Feuille d'exercices n°1 — Fonctions

Exercice 1 - Déterminer les domaines de définition naturels des fonctions définies par les formules

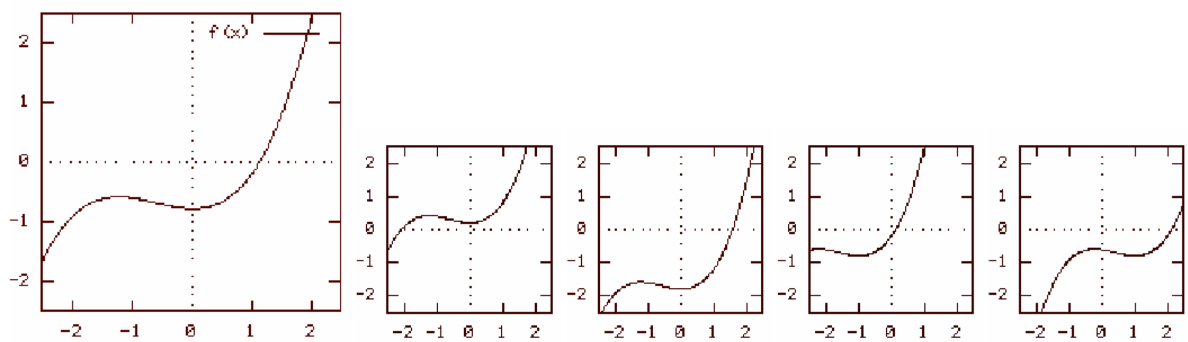
$$f(x) = \sqrt{\frac{2+3x}{5-2x}}, \qquad g(x) = \sqrt{x^2 - 2x - 5}, \qquad h(x) = \ln(4x+3)\,.$$

Exercice 2 - On considère la fonction $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ définie pour tout x de $\mathbb{R}$ par $f(x) = x^2$.

1. Quelle est l'image de la fonction $f|_E$, restriction de la fonction f à l'ensemble E, lorsque $E = [-5,-2]$, $[-1,3]$, $[-5,-2] \cup [-1,3]$?

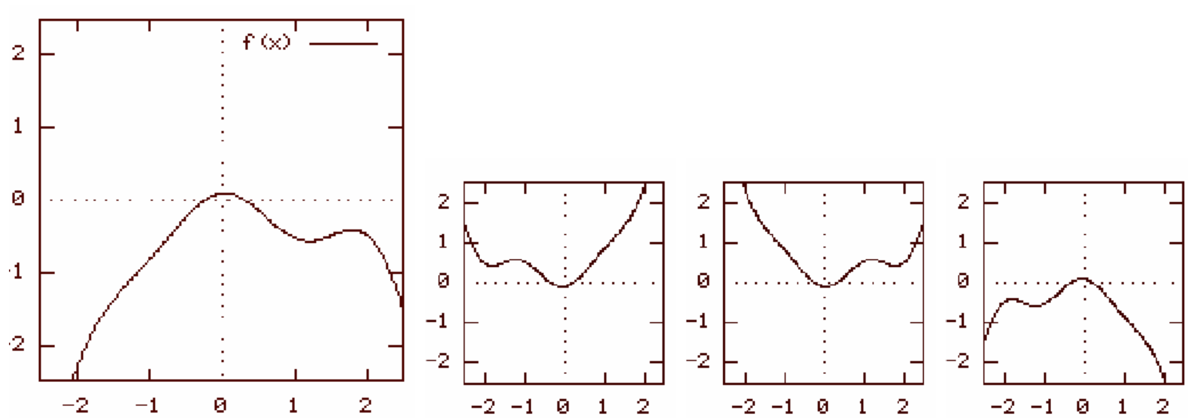
2. Déterminer les ensembles $f([-5,-2] \cap [-1,3])$ et $f([-5,-2]) \cap f([-1,3])$.

Exercice 3 - Le premier dessin représente le graphe d'une fonction f. Parmi les quatre dessins suivants, lequel représente la fonction $x \mapsto f(x) - 1$?



Même question pour les fonctions $x \mapsto f(x) + 1$, $x \mapsto f(x+1)$, $x \mapsto f(x-1)$.

Exercice 4 - Le premier dessin représente le graphe d'une fonction f. Parmi les trois dessins suivants, lequel représente la fonction $x \mapsto -f(x)$?



Même question pour les fonctions $x \mapsto f(-x)$, $x \mapsto -f(-x)$.

Exercice 5 - Soit a et b deux nombres réels et f la fonction donnée par la formule $f(x) = ax + b$. On travaille dans un repère orthonormé.

1. Déterminer l'équation de l'image du graphe de f par la symétrie d'axe Ox, puis par la symétrie d'axe Oy.

2. Pour chacune des courbes obtenues, donner une fonction dont elle est le graphe.

3. Déterminer l'équation de l'image du graphe de f par la symétrie d'axe Δ, la droite donnée par l'équation $y = x$. À quelle condition la droite obtenue est-elle le graphe d'une fonction ?

Exercice 6 - Représenter graphiquement la fonction $f : x \mapsto \frac{1}{1+x^2}$. Déterminer graphiquement les images réciproques des intervalles $[0, 1[$, $]\frac{1}{2}, 1]$, $[1, 2]$ et $]1, 3]$.

Exercice 7 - Les fonctions suivantes sont-elles injectives, surjectives, bijectives ? Déterminer leurs images. Déterminer les fonctions réciproques quand celles-ci existent.

$$f : \begin{cases} \mathbb{R} \to \mathbb{R} \\ x \mapsto x^2 \end{cases}, \quad g : \begin{cases} \mathbb{R}^+ \to \mathbb{R}^+ \\ x \mapsto x^2 \end{cases}, \quad h : \begin{cases} \mathbb{R} \to \mathbb{R} \\ x \mapsto x^3 - x \end{cases}.$$

Exercice 8 - Dire si les fonctions suivantes sont injectives sur leur domaine de définition. Déterminer leurs images et les fonctions réciproques quand celles-ci existent.

$$f(x) = \frac{x}{1+|x|}, \qquad g(x) = \sqrt{x-1}, \qquad h(x) = \ln(\sqrt{x-1} + 1).$$

Exercice 9 - On définit deux fonctions sur $\mathbb{R}\backslash\{0, 1\}$ par $f : x \mapsto \frac{1}{1-x}$ et $g : x \mapsto 1 - x$. Vérifier que l'on peut composer ces fonctions puis donner les expressions des composées $f \circ g$ et $g \circ f$.

Exercice 10 - Soit f et g deux fonctions définies sur un même sous-ensemble E de $\mathbb{R}$.

1. Montrer que si f et g sont croissantes sur E, alors $f + g$ est croissante sur E.

2. Montrer que si f et g sont positives et croissantes sur E, la fonction produit $f \cdot g$ est croissante sur E.

3. On suppose que $f \circ g$ est définie sur E. Montrer que si f et g sont toutes les deux croissantes ou toutes les deux décroissantes sur E, alors la composée $f \circ g$ est croissante sur E.

4. En déduire la monotonie de la fonction $h : \mathbb{R}^+ \to \mathbb{R}$ définie par $h(x) = (\ln(e + x^2) - 1)e^{2\sqrt{x}+3}$.