Feuille d'exercices n°4 — Dérivabilité

Exercice 1 - *En utilisant la définition de la dérivée en un point,* calculer $f'(x_0)$ pour $x_0 = 2$ et f la fonction définie par $f(x) = x^2 - 4x + 5$.

Exercice 2 - Soit $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ la fonction définie par

$$f(x) = \begin{cases} x^2 & \text{si } x < 1, \\ 1 - |x-2| & \text{si } 1 \leq x \leq 5, \\ x^2 - 27 & \text{si } x > 5. \end{cases}$$

1. Déterminer ses points de continuité et ses points de dérivabilité.

2. Existe-t-il un minimum global et/ou un maximum global ? Les déterminer le cas échéant.

Exercice 3 - Déterminer les nombres réels a et b tels que la fonction suivante soit dérivable en 0 :

$$f(x) = \begin{cases} 3x^2 + x + a & \text{si } x \geq 0, \\ bx + 2 & \text{si } x < 0. \end{cases}$$

Exercice 4 - Donner le domaine de définition, prolonger par continuité en 0 puis étudier la dérivabilité de

$$f(x) = e^{-\frac{1}{x^2}}, \qquad g(x) = \sin\sqrt{x}, \qquad h(x) = \cos\sqrt{x}\,.$$

Exercice 5 - À l'aide du théorème des accroissements finis, calculer la limite de $x^2\left(e^{\frac{1}{x+1}} - e^{\frac{1}{x}}\right)$ quand x tend vers $+\infty$.

Exercice 6 - Montrer les inégalités ci-dessous.

1. Pour tous réels a et b, $|\sin a - \sin b\,| \leq |a - b|$.

2. Pour tous réels x et h, $|\cos(x+h) - \cos x\,| \leq |h|$.

Exercice 7 - Construire les tableaux de variations des fonctions suivantes :

$$f(x) = x^2(x-5)^4\,, \qquad g(x) = \frac{x^2}{\sqrt{x+7}}\,, \qquad h(x) = \frac{x}{2} - \sin x\,.$$

Exercice 8 - On considère la fonction $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ donnée par $f(x) = 2x - \arctan x$.

1. Montrer que f est bijective.

2. Montrer que sa réciproque est (continue et) dérivable.

3. Retrouver la formule donnant $(f^{-1})'$ en fonction de f' et de f^{-1}. Calculer $(f^{-1})'\left(2 - \frac{\pi}{4}\right)$.

4. En étudiant f', déterminer son image. En déduire l'image de $(f^{-1})'$.

Exercices complémentaires

Exercice 9 - Soit f la fonction définie par la formule $f(x) = 1 + x - \frac{2x \ln x}{x-1}$.

1. Donner l'ensemble de définition naturel de f.

2. Montrer que f est prolongeable par continuité en 0.

3. Ce prolongement est-il dérivable en 0 ?

4. Montrer que pour tout $h > 0$, $h - \frac{h^2}{2} \leq \ln(h+1) \leq h$ (on pourra par exemple étudier les fonctions obtenues en prenant, pour chacune des deux inégalités, la différence entre les deux termes).

5. En déduire que f est prolongeable par continuité en 1.

Exercice 10 - Montrer que pour tout réel x, $|e^{2x} - e^x| \leq |x| e^{2|x|}$.

Exercice 11 - Construisez les tableaux de variations des fonctions suivantes :

$$f(x) = \cos x + \sin x \,, \qquad g(x) = x + 2\cos x \,, \qquad h(x) = x^{\frac{2}{3}}(x-7)^2 + 2 \,.$$

Exercice 12 - Déterminer les extrema (locaux et globaux) de la fonction $f : [-2, \frac{1}{2}] \to \mathbb{R}$ donnée par la formule $f(x) = x^3 + |x|$ ainsi que les points où ils sont atteints.