Correction du contrôle de seconde session de Mathématiques

Jeudi 22 février 2018 – Durée : 1h30.

Exercice 1. Questions/applications du cours

(1) La fonction $f : I \to \mathbb{R}$ est paire si I est symétrique par rapport à 0 et si pour tout $x \in I$, $f(-x) = f(x)$.

(2) Pour tout x réel, $-1 \leq \cos(3x) \leq 1$ et $1 + x^2 > 0$. On obtient donc l'encadrement : $\frac{-1}{1+x^2} \leq \frac{\cos(3x)}{1+x^2} \leq \frac{1}{1+x^2}$ pour tout $x \in \mathbb{R}$. Comme $\frac{\pm 1}{1+x^2}$ tend vers 0 quand x tend $+\infty$, on en déduit, par le théorème des gendarmes, qu'il en va de même pour le terme $\frac{\cos(3x)}{1+x^2}$.

(3) (a) On a $g'(3) = f(3)$ (puisque, par le théorème fondamental du calcul intégral, g est la primitive de la fonction f qui s'annule en 2).

(b) Comme la dérivée de g sur $\mathbb{R}$ est f qui est continue, g est C^1 sur $\mathbb{R}$.

Exercice 2.

(1) Remplacer t par 0 dans (E), conduit à $3y(0) = 0$. On en déduit donc que toute solution de (E) sur $\mathbb{R}$ vaut 0 en 0.

(2) Sur $\mathbb{R}_+^*$, (E) est équivalente à l'équation résolue $y' - \frac{3}{t}y = 0$. Les solutions de cette équation (sur $\mathbb{R}_+^*$) sont les fonctions $y(t) = Ce^{A(t)}$ où C est une constante réelle et A est une primitive de la fonction $t \mapsto \frac{3}{t}$ sur $\mathbb{R}_+^*$. La fonction $A(t) = 3\ln(|t|) = \ln(t^3)$ convient et on trouve donc que les solutions de (E) sur $\mathbb{R}_+^*$ sont les fonctions $y(t) = Ct^3$, $C \in \mathbb{R}$.

De même, les solutions de (E) sur $\mathbb{R}_-^*$ sont les fonctions $y(t) = Dt^3$ avec $D \in \mathbb{R}$.

(*Remarque.* Dans ce cas, la primitive est $\ln(-t^3)$ mais quitte à remplacer D par $-D$ on trouve bien la même expression.)

(3) Les solutions de (E) sur $\mathbb{R}$ sont les fonctions y, C^1 sur $\mathbb{R}$, qui vérifient (E) et dont les restrictions à $\mathbb{R}_\pm^*$ s'écrivent respectivement $C_\pm t^3$, avec C_- et C_+ des constantes réelles.

Or toute telle fonction s'étend de manière unique par continuité en 0 en posant $y(0) = 0$ et un tel prolongement est C^1 sur $\mathbb{R}$ par le théorème de "prolongement C^1". On en déduit donc que les solutions de (E) sur $\mathbb{R}$ sont les fonctions y telles que

$$y(t) = C_- t^3 \text{ sur } \mathbb{R}_-^*, \quad y(0) = 0, \quad y(t) = C_+ t^3 \text{ sur } \mathbb{R}_+^*$$

pour n'importe quelles deux constantes $C_\pm \in \mathbb{R}$.

(4) On trouve en particulier une infinité de solutions qui vérifient $y(1) = 3$: toutes celles pour lesquelles $C_+ = 3$ (et C_- est quelconque).

Exercice 3.

(1) La fonction $x \mapsto \frac{\sin x}{x}$, prolongée par continuité par 1 en 0, est continue, et vaut 1 en 0. Comme 1 est intérieur de $\mathbb{R}_+^*$, le domaine de définition de la fonction ln, on en déduit que F est définie dans un voisinage de 0, par composition.

(2) (a) La fonction sinus est C^3 (car C^∞) sur $\mathbb{R}$ et on peut donc lui appliquer la formule de Taylor–Young. Elle vaut 0 en 0, sa dérivée, cos, vaut 1 en 0, sa dérivée seconde, $-\sin$, vaut 0 en 0, tandis que sa dérivée troisième, $-\cos$, vaut -1 en 0.

La formule de Taylor–Young donne donc que le DL de sinus en 0, à l'ordre 3 est $\sin x = x - \frac{x^3}{6} + x^3\varepsilon(x)$ avec $\varepsilon(x)$ qui tend vers 0 quand x tend vers 0. On en déduit immédiatement que la fonction $x \mapsto \frac{\sin x}{x}$ admet un DL à l'ordre 2 en 0 : $\frac{\sin x}{x} = 1 - \frac{x^2}{6} + x^2\varepsilon(x)$.

