Surfaces de Veech associées aux billards rationnels

Samuel Lelièvre

30 septembre 2001

Version du 30 septembre 2001.

Introduction

Un bon moyen d'étudier le flot du billard dans un polygone rationnel est d'utiliser une surface plate construite par collage d'un certain nombre d'exemplaires du polygone de départ. Cette construction est décrite notamment dans [FoxKsh36] puis dans [KtkZml75].

La surface construite est naturellement munie d'une différentielle quadratique, qui est en fait le carré d'une différentielle abélienne.

Les surfaces dont le groupe de Veech est de covolume fini présentent un intérêt particulier. Plusieurs séries de polygones donnent lieu à de telles surfaces, et ont été décrites dans [GutJdg96, GutJdg00, HbtSch00, KenSmi00, Vch89, Vch92, Vrb96, Wrd98].

Plan On rappelle tout d'abord le contexte en fixant le vocabulaire et quelques notations. Puis on décrit en détail les résultats connus sur les surfaces de Veech provenant des billards triangulaires. Le lecteur intéressé trouvera quelques tableaux annexes sur la page web de l'auteur.

Vocabulaire et notations

Angles

Un angle $\alpha \in [0, \pi]$ est dit nul si $\alpha = 0$, aigu si $0 < \alpha < \pi/2$, droit si $\alpha = \pi/2$, obtus si $\pi/2 < \alpha < \pi$, plat si $\alpha = \pi$.

Polygone rationnel Un polygone est dit rationnel si les angles entre ses côtés sont tous rationnels en unité π.

Remarque (concernant les polygones non simplement connexes) : cette condition ne concerne pas uniquement les angles entre côtés adjacents.

Triangles

Ouverture Un triangle est dit aplati s'il a un angle nul. Par la suite tous les triangles dont il est question sont non aplatis. Un triangle est dit acutangle si tous ses angles sont aigus, rectangle s'il a un angle droit, obtusangle s'il a un angle obtus.

Scalénité Un triangle est équilatéral si ses trois angles sont égaux, isocèle si deux de ses angles sont égaux, scalène sinon.

Notation La notation $\mathrm{T}(a, b, c)$ où $a, b, c \in \mathbf{N}^*$ désigne le triangle $(\frac{a}{d}\pi, \frac{b}{d}\pi, \frac{c}{d}\pi)$ où $d = a + b + c$. Cette notation est unique si on impose $\mathrm{pgcd}(a, b, c) = 1$ et $a \leqslant b \leqslant c$.

Groupes triangulaires

On note $\triangle(p, q, r)$ le groupe (p, q, r)-triangulaire. Voir [Brd83].

Différentielle abélienne, différentielle quadratique

On appelle différentielle abélienne une 1-forme différentielle holomorphe sur une surface de Riemann. Une différentielle quadratique sur une surface de Riemann privée d'un nombre fini de points est la donnée d'une fonction holomorphe $\phi_1(z_1)$ dans chaque carte z_1 telle que si z_2 est une autre carte, $\phi_1(z_1) = \phi_2(z_2)(dz_2/dz_1)^2$. En un point singulier on demande que ϕ ait au plus un pôle simple.

Surfaces de translation et de demi-translation

Une structure de translation sur une surface est un atlas sur cette surface privée d'un nombre fini de points, dont les changements de cartes sont des translations. Une surface qui admet une structure de translation est dite surface de translation.

Une structure de demi-translation sur une surface est un atlas sur cette surface privée d'un nombre fini de points, dont les changements de cartes sont des translations éventuellement composées avec une symétrie centrale. Une surface qui admet une structure de demi-translation est dite surface de demi-translation.

Une structure de translation peut être complétée en une structure de demi-translation. En revanche, à partir d'une structure de demi-translation, on ne peut en général obtenir de structure de translation qu'en passant à un revêtement double ramifié.

Surfaces associées à un billard rationnel

Billard rationnel : billard dans un polygone rationnel.

Il lui correspond une surface de translation (voir [FoxKsh36, KtkZml75]). On peut adapter la construction classique pour obtenir une surface de demi-translation. Dans certains cas la surface obtenue est la même, mais parfois la surface de translation est revêtement double de la surface de demi-translation obtenue.

