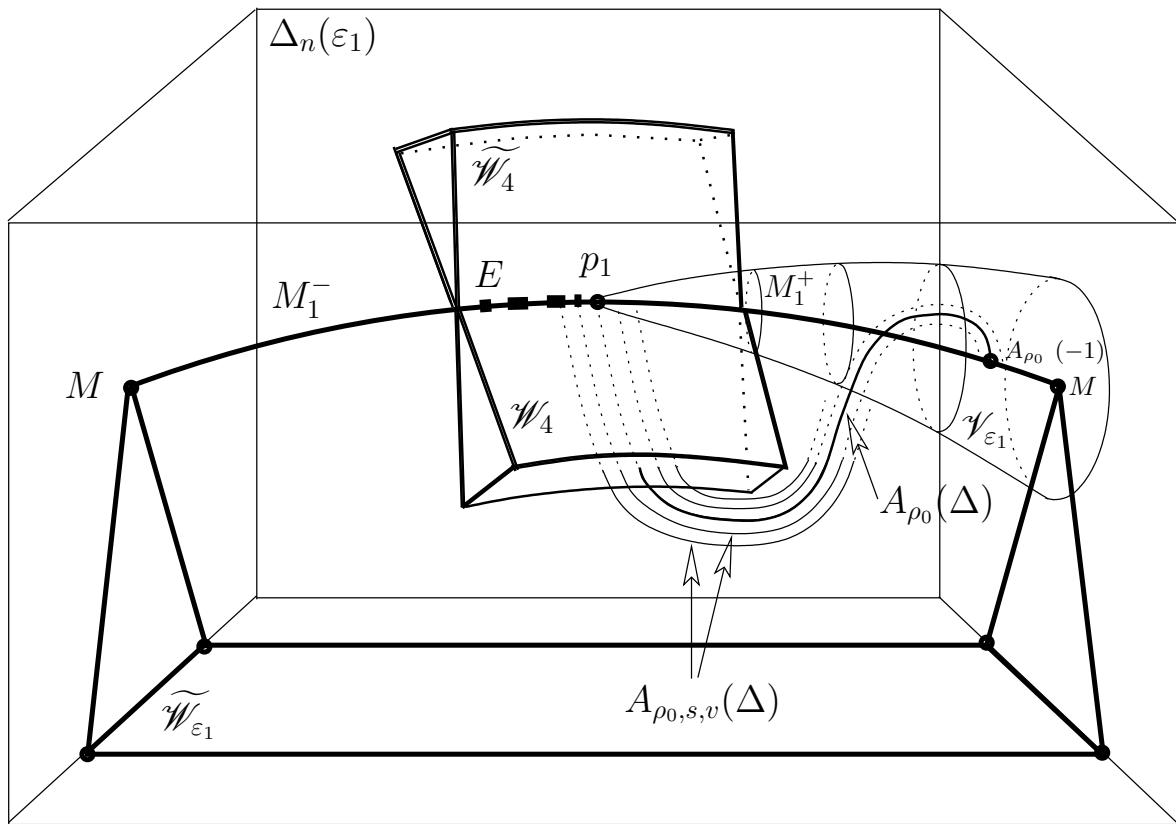
Baouendi-Jacobowitz-Treves 1985, Diederich-Fornæss 1988, Coupet-Pinchuk-Sukhov 2000, Damour 2001, M. 2004.

Économiser l'hypothèse de minimalité de M .

Théorème. Soit $h : (M, p) \rightarrow (M', p')$ une application CR de classe \mathcal{C}^∞ entre deux sous-variétés génériques locales $(M, p) \subset \mathbb{C}^n$ et $(M', p') \subset \mathbb{C}^{n'}$. Supposons h essentiellement finie en p et supposons qu'il existe un wedge local \mathcal{W}_p d'edge M en p tel que h se prolonge holomorphiquement à \mathcal{W}_p . S'il existe des points

