Feuille d'exercices n°9 — Équations différentielles linéaires d'ordre 2

Exercice 1 - Résoudre les équations différentielles linéaires, homogènes, du second ordre listées ci-dessous. Dans chacun des cas, déterminer la solution y telle que $y(0) = 0$ et $y'(0) = 1$.

1. $y'' - 3y' - 4y = 0$.

2. $y'' - 10y' + 25y = 0$.

3. $y'' - 2y' + 5y = 0$.

Exercice 2 - Résoudre les équations différentielles suivantes :

1. $y'' + 2y' - 10y = 7e^x$.

2. $y'' - y' - 6y = (6x + 5)e^x$.

3. $y'' - y' - 2y = (6x + 2)e^{2x}$.

4. $y'' + 2y' + y = x^2 + 1$.

5. $y'' + 2y' + y = (6x - 2)e^{-x}$.

6. $y'' - y = 2\cos x$. On cherchera une solution particulière sous la forme $y(x) = A\cos x + B\sin x$, avec A, B des constantes réelles à déterminer.

Exercice 3 - Résoudre les équations différentielles suivantes :

1. $y'' + y = x\sin 2x$.

2. $y'' + y = x\sin x + x^2$.

3. $y'' - 5y' + 4y = 2e^{4x} + (34x + 18)\cos x$.

4. $y'' - 4y' + 5y = x\cos x e^{2x}$.

Exercice 4 - Considérons l'équation différentielle

$$y''(t) + 2y'(t) + 3y(t) = \cos(2t)\,.$$

1. Trouvez la solution générale. Donner l'allure des solutions pour $t \to +\infty$.

2. Déterminez l'unique solution bornée sur tout $\mathbb{R}$.

Question complémentaire

3. Que dire dans le cas plus général où l'on considère

$$y''(t) + 2by'(t) + \omega_0^2 y(t) = A\cos(\omega t)\,,$$

avec A, b, ω et ω_0 des réels tels que $b > 0$ et $b^2 - \omega_0^2 < 0$.