CONTRÔLE CONTINU DE MATHÉMATIQUES N°1

du mercredi 4 octobre 2017 – Durée : 2h.
Documents et calculatrices interdits.

Ce devoir comporte 2 pages et est constitué de 4 exercices **indépendants**.
Toute réponse se doit d'être **justifiée**. Le barème donné est indicatif.

Exercice 1. Questions de cours (4 points)

(1) Soit $f\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ et $x_0 \in \mathbb{R}$. Donner la définition de $\lim_{x\to x_0} f(x) = -\infty$.

(2) Soit $f : E \to F$ une fonction. Définir la fonction réciproque de f (en n'oubliant pas d'énoncer la condition sous laquelle celle-ci existe).

(3) Énoncer précisément le théorème des valeurs intermédiaires.

(4) Soit $f : [0\,,1] \to \mathbb{R}$ telle que $f(0) = 1$, $f(\frac{1}{2}) = -1$ et $f(1) = 2$.

  (a) Que peut-on dire de l'ensemble des $x \in [0\,,1]$ tels que $f(x) = 0$?

  (b) Même question lorsque l'on suppose de plus que f est continue.

Exercice 2. (6 points)

Déterminer les limites suivantes:

(1) $\lim_{x\to 2} \frac{x^3-8}{x-2}$.

(2) $\lim_{x\to 1} \frac{\sqrt{x^2+x-1}-1}{x^2-1}$.

(3) $\lim_{x\to 0} \frac{\tan(\tan(x))}{\tan(x)}$.

(4) $\lim_{x\to +\infty} \frac{\cos(e^x)}{\ln x}$.

Exercice 3. (10 points) On commence par étudier la fonction $F : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, définie par $F(x) = e^{-e^{-x}}$. On note I son image: $I = \mathrm{im}(F) \subset \mathbb{R}$.

(1) Montrer que F est continue et strictement croissante sur $\mathbb{R}$.

(2) En déduire que F établit une bijection, $F : \mathbb{R} \to I$.

(3) Calculer les limites de $F(x)$ quand x tend respectivement vers $+\infty$ et $-\infty$.

(4) Déterminer I.

(5) Déterminer explicitement la fonction réciproque de F.

On s'intéresse désormais à la fonction $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ définie par $f(x) = e^{-x-e^{-x}}$.

(6) Justifier que f est strictement positive sur $\mathbb{R}$.

(7) Calculer les limites de f en $-\infty$ et en $+\infty$.

(8) La fonction f est-elle injective? Est-elle surjective?

(9) Calculer $\lim_{x\to+\infty} \frac{f(-x)}{f(x)}$.

(10) Grâce à la limite précédente, expliquer pourquoi la représentation graphique de f s'aplatit plus vite en $-\infty$ qu'en $+\infty$.

Exercice 4. (4 points)

Soit $f\colon \mathbb{R}^{+*} \to \mathbb{R}$ une fonction *croissante* telle que la fonction $g\colon \mathbb{R}^{+*} \to \mathbb{R}$ définie par $g(x) = \frac{f(x)}{x}$ est *décroissante*. On va montrer que f est nécessairement continue.

(1) Soient x et x_0 tels que $x_0 \geq x > 0$. Montrer les deux inégalités: $\frac{x}{x_0} f(x_0) \leq f(x) \leq f(x_0)$.

(2) En déduire la valeur de $\lim_{x\to x_0^-} f(x)$.

(3) De manière similaire, calculer $\lim_{x\to x_0^+} f(x)$.

(4) Conclure soigneusement que la fonction f est continue sur $\mathbb{R}^{+*}$.