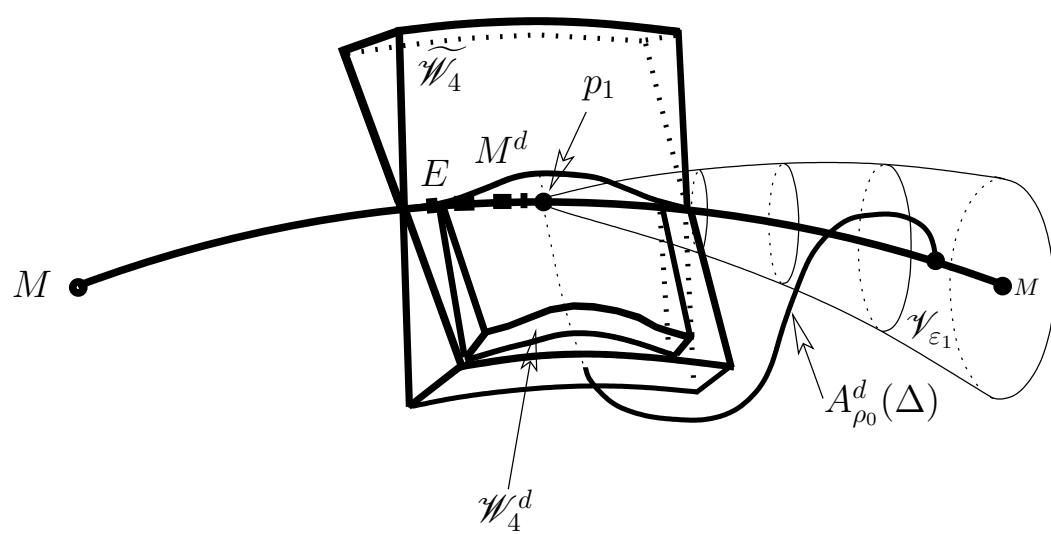
$$q \in \mathcal{O}_{CR}(M, p)$$

arbitrairement proches de l'origine au voisinage desquels h est analytique réelle, alors h se prolonge holomorphiquement à un voisinage de p dans \mathbb{C}^n .



EXTENSION MÉROMORPHE À UN VOISINAGE DE p_1

Corollaire. [BJT1985] Soit $h : (M, p) \rightarrow (M', p')$ un difféomorphisme CR local de classe \mathcal{C}^∞ . Si M' est essentiellement finie en p' et si h se prolonge holomorphiquement à un wedge en p , alors h se prolonge holomorphiquement à un voisinage de p dans \mathbb{C}^n .



ARGUMENT DE DÉFORMATION DANS LE WEDGE \mathcal{W}_4 AU-DESSUS DE p_1

Applications CR de classe \mathcal{C}^∞ en type fini

Théorème. Soit $h : M \rightarrow M'$ une application CR de classe \mathcal{C}^∞ entre deux hypersurfaces analytiques réelles connexes de \mathbb{C}^n ($n \geq 2$). Si M et M' ne contiennent pas de courbe holomorphe, h est analytique réelle en tout point de M .

Diederich-Pinchuk 2003 : $h \in \mathcal{C}^0$.

