CORRECTION DU CONTRÔLE CONTINU DE MATHÉMATIQUES N°2

du mercredi 22 novembre 2017 – Durée : 2h.

Exercice 1. Questions de cours (5 points)

(1) (a) Soit f une fonction à valeurs réelles, continue sur un intervalle $[a,b]$ de $\mathbb{R}$, dérivable sur $]a,b[$. Si $f(a)=f(b)$, alors il existe $c\in]a,b[$ tel que $f'(c)=0$ (i.e. c est un point critique de f).

(b) Comme la fonction sinus est continue sur $[0,\pi]$ et dérivable sur $]0,\pi[$, et que $\sin(0)=\sin(\pi)=0$, le théorème de Rolle assure l'existence d'un point critique $c\in]0,\pi[$. De même l'intervalle $]\pi,2\pi[$ contient un point critique c' nécessairement distinct de c.

(2) (a) La fonction $f=\frac{1}{\cos^2}$ est bien définie dès que $\cos^2(t)\neq 0$. Ceci équivaut à la condition $\cos(t)\neq 0$ i.e. $t\notin\{\frac{\pi}{2}+k\pi;k\in\mathbb{Z}\}$. Le (plus grand) domaine de définition de la fonction est donc $\mathbb{R}\setminus\{\frac{\pi}{2}+k\pi;k\in\mathbb{Z}\}$. (L'intervalle $]-\frac{\pi}{2},\frac{\pi}{2}[$ est aussi *un* domaine de définition naturel.)

(b) Le théorème de Taylor–Young, appliqué à f (qui est C^∞ par opérations usuelles) donne que le $\mathrm{DL}_4(0)$ de la fonction cosinus est $\cos(t)=1-\frac{t^2}{2}+\frac{t^4}{24}+t^4\varepsilon(t)$ avec $\varepsilon(t)$ qui tend vers 0 quand t tend vers 0. Par produit de DL, on obtient alors que

$$\begin{aligned}\cos^2(t)&=\Big(1-\frac{t^2}{2}+\frac{t^4}{24}\Big)\Big(1-\frac{t^2}{2}+\frac{t^4}{24}\Big)+t^4\varepsilon(t)\\&=1-\frac{t^2}{2}+\frac{t^4}{24}-\frac{t^2}{2}+\frac{t^4}{4}+\frac{t^4}{24}+t^4\varepsilon(t)=1-t^2+\frac{t^4}{3}+t^4\varepsilon(t)\end{aligned}$$

avec $\varepsilon(t)$ qui tend vers 0 quand t tend vers 0.
De même, par Taylor–Young (par exemple), le DL en 0 de $h\mapsto\frac{1}{1-h}$ est $1+h+h^2+h^2\varepsilon(h)$ avec $\varepsilon(h)$ qui tend vers 0 quand h tend vers 0. (On a remarqué que l'on va "remplacer" h par $t^2-\frac{t^4}{3}-t^4\varepsilon(t)$ et que donc l'ordre 2 suffit ici.) Par composition, on obtient que

$$\begin{aligned}\frac{1}{\cos^2(t)}=\frac{1}{1-(1-\cos^2(t))}&=1+\Big(t^2-\frac{t^4}{3}\Big)+\Big(t^2-\frac{t^4}{3}\Big)^2+t^4\varepsilon(t)\\&=1+t^2-\frac{t^4}{3}+t^4+t^4\varepsilon(t)=1+t^2+\frac{2t^4}{3}+t^4\varepsilon(t),\end{aligned}$$

avec $\varepsilon(t)$ qui tend vers 0 quand t tend vers 0.

(c) Comme f est la dérivée de la fonction tangente (en effet $\tan'=\big(\frac{\sin}{\cos}\big)'=\frac{\cos^2+\sin^2}{\cos^2}=f$), par intégration des DL, on obtient directement que le $\mathrm{DL}_5(0)$ de la fonction tangente est

$$\tan(t)=\tan(0)+t+\frac{t^3}{3}+\frac{2t^5}{15}+t^5\varepsilon(t)=t+\frac{t^3}{3}+\frac{2t^5}{15}+t^5\varepsilon(t)$$

(car $\tan(0)=0$), avec $\varepsilon(t)$ qui tend vers 0 quand t tend vers 0.