Surface de translation Construction classique : on part d'un polygone d'angles $\frac{m_i}{n_i}\pi$, avec $\mathrm{ppcm}(n_i) = N$. À chaque sommet d'angle $\frac{m_i}{n_i}\pi$ du polygone correspondent sur la surface N/n_i points singuliers de multiplicité m_i (points coniques d'angle $m_i 2\pi$, ou encore zéros d'ordre $m_i - 1$ de la différentielle abélienne).

Surface de demi-translation Construction réduite : on exprime les angles du polygone en fractions de $\pi/2$. On part d'un polygone d'angles $\frac{m_i}{n_i}\frac{\pi}{2}$, avec $\mathrm{ppcm}(n_i) = N$. À chaque sommet d'angle $\frac{m_i}{n_i}\frac{\pi}{2}$ du polygone correspondent sur la surface N/n_i points singuliers de multiplicité $m_i/2$ (points coniques d'angle $m_i\pi$, ou encore zéros d'ordre $m_i - 2$ de la différentielle quadratique).

Comparaison Ces constructions sont identiques si et seulement si le N classique est impair. Dans le cas contraire, la surface de translation est revêtement double ramifié de la surface de demi-translation.

Remarque : en exprimant les angles en unité π/k on peut construire une surface "de $1/k$-translation", munie d'une différentielle d'ordre k. En particulier, c'est une surface plate à singularités coniques d'angles multiples de $2\pi/k$.

Groupe de Veech

Sur une surface de translation on peut considérer les difféomorphismes affines (difféomorphismes sur la surface privée des points singuliers, affines dans les cartes de la structure de translation, qui se prolonge en un homéormorphisme de la surface). Les dérivées (ou parties linéaires) de ces difféomorphismes forment un sous-groupe de $\mathrm{SL}^{\pm}(2, \mathbf{R})$. Si on part des difféomorphismes préservant l'orientation, on obtient un sous-groupe de $\mathrm{SL}(2, \mathbf{R})$.

Pour les surfaces de demi-translation on travaille modulo $-\mathrm{Id}$ si bien qu'on obtient des sous-groupes de $\mathrm{PSL}^{\pm}(2, \mathbf{R})$ ou $\mathrm{PSL}(2, \mathbf{R})$.

On appelle groupe de Veech le sous-groupe de $\mathrm{PSL}(2, \mathbf{R})$ obtenu.

Pour une surface de translation ou de demi-translation, on note Γ_Σ le groupe de Veech de cette surface avec toutes ses singularités coniques (y compris les illusoires), et Γ_Z le groupe de Veech de la surface avec seulement les singularités coniques non illusoires (celles qui correspondent à des zéros ou pôles de la différentielle).

Propriété de réseau

Une surface a la propriété de réseau (ou propriété de Veech) si son groupe de Veech est de covolume fini dans $\mathrm{PSL}(2, \mathbf{R})$.

Un polygone a la propriété de réseau (ou propriété de Veech) si la surface associée a cette propriété.

La propriété de réseau est intéressante en cela qu'elle entraîne de bonnes propriétés d'ergodicité (en particulier l'alternative de Veech : dans chaque direction le flot est soit périodique soit uniquement ergodique).

Dans la section suivante on examine des séries de triangles connus pour avoir la propriété de réseau.

1 Séries de triangles

Les séries considérées ici sont surtout des séries de triangles.

Les triangles sont les polygones les plus simples. En particulier, dans un triangle, la donnée des angles détermine entièrement le polygone à un facteur d'échelle près (ce n'est pas le cas dans les autres polygones).

Voici d'où en est la caractérisation des triangles rationnels ayant la propriété de réseau.

- Triangles rectangles : on sait caractériser ceux qui ont la propriété de réseau.
- Triangles acutangles : on sait caractériser ceux qui ont la propriété de réseau ;
- Triangles obtusangles
  - isocèles : on sait caractériser ceux qui ont la propriété de réseau ;
  - scalènes : réponses partielles.

1.1 Triangles rectangles

Propriété de réseau

Théorème (Vorobets, Kenyon–Smillie). *Un triangle rectangle a la propriété de réseau si et seulement si son plus petit angle est de la forme π/n pour $n \geqslant 4$.*

Vorobets montre dans [Vrb96, section 4] que la condition est suffisante.

Kenyon et Smillie montrent dans [KenSmi00, section 6] qu'elle est nécessaire.