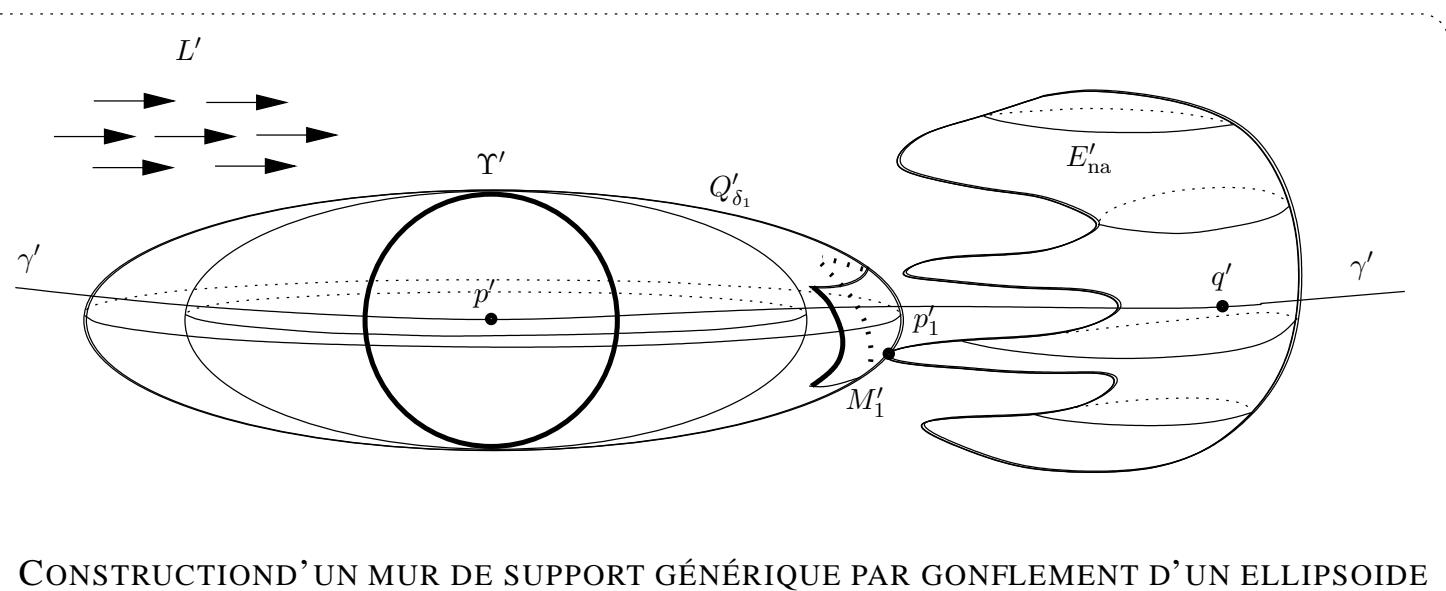
Généralisation : M et M' essentiellement finies et $h \in \mathcal{C}^\infty$ de rang générique égal à $2n - 1$.

Question Ouverte. Soit $h : M \rightarrow M'$ une application CR continue entre deux sous-variétés génériques analytiques réelles connexes $M \subset \mathbb{C}^n$ et $M' \subset \mathbb{C}^{n'}$. Supposons que M est globalement minimale et que M' ne contient pas de courbe holomorphe. L'application h est-elle \mathcal{C}^ω en tout point de M ?

Problème Ouvert. Élaborer des algorithmes explicites de modification de Nash et d'éclatement locaux afin de simplifier la géométrie CR des sous-variétés génériques analytiques réelles et de démontrer ainsi des versions du principe de réflexion qui sont hors d'atteinte avec les techniques actuelles.

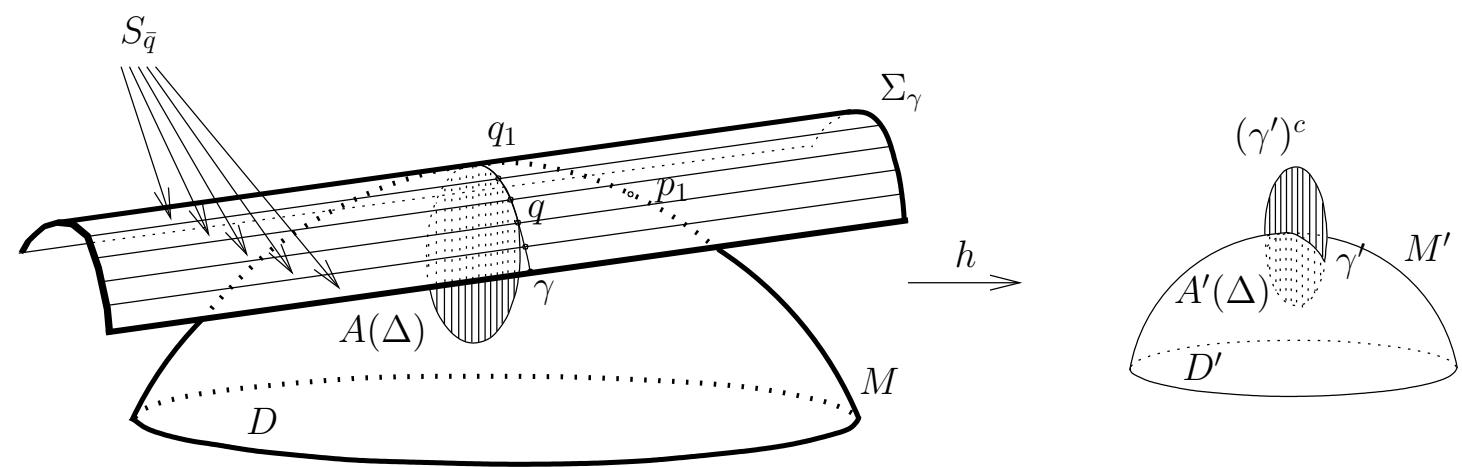
Analyticité de l'application de réflexion CR lisse

