

Test n°4 (\mathbb{C} , EDL₂, courbes paramétrées, fonctions de plusieurs variables)

Pour chacune des questions, répondez par vrai ou faux
puis justifiez soigneusement votre réponse.

- 1) La similitude donnée par $z \mapsto (2 - 2i)z + 1$ a pour rapport $2\sqrt{2}$, pour angle $-\frac{\pi}{4}$ et pour centre le point d'affixe $-\frac{1}{5} - \frac{2}{5}i$.
- 2) La similitude du plan qui envoie respectivement les points de coordonnées $(1, -1)$ et $(1, 1)$ sur les points de coordonnées $(2, 0)$ et $(0, 0)$ a pour centre le point de coordonnées $(0, 1)$.
- 3) Soit $a \in \mathbb{C}^*$, la réciproque de la similitude $z \mapsto az + b$ est la similitude $z \mapsto \frac{1}{a}z - \frac{b}{a}$.
- 4) La restriction de la fonction exponentielle, $\exp : \mathbb{C} \rightarrow \mathbb{C}^*$, à $A = \{x + iy : x \in \mathbb{R}, y \in]1, 1 + 2\pi]\} \subset \mathbb{C}$ est une bijection.
- 5) Soit $a : I \rightarrow \mathbb{C}$, une fonction continue sur I un intervalle de \mathbb{R} . Si la fonction $z : I \rightarrow \mathbb{C}$ est solution de l'équation (E): $z' = az$, alors $\operatorname{Re}(z)$ et $\operatorname{Im}(z)$ sont aussi des solutions de (E).
- 6) Soient a, b et c des réels et $f : I \rightarrow \mathbb{C}$ une fonction à valeurs complexes définie sur un intervalle I de \mathbb{R} contenant $\frac{3}{2}$. Soit Y une solution complexe de l'équation différentielle $aY'' + bY' + cY = f$ telle que $Y(\frac{3}{2}) = 2e^{i\frac{\pi}{3}}$. La fonction $y = \frac{Y + \bar{Y}}{2}$ est solution de l'équation différentielle $ay'' + by' + cy = \operatorname{Re}(f)$ et satisfait $y(\frac{3}{2}) = 1$.
- 7) Il existe une unique solution, $y : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$, de l'équation différentielle $y'' + \pi^2 y = \cos(\pi t)$ satisfaisant $y(0) = 0$ et $y(2) = 1$.
- 8) Il existe une unique solution, $y : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$, de l'équation différentielle $y'' + \pi^2 y = \cos(\pi t)$ satisfaisant $y(0) = -1$ et $y(2) = -1$.
- 9) Il existe une unique solution, $y : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$, de l'équation différentielle $y'' + \pi^2 y = \cos(\pi t)$ satisfaisant $y(0) = \frac{1}{2\pi^2}$ et $y'(\frac{1}{2}) = 0$.
- 10) Soient y et z des fonctions à valeurs réelles telles que $y(t) = tz(t)$ pour tout t de $I =]0, +\infty[$. Alors y satisfait $t^2 y'' - ty' + y = 2t$ sur I si et seulement si z' satisfait $t^2 u' + tu = 2$ sur I .
- 11) Soit $\gamma : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}^2$ la courbe paramétrée $\gamma(t) = (x(t), y(t))$. Son support est symétrique par rapport à la droite d'équation $y = x$ si et seulement si pour tout réel t , $x(-t) = y(t)$ et $y(-t) = x(t)$.
- 12) Les trois courbes paramétrées suivantes ont même support :
- $$\begin{aligned} \gamma_1(t) &= (\cos t, \sin t), \quad \text{pour } t \in \mathbb{R}, \\ \gamma_2(t) &= (\cos t, \sin t), \quad \text{pour } t \in [0, 2\pi], \\ \gamma_3(t) &= \left(\frac{1-t^2}{1+t^2}, \frac{2t}{1+t^2} \right), \quad \text{pour } t \in \mathbb{R}. \end{aligned}$$
- 13) Le support de la courbe paramétrée $\gamma :]0, +\infty[\rightarrow \mathbb{R}^2$ définie par $\gamma(t) = (\ln t, 3 \ln(6t))$ est une droite de \mathbb{R}^2 .

14) Le support de la courbe paramétrée $\gamma(t) : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}^2$ définie par la formule $\gamma(t) = (|t|, t)$ est la droite d'équation $y = x$.

15) Soit r et θ deux fonctions de classe C^1 sur un intervalle I de \mathbb{R} . La distance parcourue le long de la courbe paramétrée $(r(t) \cos \theta(t), r(t) \sin \theta(t))$ entre les temps t_0 et t_1 (avec t_0 et $t_1 \in I$) est donnée par la formule

$$\int_{t_0}^{t_1} \sqrt{(r'(t))^2 + (r(t)\theta'(t))^2} dt.$$

16) Soit $f : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$ la fonction définie par $f(x, y) = x^2 + y^2$ et $\gamma : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}^2$ la courbe paramétrée $\gamma(t) = (e^t \cos t, e^t \sin t)$. La dérivée de f le long de γ à l'instant t est $4 e^t \sin t$.

17) La fonction $g : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$ définie par la formule $g(x, y) = x^2 y + x y^2$ admet comme unique point critique le point $(0, 0)$.

18) J'ai répondu "faux" à cette question.