Exercice 2. (13 points)

(1) (a) Comme la restriction de tangente à $]-\frac{\pi}{2},\frac{\pi}{2}[$ est une bijection, strictement croissante, avec pour image $\mathbb{R}$, arctan est une bijection, strictement croissante, de $\mathbb{R}$ dans $]-\frac{\pi}{2},\frac{\pi}{2}[$.

(b) Remarquons d'abord que le domaine de définition de la fonction arc tangente est bien symétrique par rapport à 0. Par définition de fonction réciproque, $\arctan(x)=y$ avec y l'unique élément de $]-\frac{\pi}{2},\frac{\pi}{2}[$ tel que $\tan(y)=x$. Comme tangente est impaire, $\tan(-y)=-\tan(y)=-x$ et donc (de nouveau par définition de fonction réciproque), $\arctan(-x)=-y$. La fonction arc tangente est donc bien impaire. *(Remarquons que l'on vient de prouver la fonction réciproque d'une bijection impaire est impaire.)*

(c) Comme la fonction tangente est C^1 sur $]-\frac{\pi}{2},\frac{\pi}{2}[$, de dérivée $\frac{1}{\cos^2}$, jamais nulle, l'égalité $\arctan(\tan x)=x$ donne qu'il en va de même pour arctan et que $\tan'(x)\cdot\arctan'(\tan x)=1$ pour tout $x\in\mathbb{R}$ ou encore que $\arctan'(\tan x)=\cos^2(t)=\frac{\cos^2 x}{\sin^2 x+\cos^2 x}=\frac{1}{\tan^2 x+1}$. Comme tout $t\in\mathbb{R}$ s'écrit $\tan x$ avec $x\in]-\frac{\pi}{2},\frac{\pi}{2}[$, on obtient bien que pour tout t réel, $\arctan'(t)=\frac{1}{1+t^2}$.

(2) On procède à une intégration par parties (formelle) de $1 \cdot \arctan(t)$:

$$\int 1 \cdot \arctan(t)\,dt = [t \cdot \arctan t] - \int t \cdot \frac{1}{1+t^2}\,dt = x \cdot \arctan x - \frac{1}{2}\ln(|1+x^2|)$$

(puisque $\frac{2t}{1+t^2} = \frac{u'(t)}{u(t)}$ avec $u(t) = 1+t^2$). Comme $1+x^2 > 0$ pour tout x réel, on obtient donc que les primitives de arctan sont les fonctions $x \mapsto x \cdot \arctan x - \frac{1}{2}\ln(1+x^2) + C$ avec $C \in \mathbb{R}$.

(3) (a) Comme arctan est bien définie (et de classe C^∞) sur $\mathbb{R}$, par opérations usuelles et compositions, la fonction g est bien définie en $x \in \mathbb{R}$ si et seulement si $x \neq 0$ et donc $D' = \mathbb{R}^*$, domaine sur lequel g est C^1 (puisque C^∞).

(b) Comme $\mathbb{R}^*$ est symétrique par rapport à 0 et que les fonction arc tangente et inverse sont impaires, la fonction g est impaire.

(c) La fonction g est C^1 sur $\mathbb{R}^*$ et pour tout réel non nul x,

$$g'(x) = -\frac{1}{x^2} \cdot \frac{1}{1+\left(\frac{1}{x}\right)^2} + \frac{1}{1+x^2} = -\frac{1}{x^2+1} + \frac{1}{1+x^2} = 0\,.$$

On en déduit que g est constante sur chaque intervalle inclus dans son domaine de définition. En particulier, g est constante sur $D' \cap \mathbb{R}^+ = \mathbb{R}^{+*}$.

(d) Quand x tend vers $+\infty$, $\frac{1}{x}$ tend vers 0 et donc $\arctan\frac{1}{x}$ aussi, par continuité de arctan. On en déduit que $g(x)$ converge donc, comme le terme $\arctan(x)$, vers $\frac{\pi}{2}$ quand x tend vers $+\infty$. Comme $g(x) = C$, $C \in \mathbb{R}$, avec C qui "tend" vers $\frac{\pi}{2}$ en $+\infty$, nécessairement $C = \frac{\pi}{2}$.

(e) On en déduit que $g(1) = 2\arctan(1) = \frac{\pi}{2}$ et donc que $\arctan(1) = \frac{\pi}{4}$.