Groupe de Veech Le groupe de Veech de la surface de translation associée au triangle $\mathrm{T}(2, n-2, n)$ est $\triangle(2, n, \infty)$ si n est impair, et $\triangle(n/2, \infty, \infty)$ si n est pair. Ce fait est démontré par Vorobets dans [Vrb96, section 4].

(Il s'agit du groupe de Veech de la surface avec seulement sa singularité non illusoire.)

1.2 Triangles acutangles

1.2.1 Isocèles

Propriété de réseau

Théorème (Kenyon–Smillie). *Un triangle isocèle acutangle a la propriété de réseau si et seulement si l'angle au sommet est de la forme π/n pour $n \geqslant 3$.*

Pour montrer que la condition est suffisante, on se ramène au cas des triangles rectangles par dépliage, voir [Vrb96, section 5] ou [GutJdg00].

Kenyon et Smillie montrent dans [KenSmi00, section 6] que la condition est nécessaire.

Groupe de Veech Le groupe de Veech est précisé dans [HbtSch00] :

Théorème (Hubert–Schmidt). *Pour $n \geqslant 4$, le groupe de Veech de la surface associée au triangle isocèle d'angle au sommet π/n est $\triangle(n, \infty, \infty)$.*

La démonstration, faite sur un exemple dans [EarGrd97], est valable pour le cas général.

1.2.2 Scalènes

Propriété de réseau

Théorème (Kenyon–Smillie, Puchta). *Un triangle acutangle scalène a la propriété de réseau si et seulement si c'est un des triangles exceptionnels*

$$\mathrm{T}(2,3,4) = (\frac{2\pi}{9}, \frac{\pi}{3}, \frac{4\pi}{9}), \quad \mathrm{T}(3,4,5) = (\frac{\pi}{4}, \frac{\pi}{3}, \frac{5\pi}{12}), \quad \mathrm{T}(3,5,7) = (\frac{\pi}{5}, \frac{\pi}{3}, \frac{7\pi}{15}).$$

Kenyon et Smillie [KenSmi00] ont démontré ce résultat pour les triangles dont le dénominateur commun des angles est inférieur à 10000, en émettant la conjecture que cette majoration n'était pas nécessaire, ce qui a été établi par Puchta.

Veech mentionne $\mathrm{T}(3,4,5)$ dans [Vch89], Vorobets mentionne $\mathrm{T}(3,4,5)$ et $\mathrm{T}(3,5,7)$ dans [Vrb96] ; $\mathrm{T}(2,3,4)$ ne semble pas avoir été cité avant l'article [KenSmi00].

Groupe de Veech Hubert et Schmidt [HbtSch01] donnent les groupes de Veech de ces triangles : $\Gamma(2,3,4) = \triangle(9,\infty,\infty)$, $\Gamma(3,4,5) = \triangle(6,\infty,\infty)$, $\Gamma(3,5,7) = \triangle(15,\infty,\infty)$.

1.3 Triangles obtusangles

1.3.1 Isocèles

Propriété de réseau Dans [Wrd98], Ward définit les triangles « pointus » (*sharp triangles*) de la forme $(\frac{\pi}{m}, \frac{p\pi}{m}, \frac{q\pi}{m})$ avec $p < q$ et $4p \leqslant m$.

Théorème (Ward). *Un triangle pointu pour lequel p ou m est impair a la propriété de réseau si et seulement si $p = 1$ (il s'agit alors d'un triangle isocèle).*

Groupe de Veech Le groupe de Veech est donné par Veech :

Théorème (Veech). *Pour tout $n \geqslant 5$, le groupe de Veech de la surface associée au triangle isocèle d'angle de base π/n est $\triangle(2, n, \infty)$ si n est impair, et $\triangle(m, \infty, \infty)$ si $n = 2m$.*

Par ailleurs :

Proposition (Hubert–Schmidt). *Soit $n \geqslant 5$ et k tel que $1 \leqslant k \leqslant \lfloor \frac{n-1}{2} \rfloor$ et $(k, n) = 1$. Les surfaces associées aux triangles isocèles d'angles de base π/n et $k\pi/n$ sont biholomorphement équivalentes.*

Cette proposition de [HbtSch00] généralise un exemple de [AurItz88].

1.3.2 Scalènes

Des exemples de Vorobets [Vrb96] et Ward [Wrd98] montrent que parmi les triangles obtusangles avec deux angles de la forme π/n, certains ont la propriété de réseau et d'autres non.

