

**Test n°2 (continuité, dérivabilité, DL)**

Pour chacune des questions, répondez par vrai ou faux puis *justifiez soigneusement votre réponse*.

1) Soit  $f$  la fonction définie sur  $\mathbb{R}^*$  par la formule  $f(x) = \frac{x}{|x|}$ . La fonction  $g(x) = e^{f(x)} + e^{-f(x)}$  définie sur  $\mathbb{R}^*$  est prolongeable par continuité à  $\mathbb{R}$  en une fonction constante.

2) Si  $f$  et  $g$  sont deux fonctions continues sur  $[0, 1]$ , alors la fonction  $\frac{f}{3+2g^2}$  est continue sur  $[0, 1]$ .

3) La fonction définie sur  $\mathbb{R}^*$  par la formule  $h(x) = (e^{x^2} - 1) \ln(2 + \cos \frac{5}{x})$  est prolongeable par continuité en 0.

4) Soit  $H$  la fonction définie sur  $\mathbb{R}$  par la formule

$$H(x) = \begin{cases} \ln(|x|) & \text{si } x < 0 \\ \sin x & \text{si } x \geq 0 \end{cases}$$

et  $u$  la fonction définie sur  $\mathbb{R}$  par  $u(x) = -e^x$ . La fonction  $H \circ u$  est continue sur  $\mathbb{R}$ .

5) Soit  $f$  une fonction définie sur  $\mathbb{R}$ . Si  $f$  est strictement croissante, alors  $f$  est continue sur  $\mathbb{R}$ .

6) L'image de l'intervalle  $] -2, 1[$  par la fonction  $x \mapsto \frac{x}{-x^2-x+2}$  est  $\mathbb{R}$ .

7) La fonction  $x \mapsto |x| \sin x$  est dérivable sur  $\mathbb{R}$ .

8) Soit  $f$  une fonction dérivable en 0. On a

$$\lim_{\substack{x \rightarrow 0 \\ x \neq 0}} \frac{f(x) - f(-x)}{2x} = f'(0).$$

9) Si  $f$  est une fonction continue en 0, vérifiant

$$\lim_{\substack{x \rightarrow 0 \\ x \neq 0}} \frac{f(x) - f(-x)}{2x} = \ell \in \mathbb{R},$$

alors  $f$  est dérivable en 0 et  $f'(0) = \ell$ .

10) Si  $f$  est une fonction dérivable sur  $[0, 4]$  qui atteint son maximum en 0, alors  $f'(0) = 0$ .

11) Si  $g$  est une fonction définie sur  $\mathbb{R}$  qui vérifie

$$\lim_{x \rightarrow -\infty} g(x) = \lim_{x \rightarrow +\infty} g(x) = 1,$$

alors  $g$  admet un maximum ou un minimum global.

12) La fonction définie par la formule

$$f(x) = e^x + \cos(e^x) + e^{-2x} + \sin(e^{-2x})$$

admet un minimum sur  $\mathbb{R}$ .

**13)** Il existe une fonction  $f : [-1, 1[ \rightarrow \mathbb{R}$  continue et surjective.

**14)** Le développement limité à l'ordre 3 en  $x_0 = 0$  de la fonction

$$\sinh x = \left( \frac{e^x - e^{-x}}{2} \right)$$

est  $x + \frac{x^3}{6} + x^3\varepsilon(x)$  avec  $\varepsilon(x) \rightarrow 0$  quand  $x \rightarrow 0$ .

**15)** On a la limite suivante:

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin(\ln(1+x)) - \ln(1+\sin x)}{x^4} = \frac{1}{12}.$$

**16)** On a la limite suivante:

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} \left( x^{\frac{1}{x}} - (1+x)^{\frac{1}{x}} \right) = 0.$$

**17)** On a la limite suivante:

$$\lim_{x \rightarrow \frac{\pi}{4}} \frac{\sin x - \cos x}{x - \frac{\pi}{4}} = \sqrt{2}.$$

**18)** La fonction  $x \mapsto |x^2|$  est  $C^1$  sur  $\mathbb{R}$ .

**19)** La fonction définie par la formule  $f(x) = \ln\left(\frac{e^x-1}{x}\right)$  admet un prolongement de classe  $C^1$  au voisinage de 0. Ce prolongement est localement au-dessus de sa tangente en 0.

**20)** Le graphe de la fonction  $f(x) = e^x$  est au-dessus de la courbe d'équation  $y = \frac{x^2}{2} + x + 1$  localement, au voisinage de 0.