(f) Ceci est immédiat, par définition de fonction réciproque, car $\tan\frac{\pi}{4} = 1$ (puisque $\sin\frac{\pi}{4} = \cos\frac{\pi}{4} = \frac{\sqrt{2}}{2}$) et, bien entendu, $\frac{\pi}{4} \in\,]-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}[$.

(g) En calculant la limite en $-\infty$ de g ou en utilisant le fait que g est impaire, on trouve que g égale $-\frac{\pi}{2}$ sur $\mathbb{R}^{-*}$.

(4) (a) Soit h la fonction définie par $h(x) = \arctan(e^x)$ sur $\mathbb{R}$. Par dérivation de fonction composée, on obtient que

$$h'(x) = e^x\,\frac{1}{1+(e^x)^2} = \frac{e^x}{1+e^{2x}} = \frac{1}{e^x + e^{-x}}\,.$$

(b) En remarquant que $h'(x) = \frac{1}{2\cosh x}$, on en déduit que les primitives de $\frac{1}{\cosh}$ sont de la forme $2h + C$ avec $C \in \mathbb{R}$. Comme $2h(0) = 2\arctan(1) = \frac{\pi}{2}$ (comme vu ci-dessus), on en déduit que la primitive de $\frac{1}{\cosh}$ qui s'annule en 0 est la fonction $x \mapsto 2\arctan(e^x) - \frac{\pi}{2}$.

Problème 3. (7 points)

(1) (a) Cette fonction est C^∞ sur $]-1, +\infty[$, donc en particulier C^2 sur un voisinage de 0. Sa dérivée $x \mapsto \frac{1}{1+x}$ valant 1 en $x = 0$ et sa dérivée seconde $x \mapsto \frac{-1}{(1+x)^2}$ valant -1 en 0, on obtient

$$\ln(1+x) = \ln 1 + x - \frac{x^2}{2} + x^2\varepsilon(x) = x - \frac{x^2}{2} + x^2\varepsilon(x),$$

par Taylor–Young, avec $\varepsilon(x) \to 0$ lorsque $x \to 0$.

(b) En remplaçant x par $t-1$ (de sorte que "x au voisinage de 0" corresponde à "t au voisinage de 1"), on obtient au voisinage de 1 et avec $\varepsilon(t) \to 0$ lorsque $t \to 1$:

$$\ln t = (t-1) - \frac{(t-1)^2}{2} + (t-1)^2\varepsilon(t)\,.$$

(2) D'après la question précédente, pour t proche de 1, $t \neq 1$, on a : $f(t) = \frac{\ln t}{t-1} = 1 - \frac{t-1}{2} + (t-1)\varepsilon(t)$, et donc, clairement, $\lim_{t\to 1, t\neq 1} f(t) = 1 = f(1)$: f est continue en 1.

(3) (a) Comme f est sur $\mathbb{R}^{+*} \setminus \{1\}$ quotient de deux fonctions C^1 dont le dénominateur ne s'annule pas, f est C^1 sur ce domaine. De plus, le calcul donne, pour tout $t > 0$, $t \neq 1$:

$$f'(t) \overset{(*)}{=} -\frac{\ln t}{(t-1)^2} + \frac{1}{t(t-1)} = \frac{(t-1)/t - \ln t}{(t-1)^2} = \frac{1 - 1/t + \ln(1/t)}{(t-1)^2},$$

et donc $f'(t) < 0$, en utilisant l'inégalité de l'énoncé, appliquée à $u = 1/t \in \mathbb{R}_+^* \setminus \{1\}$.

(b) D'après l'égalité $(*)$ ci-dessus, l'égalité demandée revient à établir que pour tout $t \in \mathbb{R}_+^* \setminus \{1\}$, $\frac{1}{t-1} - \frac{1}{t} = \frac{1}{t(t-1)}$ ce qui est immédiat.

(c) D'après (1b) et la question précédente, on a, pour t au voisinage de 1, $t \neq 1$,

$$\begin{aligned} f'(t) &= -\frac{\ln t}{(t-1)^2} + \frac{1}{t-1} - \frac{1}{t} = -\frac{1}{(t-1)^2}\Big((t-1) - \frac{(t-1)^2}{2} + (t-1)^2\varepsilon(t)\Big) + \frac{1}{t-1} - \frac{1}{t} \\ &= -\frac{1}{t-1} + \frac{1}{2} + \varepsilon(t) + \frac{1}{t-1} - \frac{1}{t} = \frac{1}{2} - \frac{1}{t} + \varepsilon(t) \qquad \text{avec } \varepsilon(t) \xrightarrow{t\to 0} 0\,. \end{aligned}$$

Par conséquent, $f'(t)$ admet la limite $-\frac{1}{2}$ quand t tend vers 1 (et $t \neq 1$). Ceci (avec le début de la réponse à la question (3a)) permet de conclure que f est C^1 sur $\mathbb{R}^{+*}$ grâce au “théorème de prolongement C^1”.

