Test n°1 (Fonctions, limites)

Calculatrices et documents interdits

Pour chacune des questions, répondre par vrai ou faux puis *justifier soigneusement la réponse.*

1) La fonction définie par la formule $f(x) = \sqrt{5x - 3(1 + x^2)}$ est bien définie sur $\mathbb{R}$.

2) La fonction définie par la formule $f(x) = \ln(x^2 + 4x + 4) = 2\ln(x + 2)$ est bien définie sur $\mathbb{R}^+$.

3) Le domaine de définition naturel de la fonction $f(x) = \sqrt{\frac{2-4x}{(3+x)^2}}$ est $]-\infty, -3[\cup]-3, \frac{1}{2}]$.

4) Soit $u, v : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ deux fonctions impaires telles que $u \circ v$ est bien définie. Alors $u + v$ est impaire, $u \cdot v$ est paire, et $u \circ v$ est impaire.

5) Soit $f : E \to \mathbb{R}$ (avec $E \subset \mathbb{R}$) une fonction impaire. Si $f|_{E\cap\mathbb{R}^-}$ est croissante alors $f|_{E\cap\mathbb{R}^+}$ est croissante.

6) L'image du sous-ensemble de $\mathbb{R}$, $A =]-3, -1] \cup]3, 7[$, par la fonction valeur absolue, $x \mapsto |x|$, est l'intervalle $[1, 7[$. (Une justification graphique suffit.)

7) L'image de la fonction $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ définie par $f(x) = 1 - 2\cos(3x)$ est l'intervalle $[-1, 3]$.

8) L'image réciproque de l'intervalle $[0, 1]$ par la fonction cosinus est l'intervalle $\left[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right]$.

9) Soit $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}^+$ la fonction définie pour tout x de $\mathbb{R}$ par $f(x) = x^6$. La restriction de f à $]-\frac{1}{2}, +\infty[$ n'est pas injective mais elle est surjective.

10) La fonction $f : \left]\sqrt[3]{-\frac{\pi}{2}}, \sqrt[3]{\frac{\pi}{2}}\right[\to \mathbb{R}$, définie par l'expression $f(x) = \sqrt[3]{\tan(x^3)}$ n'est ni injective ni surjective.

11) La restriction de la fonction sinus, $\sin : \mathbb{R} \to [-1, 1]$, à l'intervalle $[-\pi, \pi[$ est bijective.

12) La fonction réciproque de la fonction $f : \mathbb{R}^+ \setminus \{0\} \to \mathbb{R}$ définie pour tout $x > 0$ par $f(x) = \ln(2x)$ est la fonction $g : \mathbb{R} \to \mathbb{R}^+ \setminus \{0\}$ définie par $g(x) = e^{2x}$ pour tout x de $\mathbb{R}$.

13) Soit $f : E \to \mathbb{R}$ une fonction injective. Soit $A \subset E$. La restriction de f à A est une fonction injective.

14) La fonction f, définie sur $]0, +\infty[$ par la formule $f(x) = \frac{1}{\sqrt{x}} \ln(x^2 + 2x)$, satisfait

$$\lim_{x\to 0^+} f(x) = -\infty \quad \text{et} \quad \lim_{x\to+\infty} f(x) = 0\,.$$

15) La limite en 0 de la fonction $f(x) = \frac{\sqrt{3x^2+7x+4}-2}{x}$ existe et vaut $\frac{7}{4}$.

16) La limite en $+\infty$ de la fonction définie sur $\mathbb{R}^*$ par la formule $f(x) = \frac{1}{x}(\sin(x) + 2\sqrt{x}\cos^2(3x))$ existe et vaut 0.

17) La fonction $f : \mathbb{R}^* \to \mathbb{R}$, définie pour tout $x \neq 0$ par la formule

$$f(x) = \frac{e^{\frac{1}{x}} + 1}{e^{\frac{1}{x}} - 1},$$

est prolongeable par continuité en 0.

18) On considère la fonction $f : \mathbb{R}_+^* \to \mathbb{R}$, définie pour tout $x > 0$ par la formule

$$f(x) = \frac{\sin x}{x} + x \sin \tfrac{1}{x}.$$

Les deux limites suivantes existent et sont égales:

$$\lim_{\substack{x \to 0 \\ x > 0}} f(x) \quad \text{et} \quad \lim_{x \to +\infty} f(x).$$

19) Soit $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ une fonction paire. Si $f(x)$ tend vers $-\infty$ quand x tend vers $+\infty$, alors $f(x)$ tend vers $-\infty$ quand x tend vers $-\infty$.

20) Soit $f :]-\infty, 0[\to \mathbb{R}$ une fonction strictement décroissante. La limite de $f(x)$ lorsque x tend vers $-\infty$ est $+\infty$.