Contrôle continu de Mathématiques n°2

du mercredi 22 novembre – Durée : 2h.

Documents et appareils électroniques interdits.

Ce devoir comporte deux pages et est constitué de deux exercices et un problème **indépendants**. Toute réponse doit être **justifiée**. Le barème est donné à titre **indicatif**.

Notation. Le "$\mathrm{DL}_n(x_0)$" d'une fonction f désigne le *développement limité à l'ordre* n *en* x_0 *de* f.

Exercice 1. Questions de cours (5 points)

(1) (a) Énoncer le théorème de Rolle.

(b) En utilisant le théorème de Rolle, montrer que la fonction sinus admet au moins 2 points critiques sur $[0, 2\pi]$.

(2) (a) Donner un domaine de définition naturel de la fonction $f : t \mapsto \frac{1}{\cos^2 t}$.

(b) Préciser le $\mathrm{DL}_4(0)$ de f.

(c) En déduire le $\mathrm{DL}_5(0)$ de la fonction tangente.

Exercice 2. (13 points) Les questions (1), (2), (3) et (4) ci-dessous sont largement indépendantes.

(1) On rappelle que la fonction arc tangente (arctan) est définie comme la fonction réciproque de la restriction de la fonction tangente à l'intervalle $]-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}[$.

(a) Spécifier, en le justifiant, le domaine D de la fonction arctan.

(b) Montrer que la fonction arctan est impaire.

(c) Montrer que pour tout $x \in D$, arctan est dérivable en x et $\arctan'(x) = \frac{1}{1+x^2}$.

(2) En utilisant une intégration par parties, calculer une primitive de arctan sur D.

(3) On considère la fonction g définie par la formule $g(x) = \arctan(\frac{1}{x}) + \arctan(x)$.

(a) Montrer que g est de classe C^1 sur son domaine de définition naturel D', que l'on précisera.

(b) Déduire de la question (1b) ci-dessus que g est impaire.

(c) En dérivant g, montrer que g est constante sur $D' \cap \mathbb{R}^+$.

(d) Déterminer cette constante en calculant la limite de $g(x)$ quand x tend vers $+\infty$.

(e) En déduire que $\arctan(1) = \frac{\pi}{4}$.

(f) Retrouver cette valeur en utilisant la définition de arctan (rappelée en (1) ci-dessus).

(g) Que vaut $g(x)$ pour $x \in D' \cap \mathbb{R}^-$?

(4) (a) Calculer la dérivée de la fonction $x \mapsto \arctan(e^x)$ sur $\mathbb{R}$.

(b) En déduire la primitive de la fonction $x \mapsto \frac{1}{\cosh x}$ sur $\mathbb{R}$ qui s'annule en $\frac{\pi}{2}$.

Problème 3. (7 points)

(1) (a) Donner, en le justifiant, le $\mathrm{DL}_2(0)$ de la fonction $x \mapsto \ln(1+x)$.

(b) En déduire le $\mathrm{DL}_2(1)$ de la fonction $t \mapsto \ln(t)$ (**attention au point de référence !**).

On considère sur $\mathbb{R}_+^*$ la fonction

$$f : t \longmapsto \begin{cases} \dfrac{\ln t}{t-1} & \text{si } t \neq 1, \\ 1 & \text{si } t = 1. \end{cases}$$

(2) Pourquoi f est-elle continue en 1 ? Conclure qu'elle est continue sur $\mathbb{R}_+^*$.

(3) (a) Montrer que sur $\mathbb{R}_+^* \setminus \{1\}$, f est de classe C^1, et que sa dérivée est strictement négative. (On pourra utiliser l'inégalité $\ln u < u - 1$ valable pour tout $u \in \mathbb{R}_+^* \setminus \{1\}$.)

(b) Montrer de plus que sa dérivée vérifie

$$f'(t) = -\frac{\ln(t)}{(t-1)^2} + \frac{1}{t-1} - \frac{1}{t}.$$

(c) En utilisant la question (1b), en déduire que f est dérivable en 1, puis de classe C^1 sur $\mathbb{R}_+^*$.

(4) Conclure que f est une bijection C^1, strictement décroissante, de $\mathbb{R}_+^*$ sur lui-même, de dérivée ne s'annulant pas.

Une suite possible mais plus difficile du problème.

On pose pour la suite du problème

$$\psi = \exp \circ f \quad \text{et} \quad s = \psi^{-1} = f^{-1} \circ \ln :]1, +\infty[\longrightarrow \mathbb{R}_+^*.$$

(5) Justifier que s est de classe C^1. Est-elle (strictement) monotone, et si oui, quel est son sens de variation ? Calculer $s(e)$.

(6) Démontrer que pour tout $y \in]1, +\infty[\setminus \{e\}$, on a $s(y) \neq 1$, puis que

$$\frac{\ln[s(y)]}{s(y) - 1} = \ln y.$$

(7) En déduire pour $y \in]1, +\infty[\setminus \{e\}$ fixé, $s(y)$ est solution de l'équation

$$\sigma = 1 + \frac{\ln \sigma}{\ln y} \tag{1}$$

d'inconnue $\sigma \in \mathbb{R}_+^*$. Que dire du cas $y = e$?

(8) Montrer que pour $y \in]1, +\infty[$ et $\sigma \in \mathbb{R}_+^*$ vérifiant (1), on a $y^{\sigma y} = (\sigma y)^y$.
En déduire qu'étant donné $y > 1$, $y \neq e$, l'équation $y^x = x^y$ d'inconnue $x > 0$ admet au moins une solution x_0 différente de y.

(Plus délicat) On pose enfin $\alpha :]1, +\infty[\to \mathbb{R}_+^*,\ y \mapsto ys(y)$. On admet que :

- α est à valeurs dans $]1, +\infty[$;
- c'est une *involution* de cette intervalle, c'est-à-dire que :

$$\forall y \in]1, +\infty[,\ \alpha \circ \alpha(y) = y.$$

(9) Justifier que α est C^1, puis établir, à l'aide de l'identité ci-dessus, que α' est de signe strict constant. (*Remarque* : en calculant par exemple $\alpha'(e)$ ou $\alpha(2)$, on peut conclure que α' est strictement négative sur $]1, +\infty[$).

(10) On revient à l'équation (1) ci-dessus.
  - (a) Montrer que si $y \in]0, 1[$, (1) n'admet pas d'autre solution que $\sigma = 1$ (considérer $\sigma \mapsto \sigma - \frac{\ln \sigma}{\ln y}$ sur $\mathbb{R}_+^*$).
  - (b) Montrer de même que si $y \in]1, e[$ (*resp.* $y = e$, $y \in]e, +\infty[$), (1) admet exactement deux solutions (*resp.* une solution, deux solutions), dont $\sigma = 1$, dans $\mathbb{R}_+^*$; à $y > 1$ fixé, situer ces solutions sur l'axe réel selon les cas.
  - (c) En utilisant le lien entre (1) et l'équation $x^y = y^x$ (*cf.* (8)), en déduire une démonstration de l'identité d'involution $\alpha \circ \alpha = \mathrm{id}_{]1, +\infty[}$.