

Test n°3 (intégration, équations différentielles – 1)

Pour chacune des questions, répondez par vrai ou faux
puis *justifiez soigneusement votre réponse*.

1) Soit f une fonction continue sur \mathbb{R} , et F une fonction de classe C^1 sur \mathbb{R} telles que $F'(x) = xf(x)$ pour tout x de \mathbb{R} et $F(0) = 0$. Alors les primitives de f sont de la forme $\frac{F(x)}{x} + c$ avec $c \in \mathbb{R}$.

2) Si $f : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ est une fonction continue telle que $|\int_a^b f(t) dt| = 0$, alors $f(x) = 0$ pour tout x dans $[a, b]$.

3) Soit f une fonction continue sur $[-\frac{1}{2}, \frac{1}{2}]$. Le changement de variable $t = \sin x$ donne

$$\int_{-\frac{1}{2}}^{\frac{1}{2}} f(t) dt = \int_{-\frac{5\pi}{6}}^{\frac{\pi}{6}} f(\sin x) \cos x dx .$$

4) Si f est une fonction continue croissante sur \mathbb{R} , alors la fonction g définie sur \mathbb{R} par la formule

$$g(x) = \int_{x^3}^{x^3+1} f(t) dt$$

est une fonction de classe C^1 , croissante sur \mathbb{R} .

5) Soit f une fonction paire, continue sur \mathbb{R} . Alors la fonction g définie par

$$g(x) = \int_{\arctan x}^{\arctan(x^3)} f(t) dt$$

est une fonction paire, de classe C^1 sur \mathbb{R} .

6) On a l'égalité suivante: $\int_0^1 x^2 \sqrt{1+x} dx = \frac{44\sqrt{2}-8}{105}$.

7) On a l'égalité suivante: $\int_0^1 \sqrt{1-x^2} dx = \frac{\pi}{4}$.

8) La fonction $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ définie par $f(0) = 0$ et $f(x) = x^3 \sin(\frac{1}{x})$ pour $x \neq 0$ n'est pas de classe C^2 mais admet un développement limité à l'ordre 2 en 0.

9) On a l'égalité suivante: $\int_0^{\ln \frac{\pi}{2}} e^x \sin(2e^x) dx = (\cos 1)^2$.

10) Soient F une primitive de $\sin^2(e^x)$ et G une primitive de $\cos^2(e^x)$ sur \mathbb{R} . Alors la fonction $F + G$ est une fonction constante sur \mathbb{R} .

11) Toutes les solutions sur \mathbb{R} de l'équation différentielle : $y'' - 2ty' = t$ satisfaisant $y(-1) = 1$ sont les fonctions

$$y(t) = C \cdot \int_{-1}^t e^{s^2} ds + \frac{1}{2}(1-t) \quad \text{avec } C \in \mathbb{R} .$$

12) Soit a une fonction continue sur \mathbb{R} . Toutes les solutions de l'équation différentielle $y' = a(t)y$ tendent vers $-\infty$ ou $+\infty$ quand t tend vers $+\infty$.

13) Si une fonction est solution de l'équation différentielle $y' - y = \sin t$ sur \mathbb{R} , elle doit admettre 2π comme période.

14) La différence entre deux solutions sur \mathbb{R}_+^* de l'équation différentielle $ty' + y = t \cos t$ est du type $t \mapsto \frac{c}{t}$ avec $c \in \mathbb{R}$.

15) Il existe une unique solution de l'équation différentielle $y' = \arctan(e^t) y$ sur \mathbb{R} , qui s'annule en $t = 3$.

16) Il n'existe aucune solution de l'équation différentielle $ty' - 3y = 0$ sur \mathbb{R} , qui soit positive sur \mathbb{R} tout entier.

17) Il existe une unique solution de l'équation différentielle $t^2y' - 2ty = 0$ sur \mathbb{R} , telle que $y(2) = 12$.

18) Sur \mathbb{R}_+^* , les fonctions $t \mapsto ct^te^{-t}$ (avec $c \in \mathbb{R}$) sont solutions de l'équation différentielle $y' = y \ln t$.

19) Poser $u = \frac{y}{t}$ permet de transformer l'équation $y' = \frac{t^2+y^2}{ty}$ en une équation d'ordre 1 à variables séparables, satisfaite par u .

20) Soit f une solution de l'équation différentielle $y' = -\frac{t}{y}$. Alors les points $(t, f(t)) \in \mathbb{R}^2$ sont à distance constante de l'origine.