

Feuille d'exercices n°8 — Nombres complexes

Exercice 1 - Donner les formes cartésienne et polaire des nombres complexes suivants:

$$(a) 2 + i, \quad (b) \sqrt{2}e^{-i\frac{2\pi}{3}}, \quad (c) (1 + i)e^{i\frac{\pi}{4}}, \quad (d) \left(\frac{1+i}{2-i}\right)^2.$$

Exercice 2 - Donner module et argument des nombres complexes suivants:

$$(a) e^{3i}, \quad (b) e^{-7+i}, \quad (c) \left(3e^{\frac{3i\pi}{4}}\right)^2, \quad (d) e^{i\theta} + e^{2i\theta}, \quad (e) e^{e^{i\frac{\pi}{6}}}.$$

Exercice 3 - Déterminer les racines carrées de $\frac{\sqrt{2}}{2}(1+i)$. En déduire les valeurs exactes de $\cos \frac{\pi}{8}$ et $\sin \frac{\pi}{8}$.

Exercice 4 - Exprimer sous forme polaire les racines cubiques de $-12 + 12i\sqrt{3}$.

Exercice 5 - En utilisant les nombres complexes, exprimer $\cos(5\theta)$ et $\sin(5\theta)$ en fonction de $\cos \theta$ et $\sin \theta$.

Exercice 6 - Écrire sous la forme $z \mapsto az + b$, la similitude directe qui envoie les points $A = (2, 1)$ et $B = (3, 2)$ respectivement sur les points $A' = (6, -4)$ et $B' = (9, -5)$. Puis préciser ses angle, rapport et centre (s'il existe). Finalement, donner les coordonnées cartésiennes de l'image du point $C = (1, 3)$.

Exercice 7 - Écrire sous la forme $z \mapsto az + b$, la similitude directe de centre $C = (1, 1)$, d'angle $\theta = \frac{\pi}{6}$ et de rapport $\lambda = 2$.

Exercice 8 - Résoudre dans \mathbb{C} les équations suivantes:

$$(a) z^2 + 2z + 4 = 0, \quad (b) z^2 + 6z + 11 = 0, \quad (c) 2z^4 + 20z^2 + 50 = 0.$$

Exercice 9 - On rappelle que les fonctions sinus et cosinus sont définies sur \mathbb{C} par les formules $\sin z = \frac{e^{iz} - e^{-iz}}{2i}$ et $\cos z = \frac{e^{iz} + e^{-iz}}{2}$ pour $z \in \mathbb{C}$.

1. Montrer que l'ensemble des solutions complexes de l'équation $\sin z = 0$ est $\{k\pi : k \in \mathbb{Z}\}$. Quelles sont les solutions de l'équation $\cos z = 0$?

2. Montrer que pour tout $z \in \mathbb{C}$, $\sin^2 z + \cos^2 z = 1$.

3. Montrer que $\overline{(\sin z)} = \sin(\bar{z})$. En déduire que $\operatorname{Re}(\sin z) = \sin(\operatorname{Re}(z)) \cosh(\operatorname{Im}(z))$.

4. Établir une formule similaire pour $\operatorname{Im}(\sin z)$. (Remarque: on peut évidemment établir des formules similaires pour les parties réelle et imaginaire de $\cos z$.)

5. Calculer la dérivée de la fonction $\varphi : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{C}$ définie par $\varphi(t) = \sin(t + 2it)$ pour tout $t \in \mathbb{R}$.

Exercice 10 - On rappelle que les primitives d'une fonction continue, $\varphi : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{C}$, sont les fonctions $t \mapsto \int^t \operatorname{Re}(\varphi(s)) ds + i \cdot \int^t \operatorname{Im}(\varphi(s)) ds$.

1. On considère l'équation différentielle homogène linéaire d'ordre 1: $z' = \frac{1}{1+t^2} z$.

(a) Montrer que si une fonction $z : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{C}$ en est une solution complexe alors ses parties réelle et imaginaire en sont des solutions réelles.

(b) Donner toutes les solutions complexes de l'équation.

2. On considère à présent l'équation $z' = (3t^2 + 2it^3)z$.

(a) Pourquoi la technique précédente ne fonctionne-t-elle pas dans ce cas ?

(b) Calculer une primitive A de la fonction $a(t) = 3t^2 + 2it^3$.

(c) Montrer que les fonctions $z(t) = Ce^{A(t)}$ avec $C \in \mathbb{C}$ sont solutions complexes de l'équation.

Exercices complémentaires.

Exercice 11 - 1. Quelles sont les valeurs exactes de $\cos \frac{\pi}{12}$ et $\sin \frac{\pi}{12}$? (cf. exercice 3)

2. Exprimer sous forme polaire les racines cubiques de $-4\sqrt{2}(1+i)$. (cf. exercice 4)

Exercice 12 - Reprendre l'exercice 6 ci-dessus avec

1. $A = (1, -1)$, $B = (-3, 1)$, $A' = (0, 2\sqrt{2})$, $B' = (2\sqrt{2}, -4\sqrt{2})$, et $C = (1, 2)$.

2. $A = (-3, 3)$, $B = (4, 3)$, $A' = (-3, -2)$, $B' = (-3, 5)$, et $C = (1, 1)$.

Exercice 13 - Reprendre l'exercice 7 ci-dessus avec $C = (-2, 1)$, $\theta = -\frac{\pi}{2}$ et $\lambda = \frac{1}{2}$.

Exercice 14 - Soit z et z' deux nombres complexes distincts. Déterminer toutes les similitudes directes qui échangent z et z' . Quels en sont les angles, rapports et centres (s'ils existent) ?

Exercice 15 - Prouver que pour tout $z \in \mathbb{C}$, $|e^z| = e^{\frac{z+\bar{z}}{2}}$ et que $\left| e^{\frac{z-\bar{z}}{2}} \right| = 1$.