Théorème. Si $h : M \rightarrow M'$ est un difféomorphisme CR de classe \mathcal{C}^∞ entre deux hypersurfaces analytiques réelles globalement minimales de \mathbb{C}^n , alors en tout point $p \in M$ et pour tout choix de coordonnées locales centrées en $p' := h(p)$ dans lesquelles (M', p') est représentée par $\bar{w}' = \Theta'(\bar{z}', t')$, la fonction de réflexion associée $\mathcal{R}'_h(t, \bar{\nu}') = \bar{\mu}' - \Theta'(\bar{\lambda}', h(t))$ et centrée en $p \times \bar{p}'$ se prolonge holomorphiquement à un voisinage de $p \times \bar{p}'$ dans $\mathbb{C}^n \times \mathbb{C}^n$. Si de plus M' est holomorphiquement non-dégénérée, h se prolonge holomorphiquement à un voisinage de M dans \mathbb{C}^n .



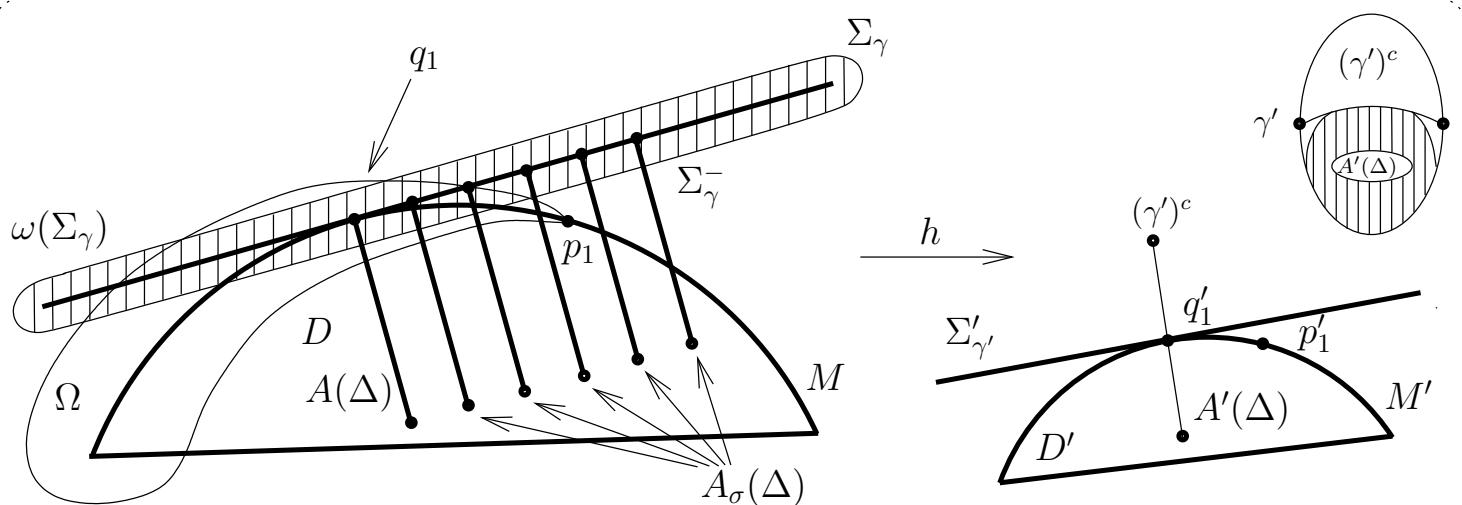
CONSTRUCTION D'UN MUR DE SUPPORT GÉNÉRIQUE PAR GONFLEMENT D'UN ELLIPSOÏDE

L'idée principale consiste à recouvrir M d'un « chapeau » Levi-plat, celui-ci étant constitué des variétés de Segre qui sont attachées à tous les points de M situés sur une courbe locale γ transverse à $T^c M$.