Ils ont en particulier étudié les triangles de plus petits angles $\pi/2n$ et π/n.

Théorème. *Pour $n \geqslant 4$, le groupe de Veech de la surface associée au triangle $(\frac{\pi}{2n}, \frac{\pi}{n}, \frac{(2n-3)\pi}{2n})$ est $\triangle(3, n, \infty)$.*

Vorobets avait établi que c'était un réseau mais c'est Ward [Wrd98, Théorème A] qui a identifié le groupe triangulaire.

Vorobets montre que les triangles $\mathrm{T}(1,3,8)$ et $\mathrm{T}(2,3,7)$ n'ont pas la propriété de réseau. (Pour le premier, on peut le voir avec le critère des triangles « pointus » de Ward.)

2 Autres polygones

2.1 Polygones réguliers

Le cas des polygones réguliers est très lié aux triangles (pavage).
Les polygones réguliers ont la propriété de réseau.
Le groupe de Veech de la surface associé au n-gone régulier est...

2.2 Autres polygones

Les autres polygones étudiés sont notamment les rectangles, les losanges, les carrés avec un mur.

Annexes

Quelques tableaux numériques peuvent être trouvés sur la page web de l'auteur.

Références

[AurItz88] E. Aurell, C. Itzykson. Rational billiards and algebraic curves. *J. Geom. Phys.* **5** :2 (1988) 191–208.

[Brd83] A. Beardon. *The geometry of discrete groups.* GTM **91**. Springer-Verlag, 1983. NB : Corrected reprint, 1995.

[EarGrd97] C. Earle, F. P. Gardiner. Teichmüller disks and Veech's F-structures. *Extremal Riemann Surfaces.* Contemp. Math. **201**. AMS, 1997, pp.165–189.

[FoxKsh36] R. H. Fox, R. B. Kershner. Geodesics on a rational polyhedron. *Duke Math. J.* **2** (1936) 147-150.

[GutJdg96] E. Gutkin, C. Judge. The geometry and arithmetic of translation surfaces with applications to polygonal billiards. *Math. Res. Lett.* **3** (1996) 391–403.

[GutJdg00] E. Gutkin, C. Judge. Affine mappings of translation surfaces : geometry and arithmetic. *Duke Math. J.* **103** (2000) 191–213.

[HbtSch00] P. Hubert, T. Schmidt. Veech groups and polygonal coverings. *J. Geom. Phys.* **35** :1 (2000) 75–91.

[HbtSch01] P. Hubert, T. Schmidt. Invariants of translation surfaces. *Annales Institut Fourier* **51** :2 (2001) 461–495.

[KtkZml75] A. B. Katok, A. N. Zemlyakov. Topological transitivity of billiards in polygons. *Math. Notes* **18** :2 (1975) 760-764.
Voir aussi *Math. Notes* **20** :6 (1976) 883.

[KenSmi00] R. Kenyon, J. Smillie. Billiards on rational-angled triangles. *Comment. Math. Helv.* **75** :1 (2000) 65–108.

[Vch89] W. A. Veech. Teichmüller curves in moduli space, Eisenstein series and an application to triangular billiards. *Invent. Math.* **97** (1989) 553–583.
Erratum : *Invent. Math.* **103** (1991) 447.

[Vch92] W. A. Veech. The billiard in a regular polygon. *Geom. and Func. Anal.* **2** (1992) 341–379.

[Vrb96] Ya. B. Vorobets. Planar structures and billiards in rational polygons : the Veech alternative. *Russ. Math. Surv.* **51** :5 (1996) 779–817.

[Vrb97] Ya. B. Vorobets. Ergodicity of billiards in polygons. *Mat. Sb.* **188** :3 (1997) 65–112.

[Wrd98] C. C. Ward. Calculation of Fuchsian groups associated to billiards in a rational triangle. *Erg. Th. & Dyn. Sys.* **18** :4 (1998) 1019–1042.

Samuel Lelièvre
Adresse postale : Irmar, Campus de Beaulieu, Université de Rennes 1, 35042 Rennes, France
Téléphone : (+33) 299 282 665
Courriel : `slelievr@maths.univ-rennes1.fr`
Page web : `http ://www.maths.univ-rennes1.fr/~slelievr/`