(4) On sait que f est C^1 sur $\mathbb{R}^{+*}$, que $f' < 0$ sur $\mathbb{R}^{+*} \setminus \{1\}$ et que $f'(1) = -\frac{1}{2}$. Donc f' est *strictement* négative sur $\mathbb{R}^{+*}$. En particulier, f est strictement décroissante, donc bijective, de $\mathbb{R}^{+*}$ sur son image, intervalle ouvert dont les bornes sont les limites de f en 0^+ et $+\infty$ par Weierstrass généralisé (f est continue !). Comme $\lim_{t\to 0^+} f(t) = +\infty$, et $\lim_{t\to+\infty} f(t) = 0$ (croissances comparées appliquées à $f(t) = \frac{t}{t-1}\frac{\ln t}{t}$), on a bien $f(\mathbb{R}^{+*}) = \mathbb{R}^{+*}$, ce qui conclut la réponse.

$\boxed{\text{FIN de la correction du contrôle 2}}$

Correction de la "suite possible mais plus difficile" du problème

(5) Comme f est une bijection C^1 de $\mathbb{R}^{+*}$ sur lui-même, de dérivée < 0, il en va de même pour sa réciproque f^{-1}. Par composition, s est donc C^1 sur $\mathbb{R}^{+*}$, et $s' = \frac{(f^{-1})'}{f^{-1}}$ est < 0 ; s est donc strictement décroissante. En outre, $f(1) = 1$ donc $\psi(1) = e$, d'où : $s(e) = \psi^{-1}(e) = 1$.

(6) Comme s est injective, on a $s(y) \neq s(e) = 1$ dès que $y \in \,]1, +\infty[\, \setminus \{e\}$. Par construction, on a de plus, pour de tels y :

$$y = \psi[s(y)] = \exp\left[f\big(\underbrace{s(y)}_{\neq 1}\big)\right] = \exp\left[\frac{\ln[s(y)]}{s(y)-1}\right],$$

d'où le résultat en prenant le logarithme de chaque membre.

(7) Si l'on fixe $y \in \,]1, +\infty[\, \setminus \{e\}$, l'égalité de la question précédente se réécrit $\ln[s(y)] = \big(s(y) - 1\big) \ln y$, soit : $s(y) = 1 + \frac{\ln[s(y)]}{\ln y}$; $s(y)$ est donc bien une solution de l'équation (1).
Dans le cas $y = e$, l'équation (1) devient $\sigma = 1 + \ln \sigma$, dont $\sigma = 1 = s(e)$ est clairement solution.

(8) Soient $y > 1$ et σ une solution de l'équation (1) associée à cet y. Alors $\sigma \ln y = \ln y + \ln \sigma$, soit $\ln(y^\sigma) = \ln(\sigma y)$, donc $y^\sigma = \sigma y$. En mettant les deux membres à la puissance y, comme $y^{\sigma y} = (y^\sigma)^y$, on trouve bien : $y^{\sigma y} = (\sigma y)^y$.
Étant donné $y > 1$, $y \neq e$, l'équation $y^x = x^y$ d'inconnue $x > 0$ admet donc (au moins) comme solution $x_0 = ys(y)$ (puisque $s(y)$ est solution de l'équation (1) associée à y), ainsi que $x = y$ (on a bien $y^y = y^y$!). Or $s(y) \neq 1$ (et $y \neq 0$), donc $x_0 = ys(y) \neq y$.

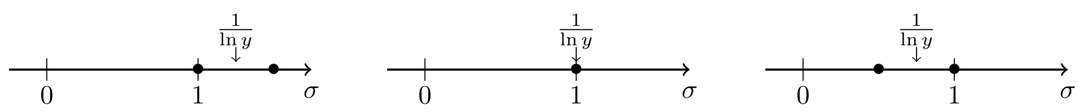
(9) La fonction α est C^1 en tant que produit de fonctions C^1. En dérivant les deux membres de l'égalité d'involution que satisfait α, il vient, par dérivation de fonctions composées, pour tout $y > 0$:

$$1 = \alpha'(y) \cdot \alpha'[\alpha(y)].$$

En particulier, $\alpha'(y)$ n'est jamais nulle. Comme elle est continue, α' est de signe strict constant.

