Test n°3 (intégration, équations différentielles)

Pour chacune des questions, répondre par vrai ou faux
puis *justifier soigneusement votre réponse.*

1) Soit f une fonction continue sur $\mathbb{R}$, et F une fonction de classe C^1 sur $\mathbb{R}$ telles que $F'(x) = xf(x)$ pour tout x de $\mathbb{R}$ et $F(0) = 0$. Alors les primitives de f sont de la forme $\frac{F(x)}{x} + c$ avec $c \in \mathbb{R}$.

2) Si $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ est une fonction continue telle que $\int_a^b f(t)\,dt = 0$, alors $f(x) = 0$ pour tout x dans $[a, b]$.

3) Soit f une fonction continue sur $[-\frac{1}{2}, \frac{1}{2}]$. Le changement de variable $t = \sin x$ donne

$$\int_{-\frac{1}{2}}^{\frac{1}{2}} f(t)\,dt = \int_{-\frac{5\pi}{6}}^{\frac{\pi}{6}} f(\sin x)\cos x\,dx\ .$$

4) Si f est une fonction continue croissante sur $\mathbb{R}$, alors la fonction g définie sur $\mathbb{R}$ par la formule

$$g(x) = \int_{x^3}^{x^3+1} f(t)\,dt$$

est une fonction de classe C^1, croissante sur $\mathbb{R}$.

5) Soit f une fonction paire, continue sur $\mathbb{R}$. Alors la fonction g définie par

$$g(x) = \int_{\arctan x}^{\arctan(x^3)} f(t)\,dt$$

est une fonction paire, de classe C^1 sur $\mathbb{R}$.

6) On a l'égalité suivante: $\int_0^1 x^2\sqrt{1+x}\,dx = \frac{44\sqrt{2}-8}{105}$.

7) On a l'égalité suivante: $\int_0^1 \sqrt{1-x^2}\,dx = \frac{\pi}{4}$.

8) La fonction $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ définie par $f(0) = 0$ et $f(x) = x^3 \sin\left(\frac{1}{x}\right)$ pour $x \neq 0$ n'est pas de classe C^2 mais admet un développement limité à l'ordre 2 en 0.

9) On a l'égalité suivante: $\int_0^{\ln\frac{\pi}{2}} e^x \sin(2e^x)\,dx = (\cos 1)^2$.

10) Soient F une primitive de $\sin^2(e^x)$ et G une primitive de $\cos^2(e^x)$ sur $\mathbb{R}$. Alors la fonction $F + G$ est une fonction constante sur $\mathbb{R}$.

11) Sur $\mathbb{R}_+^*$, les fonctions $t \mapsto c\,t^t e^{-t}$ (avec $c \in \mathbb{R}$) sont solutions de l'équation différentielle $y' = y\ln t$.

12) Poser $u = \frac{y}{t}$ permet de transformer l'équation $y' = \frac{t^2+y^2}{ty}$ en une équation d'ordre 1 à variables séparables, satisfaite par u.

13) Soit f une solution de l'équation différentielle $y' = -\frac{t}{y}$. Alors les points $(t, f(t)) \in \mathbb{R}^2$ sont à distance constante de l'origine.

14) Toutes les solutions sur $\mathbb{R}$ de l'équation différentielle : $y'' - 2ty' = t$ satisfaisant $y(-1) = 1$ sont les fonctions

$$y(t) = C \cdot \int_{-1}^{t} e^{s^2} ds + \frac{1}{2}(1-t) \quad \text{avec } C \in \mathbb{R}\,.$$

15) Soit a une fonction continue sur $\mathbb{R}$. Toutes les solutions de l'équation différentielle $y' = a(t)y$ tendent vers $-\infty$ ou $+\infty$ quand t tend vers $+\infty$.

16) Si une fonction est solution de l'équation différentielle $y' - y = \sin t$ sur $\mathbb{R}$, elle doit admettre 2π comme période.

17) La différence entre deux solutions sur $\mathbb{R}_+^*$ de l'équation différentielle $ty' + y = t\cos t$ est du type $t \mapsto \frac{c}{t}$ avec $c \in \mathbb{R}$.

18) Il existe une unique solution de l'équation différentielle $y' = \arctan(e^t)\, y$ sur $\mathbb{R}$, qui s'annule en $t = 3$.

19) Il n'existe aucune solution de l'équation différentielle $ty' - 3y = 0$ sur $\mathbb{R}$, qui soit positive sur $\mathbb{R}$ tout entier.

20) Il existe une unique solution de l'équation différentielle $t^2y' - 2ty = 0$ sur $\mathbb{R}$, telle que $y(2) = 12$.