(b) De même la fonction ln est C^3 au voisinage de 1, et les valeurs de ses dérivées successives sont $\ln(1) = 0$, $\ln'(1) = \frac{1}{1} = 1$ et $\ln''(1) = \frac{-1}{1^2} = -1$.

La formule de Taylor–Young donne donc le DL à l'ordre 2 recherché : $\ln(x) = (x-1) - \frac{(x-1)^2}{2} + (x-1)^2\varepsilon(x)$ avec $\varepsilon(x)$ qui tend vers 0 quand x tend vers 1.

(3) Par composition, on obtient le DL à l'ordre 2 en 0 de la fonction F :

$$F(x) = (-\tfrac{x^2}{6}) - \tfrac{1}{2}(\tfrac{x^2}{6})^2 + x^2\varepsilon(x) = -\tfrac{x^2}{6} + x^2\varepsilon(x)\,.$$

La tangente au graphe de F en 0 est donc la droite d'équation $y = 0$ (du fait de la nullité de la partie principale du DL à l'ordre 1 de F) et le graphe de F reste localement sous sa tangente dans un voisinage de 0 (puisque le premier coefficient non nul du DL est $-\frac{1}{2} < 0$, à l'ordre 2 qui est pair, et que la tangente est d'équation nulle).

Exercice 4.

(1) Soient $z = a + ib$ et $z' = a' + ib'$ des éléments de $\mathbb{Z}[i]$. On a $z + z' = (a + a') + i(b + b')$ et $zz' = (aa' - bb') + i(ab' + a'b)$. Comme a, a', b et $b' \in \mathbb{Z}$, $a + a'$, $b + b'$, $aa' - bb'$ et $ab' + a'b$ aussi et donc $z + z'$ et zz' appartiennent aussi à $\mathbb{Z}[i]$.

(2) Soit $z = a + ib \in \mathbb{Z}[i]$, son module est $|z| = \sqrt{a^2 + b^2}$. Comme $z \neq 0$, a ou b est un entier relatif non nul et $a^2 + b^2$ est donc plus grand que 1. Comme la fonction racine carré est croissante, on en déduit que $|z| \geq 1$.

(3) Si w et w' satisfont $ww' = 1$, leurs modules satisfont $|w||w'| = |ww'| = 1$ et donc $|w'| = \frac{1}{|w|}$.

(4) Soit $z \in \mathbb{Z}[i]$ admettant z' comme inverse dans $\mathbb{Z}[i]$. Par (3), si $|z| > 1$, $|z'| < 1$ ce qui est absurde par (2) puisque $z' \in \mathbb{Z}[i]$. Donc (par (2) de nouveau), $|z| = 1$.

(5) Comme dans la question (2), on remarque que si a et b sont tous les deux non nuls, leurs carrés sont tous les deux supérieurs à 1 ; donc $|z| \geq \sqrt{2} > 1$.

Par la question précédente, si z est inversible, a ou b est donc nul et b ou a respectivement vaut 1 : ± 1 et $\pm i$ sont donc les seuls candidats. Bien sûr, 1 est son propre inverse, -1 est son propre inverse, $-i$ est l'inverse de i et vice-versa. Les éléments inversibles de $\mathbb{Z}[i]$ sont donc $\{\pm 1, \pm i\}$.

(6) (a) Soit $x \in \mathbb{R}$ et $[x] \in \mathbb{Z}$ sa partie entière. Par définition, $[x] \leq x < [x] + 1$ donc soit $0 \leq x - [x] \leq \frac{1}{2}$, soit $\frac{1}{2} < x - [x] < 1$ et donc, dans le second cas, $-\frac{1}{2} < x - ([x] + 1) < 0$. Donc en posant respectivement $n = [x]$ ou $n = [x] + 1$, on obtient bien un entier relatif n tel que $|x - n| \leq \frac{1}{2}$.

(b) Soit $w = x + iy \in \mathbb{C}$, d'après la question précédente (appliquée à x puis à y), il existe a et $b \in \mathbb{Z}$ tels que $|x - a|$ et $|y - b|$ sont inférieurs à $\frac{1}{2}$. On en déduit que $z = a + ib \in \mathbb{Z}[i]$ vérifie

$$|w - z| = |(x - a) + i(y - b)| = \sqrt{(x - a)^2 + (y - b)^2} \leq \sqrt{\tfrac{1}{2^2} + \tfrac{1}{2^2}} = \tfrac{\sqrt{2}}{2}\,.$$

L'interprétation géométrique est que, *au pire*, w est l'affixe du centre d'un carré dont les sommets sont des points de coordonnées entières (dont les affixes sont dans $\mathbb{Z}[i]$).