(10) (a) Il suffit de voir que la fonction $\sigma \mapsto \sigma - \frac{\ln \sigma}{\ln y}$ est strictement croissante (car $\ln y < 0$), et prend donc la valeur 1 en au plus un point par injectivité. Celle-ci étant atteinte en $\sigma = 1$, on ne peut donc avoir d'autre solution σ à l'équation $\sigma - \frac{\ln \sigma}{\ln y} = 1$, qui est une réécriture de (1).

(b) Dans le cas $y > 1$, la fonction $\sigma \mapsto \sigma - \frac{\ln \sigma}{\ln y}$ est strictement décroissante sur $]0, \frac{1}{\ln y}]$ puis strictement croissante sur $[\frac{1}{\ln y}, +\infty[$ (regarder sa dérivée).
Si $y \in \,]1, e[$, on a $\frac{1}{\ln y} > 1$, donc $1 = 1 - \frac{\ln 1}{\ln y} = \big(\sigma - \frac{\ln \sigma}{\ln y}\big)\big|_{\sigma=1} > \big(\sigma - \frac{\ln \sigma}{\ln y}\big)\big|_{\sigma=1/\ln y} = \frac{1}{\ln y} - \frac{\ln(1/\ln y)}{\ln y}$; la fonction considérée, qui prend la valeur 1 en 1, prend donc à nouveau cette valeur en un point de $[\frac{1}{\ln y}, +\infty[$ (et même sur $]\frac{1}{\ln y}, +\infty[$), par le théorème des valeurs intermédiaires généralisé, en observant que $\lim_{\sigma \to +\infty} \big(\sigma - \frac{\ln \sigma}{\ln y}\big) = +\infty$. De plus, par injectivité sur $]0, \frac{1}{\ln y}]$ et sur $[\frac{1}{\ln y}, +\infty[$, ces deux points sont les seules solutions de l'équation $\sigma - \frac{\ln \sigma}{\ln y} = 1$.
On procède de manière symétrique dans le cas $y \in \,]e, +\infty[$ (où cette fois $0 < \frac{1}{\ln y} < 1$).
Enfin, si $y = e$, on a décroissance stricte à gauche de 1 et croissance stricte à droite de 1, point où $\sigma - \frac{\ln \sigma}{\ln y} = 1$, qui est donc l'unique point où cette égalité a lieu. On résume ces observations graphiquement comme suit, en indiquant par des $\bullet$ les points σ où $\sigma - \frac{\ln \sigma}{\ln y}$ vaut 1 :



Cas $1 < y < e$ — Cas $y = e$ — Cas $y > e$

(c) Les équations (1) et $x^y = y^x$ sont liées par le fait qu' à $y > 0$ fixé, $\sigma > 0$ vérifie (1) *ssi* $x = \sigma y$ vérifie $x^y = y^x$ (on peut procéder par équivalence dans (8)). On voit donc que, pour $y > 1$, l'équation $x^y = y^x$ admet exactement deux solutions, qui sont donc $x = y$ et $x = ys(y) = \alpha(y)$, si $y \neq e$, et une seule solution, $x = y = e$, si $y = e$. En d'autres termes, pour $y > 1$, on a $x^y = y^x$ *ssi* $x \in \{y, \alpha(y)\}$, ce qui reste bien valide pour $y = e$, avec $\{y, \alpha(y)\}$ réduit à $\{e\}$.
Considérons à présent l'équation $x^{\alpha(y)} = [\alpha(y)]^x$ ($y > 1$ fixé). Elle est équivalente, d'après la discussion ci-dessus, à : $x \in \{\alpha(y), \alpha[\alpha(y)]\}$. D'autre part, on sait que $y^{\alpha(y)} = [\alpha(y)]^y$; ceci signifie donc : $y \in \{\alpha(y), \alpha[\alpha(y)]\}$. Dans le cas $y \neq e$, comme $y \neq \alpha(y)$, ceci impose l'égalité $y = \alpha[\alpha(y)]$, trivialement vérifiée dans le cas $y = e$, puisque $\alpha(e) = es(e) = e$.