Contrôle continu de Mathématiques – Seconde session

Jeudi 22 février 2018 – Durée : 1h30.
Documents, calculatrices, téléphones, etc. interdits.

Ce devoir comporte 2 pages et est constitué de 4 exercices **indépendants**.
Toute réponse doit être **justifiée**. Le barême est donné à titre **indicatif**.

Exercice 1. Questions et applications du cours (4 points)

(1) Soient un intervalle I de $\mathbb{R}$ et une fonction $f : I \to \mathbb{R}$. Que signifie l'affirmation : f est une fonction paire ?

(2) En utilisant le théorème des gendarmes, déterminer la limite de $\frac{\cos(3x)}{1+x^2}$ quand x tend vers $+\infty$.

(3) Soit f une fonction continue sur $\mathbb{R}$ et g la fonction définie par $g(x) = \int_2^x f(t)\,dt$ sur $\mathbb{R}$.

   (a) Donner la dérivée de la fonction g en $x = 3$, $g'(3)$.

   (b) Expliquer pourquoi g est C^1 sur $\mathbb{R}$.

Exercice 2. (4 points)

Soit (E) l'équation différentielle linéaire d'ordre 1 non résolue: $ty' - 3y = 0$.

(1) Montrer que toute solution de (E) sur $\mathbb{R}$ vaut 0 en 0.

(2) Quelles sont les solutions de (E) sur $\mathbb{R}_-^*$ et sur $\mathbb{R}_+^*$?

(3) Déterminer toutes les solutions de (E) sur $\mathbb{R}$.

(4) Parmi celles-ci, lesquelles vérifient $y(1) = 3$?

Exercice 3. (5 points)

On cherche à déterminer le comportement au voisinage de 0 de la fonction F, définie par la formule $F(x) = \ln(\frac{\sin x}{x})$.

(1) Montrer que F est définie au voisinage de 0.

(2) En utilisant la formule de Taylor–Young, calculer le développement limité (DL) de

   (a) la fonction $f(x) = \sin x$ en 0 à l'ordre 3,

   (b) la fonction $g(u) = \ln(u)$ en 1 à l'ordre 2.

(3) En déduire le DL à l'ordre 2 en 0 de la fonction F, puis l'équation de la tangente au graphe de F en 0, ainsi que la position relative du graphe par rapport à cette tangente (près de 0).

Exercice 4. (7,5 points)

Soit $\mathbb{Z}[i]$ le sous-ensemble de $\mathbb{C}$ constitué des nombres complexes dont les parties réelle et imaginaire sont des entiers relatifs : $\mathbb{Z}[i] = \{a + ib \in \mathbb{C} \mid a, b \in \mathbb{Z}\}$.

(1) Soient z et z' des éléments de $\mathbb{Z}[i]$. Montrer que $z + z'$ et zz' appartiennent aussi à $\mathbb{Z}[i]$.

(2) Montrer que le module d'un élément non nul de $\mathbb{Z}[i]$ est supérieur ou égal à 1.

(3) Soient w et w' des nombres complexes (pas nécessairement dans $\mathbb{Z}[i]$), tels que $ww' = 1$. Exprimer le module de w' en fonction du module de w.

(4) Soit $z \in \mathbb{Z}[i]$. Déduire des questions (2) et (3) que si z admet un inverse dans $\mathbb{Z}[i]$ (c'est-à-dire s'il existe $z' \in \mathbb{Z}[i]$ tel que $zz' = 1$), alors $|z| = 1$.

(5) Déterminer tous les éléments de $\mathbb{Z}[i]$ admettant un inverse dans $\mathbb{Z}[i]$ et, pour chacun d'entre eux, expliciter l'inverse.

(6) (a) Montrer que pour tout nombre réel x, il existe $n \in \mathbb{Z}$ tel que $|x - n| \leq \frac{1}{2}$.

(b) En déduire que pour tout nombre complexe $w \in \mathbb{C}$, il existe $z \in \mathbb{Z}[i]$ tel que $|w - z| \leq \frac{\sqrt{2}}{2}$. Interpréter ce résultat géométriquement (on pourra s'aider d'un dessin...).