

Test n°2 (continuité, dérivabilité, DL)

Pour chacune des questions, répondre par vrai ou faux puis *justifier soigneusement votre réponse*.

Pour chacune des questions, répondre par vrai ou faux puis *justifier soigneusement votre réponse*.

1) Soit f la fonction définie sur \mathbb{R}^* par la formule $f(x) = \frac{x}{|x|}$. La fonction $g(x) = e^{f(x)} + e^{-f(x)}$ définie sur \mathbb{R}^* est prolongeable par continuité à \mathbb{R} .

2) Si f et g sont deux fonctions continues sur $[0, 1]$, alors la fonction $\frac{f}{(2g+3)^2}$ est continue sur $[0, 1]$.

3) La fonction définie sur \mathbb{R}^* par la formule $h(x) = (e^{\tanh x} - 1) \ln(3 + \sin \frac{3}{x})$ est prolongeable par continuité en 0.

4) Soit H la fonction définie sur \mathbb{R} par la formule

$$H(x) = \begin{cases} \ln(x+1) & \text{si } x \geq 0 \\ \cos x & \text{si } x < 0 \end{cases}$$

et u la fonction définie sur \mathbb{R} par $u(x) = e^x$. La fonction $H \circ u$ est continue sur \mathbb{R} .

5) Soit f une fonction définie sur \mathbb{R} . Si f est strictement croissante, alors f est continue sur \mathbb{R} .

6) L'image de l'intervalle $] -2, 1[$ par la fonction $x \mapsto \frac{x}{(1-x)(x+2)}$ est \mathbb{R} .

7) La fonction $x \mapsto |x| \sin x$ est dérivable sur \mathbb{R} .

8) Soit f une fonction dérivable en 0. On a

$$\lim_{\substack{x \rightarrow 0 \\ x \neq 0}} \frac{f(x) - f(-x)}{2x} = f'(0).$$

9) Si f est une fonction continue en 0, vérifiant

$$\lim_{\substack{x \rightarrow 0 \\ x \neq 0}} \frac{f(x) - f(-x)}{2x} = \ell \in \mathbb{R},$$

alors f est dérivable en 0 et $f'(0) = \ell$.

10) Si f est une fonction dérivable sur $[0, 4]$ qui atteint son maximum en 0, alors $f'(0) = 0$.

11) Si g est une fonction définie sur \mathbb{R} et vérifiant $\lim_{x \rightarrow -\infty} |g(x)| = \lim_{x \rightarrow +\infty} |g(x)| = +\infty$, alors g admet un maximum ou un minimum global.

12) La fonction définie par la formule

$$f(x) = e^{\sinh x} + \sinh(e^x) + e^{\cosh(2x)} + \cosh(2e^x)$$

admet un minimum sur \mathbb{R} .

13) Il existe une fonction $f : [-1, 1[\rightarrow \mathbb{R}$ continue et surjective.

14) Le développement limité à l'ordre 3 en $x_0 = 0$ de la fonction

$$\sinh x = \left(\frac{e^x - e^{-x}}{2} \right)$$

est $x + \frac{x^3}{6} + x^3\varepsilon(x)$ avec $\varepsilon(x) \rightarrow 0$ quand $x \rightarrow 0$.

15) On a la limite suivante:

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin(\ln(1+x)) - \ln(1+\sin x)}{x^4} = \frac{1}{12}.$$

16) On a la limite suivante:

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} \left(x^{\frac{1}{x}} - (1+x)^{\frac{1}{x}} \right) = 0.$$

17) On a la limite suivante:

$$\lim_{x \rightarrow \frac{\pi}{4}} \frac{\sin x - \cos x}{x - \frac{\pi}{4}} = \sqrt{2}.$$

18) La fonction $x \mapsto |x^2|$ est C^1 sur \mathbb{R} .

19) La fonction définie par la formule $f(x) = \ln\left(\frac{e^x-1}{x}\right)$ admet un prolongement de classe C^1 au voisinage de 0. Ce prolongement est localement au-dessus de sa tangente en 0.

20) Le graphe de la fonction $f(x) = e^x$ est au-dessus de la courbe d'équation $y = \frac{x^2}{2} + x + 1$ localement, au voisinage de 0.