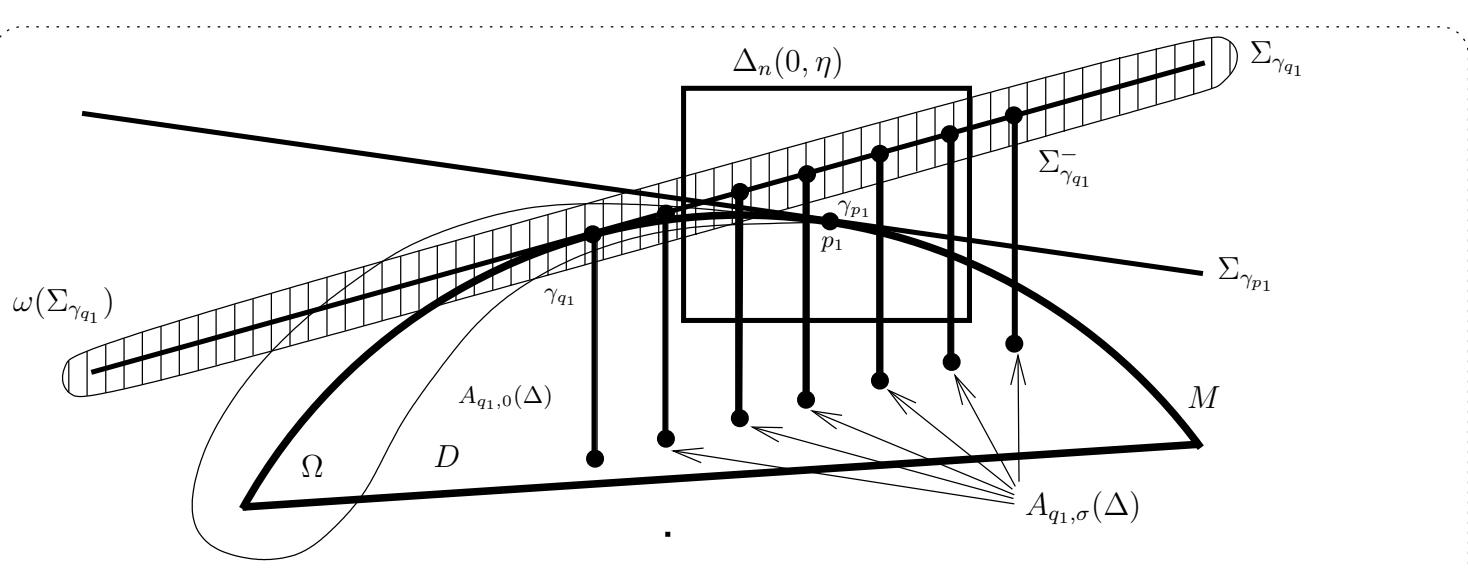
LE DOMAINE D RECOUVERT D'UN CHAPEAU LEVI-PLAT

Voisinage de Σ_γ et disques semi-attachés.



ENVELOPE D'HOLOMORPHIE DU DOMAINE D ET SON CHAPEAU LEVI-PLAT

Famille de disques analytiques remplissant l'espace entre Σ_γ et D .



ENVELOPE D'HOLOMORPHIE DU DOMAINE RECOUVERT PAR SON CHAPEAU LEVI-PLAT

V. Perspectives

- Classifications d’algèbres de Lie et classifications locales de variétés CR.
- Connexion de Cartan pour les hypersurfaces 2-non-dégénérées de \mathbb{C}^3 à forme de Levi de rang 1.
- Description de wedges attachés en presque complexe.
- Condition nécessaire et suffisante pour l’algébrisabilité locale de sous-variétés CR analytiques réelles de \mathbb{C}^n .
- Caractérisation explicite de la linéarisabilité des systèmes newtoniens à $m \geqslant 2$ degrés de liberté.
- Exploitation et développement des programmes de calcul formel consacrés à l’algèbre différentielle et à la méthode d’équivalence d’Élie Cartan.
- Théorème d’aplatissement (Hironaka-Lejeune-Teissier), jets de variétés de Segre et applications CR.
- Cohomologie des algèbres de Lie et symétrie des équations aux dérivées partielles.
- Classification des algèbres de Lie nilpotentes et variétés génériques de dimension CR égale à 1.